M2R Université de Paris-Sud
2006-2007 séances 6 et 7 des 20 et 27 novembre 2006

Feuille 5 : Corps locaux

Dans toute cette feuille, si l'on ne précise rien, p est un nombre premier.

Exercice 1 (Calculs)

1. Calculer la limite de $\frac{n!}{n!+1}$ dans $\mathbb{R}$ et dans $\mathbb{Q}_p$ pour tout premier p.
2. On ordonne les nombres premiers par ordre croissant et on forme ainsi la suite $(p_n)_{n\geq 1}$ où p_n est le n-ieme nombre premier. On note $p_\infty := \infty$. Pour tout entier $n \geq 1$, soient $a_n \in \mathbb{Z}_{p_n}$ des entiers p_n-adiques et $a_\infty = 0$. Montrer qu'il existe une suite de rationnels $(x_n)_{n\geq 1}$ avec $x_n \in \mathbb{Q}$ telle que
$$\forall i \in \mathbb{N}^* \cup \{\infty\}, \quad \lim_{n\to+\infty} |x_n - a_{p_i}|_{p_i} = 0.$$
On pourra par exemple