M2R Université de Paris-Sud
2006-2007 décembre 2006

Feuille 7 : Caractères, Idèles, Fourier

Exercice 1 Montrer que pour la transformation de Fourier définie dans le cours (par $\widehat{f}(x) = \int_{\mathbb{R}} f(t)e^{2i\pi xt}dt$) la mesure de Lebesgue dx sur $\mathbb{R}$ est autoduale. On pourra considérer la fonction $t \mapsto \exp(|-t|)$.

Exercice 2 Faire l'exercice 1 de la feuille 2 sur la différente (notamment le lien avec le discriminant).

Exercice 3 Soient E/K une extension finie de corps de nombres de degré n. On note $\{u_1, \ldots, u_n\}$ une base de E/K. Montrer que l'application

$$\varphi : \prod_{j=1}^{n} \mathbb{A}_K \to \mathbb{A}_E, \quad ((x_{v,j})_v)_j \mapsto \sum_{j=1}^{n} (x_{v,j})_v u_j$$

est un isomorphisme topologique.

Exercice 4 (Le solénoïde infini) Pour tout entiers $n, m \geq 1$ tels que m divise n, la suite d'applications naturelles

$$\mathbb{R}/n\mathbb{Z} \to \mathbb{R}/m\mathbb{Z}$$

permet de définir le groupe compact abélien, dit *solénoïde infini*, $S = \varprojlim \mathbb{R}/n\mathbb{Z}$. Par ailleurs on note $\widehat{\mathbb{Z}} = \prod_p \mathbb{Z}_p$ où le produit porte sur tous les nombrs premiers.

1. Montrer pour tout entier $n \geq 1$ la variante suivante du théorème d'approximation faible : $\mathbb{A}_{\mathbb{Q}} = \mathbb{Q} + \mathbb{R} \times n\widehat{\mathbb{Z}}$.
2. Montrer que pour tout n, l'application

$$\mathbb{R}/n\mathbb{Z} \to \mathbb{A}_{\mathbb{Q}}/\left(\mathbb{Q} + n\widehat{\mathbb{Z}}\right), \quad x \mapsto (x \text{ à la place } \infty, 0 \text{ ailleurs})$$

(où $n\widehat{\mathbb{Z}}$ est plongé dans $\mathbb{A}_{\mathbb{Q}}$ par $x \mapsto (0_\infty, x_2, \ldots, x_p \ldots)$) est un isomorphisme.

3. Montrer que le passage à la limite projective définit un isomorphisme

$$\mathbb{A}_{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q} \to S.$$

Exercice 5 (Composante neutre de $\mathbb{I}_K$) Soit K un corps de nombres admettant r_1 plongements réels et r_2 paires de plongements complexes. Soient $\mathbb{I}_K$ le groupe des idèles de K et H sa composante connexe de l'identité. Montrer que H est contenu dans tous les sous groupes ouverts de $\mathbb{I}_K$. En déduire que $H = (\mathbb{C}^*)^{r_2} \times (\mathbb{R}^{+*})^{r_1}$.

Exercice 6 (Groupe des classes d'idèles) Soient p premier, $V = \Pi_{i\in\mathbb{N}}\mathbb{F}_p$ un produit dénombrable de copies de $\mathbb{F}_p$ et $W = \oplus_{i\in\mathbb{N}}\mathbb{F}_p \subset V$.

1. Construire un sous-groupe $W \subset W' \subset V$ propre d'indice fini dans V. Montrer qu'il n'est pas ouvert.
2. Montrer que pour tout nombre premier p, le groupe $\mathbb{Z}_p^\times$ admet un sous-groupe ouvert d'indice 2 (distinguer les cas $p = 2$ et p impair).
3. En déduire l'existence d'un sous-groupe d'indice fini du groupe des classes d'idèles $C_\mathbb{Q} = I_\mathbb{Q}/\mathbb{Q}^*$ qui n'est pas ouvert.

Exercice 7 (Calculs d'intégrales sur $\mathbb{Q}_p$) Soit dx la mesure sur $\mathbb{Z}_p$ normalisée par $\int_{\mathbb{Z}_p} dx = 1$. Soit $s \neq 0$.

1. Calculer $\int_{\mathbb{Z}_p} |x|^s dx$.
2. Si φ est une fonction continue sur $\mathbb{Z}_p$, calculer $\int_{\mathbb{Z}_p} \varphi(x)dx$.
3. Soit "dg" une mesure de Haar sur $\mathbb{Q}_p$. Montrer que pour toute fonction continue φ sur $\mathbb{Q}_p$, on a
$$\int_{\mathbb{Q}_p} \varphi(g)dg = |\alpha|_p^{-1} \int_{\mathbb{Q}_p} \varphi(\alpha g)dg, \quad \alpha \in \mathbb{Q}_p^*.$$
4. Soit $e_p : \mathbb{Q}_p \to \mathbb{C}^*$ le caractère additif donné par $e_p(x) = e^{-2\pi i q}$ si $x \in q + \mathbb{Z}_p$ (q étant la partie fractionnaire dans $\mathbb{Z}[\frac{1}{p}]$ de x). Montrer que
$$\int_{x\in\mathbb{Q}_p, |x|=p^{-k}} e_p(x)dx = \begin{cases} \frac{p-1}{p}p^{-k} & k \geq 0 \\ -1 & k = -1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$
5. Montrer que pour tout $s \in \mathbb{R}$, on a
$$\int_{\mathbb{Q}_p} e_p(x)|x|^s dx = \frac{1-p^s}{1-p^{-s-1}}$$

Exercice 8 ($\mathbb{I}_K^1/K^*$ compact $\Rightarrow$ $\mathrm{Cl}(\mathcal{O}_K)$ fini) Soit K un corps de nombres. On rappelle que l'on a un morphisme de groupes entres les idèles de K et les idéaux fractionnaires de K :
$$\varphi : \mathbb{I}_K \to \mathrm{Div}(\mathcal{O}_K), \quad x = (x_v) \mapsto \prod_{v\nmid\infty} \mathfrak{p}_v^{\mathrm{val}(x_v)}.$$
Montrer que si l'on munit $\mathrm{Div}(\mathcal{O}_K)$ de la topologie discrète, ce morphisme est continu et que $\varphi_{|\mathbb{I}_K^1}$ est surjectif. En déduire la finitude du groupe des classes $\mathrm{Cl}(\mathcal{O}_K)$.

Exercice 9 ($\mathbb{I}_K^1/K^*$ compact $\Rightarrow$ Théorème des unités) Soient K un corps de nombres et S un ensemble fini de places, contenant les places à l'infini. On note
$$H_S = \{x \in K \mid \forall v \notin S \ \ |x|_v = 1\}$$
le *groupe des S-unités.*

1. Vérifier que H_S est un sous-groupe de K^*.
2. Soient $0 < c \leq C < +\infty$. Montrer que l'ensemble des S-unités x vérifiant $c \leq |x|_v \leq C$ pour tout $v \in S$ est fini.
3. Notons $\mu_\infty(K)$ le groupe des racines de l'unités dans K. Déduire de la question précédente que si $x \in K$, on a
$$|x|_v = 1 \ \ \forall v \iff x \in \mu_\infty(K).$$
4. On suppose désormais que $S = S_\infty$ est l'ensemble des places archimédiennes de K. On note $J_S = \{x \in \mathbb{I}_K \mid \ \forall v \notin S \ |x_v|_v = 1\}$ et on pose $J_S^1 = J_S \cap \mathbb{I}_K^1$. On introduit également le plongement logarithmique
$$\lambda : J_S \to (\mathbb{R})^s, \quad \alpha \mapsto (\log |\alpha_i|_i)_{1 \leq i \leq s} \quad \text{avec } s = \mathrm{Card}(S).$$
Montrer que λ est surjective, continue. Montrer que $\lambda_{|H_S}$ est cyclique et que $\lambda(H_S)$ est discret.
5. Considérant $\lambda(J_S^1)$ montrer que $\lambda(H_S)$ est libre de rang $s-1$.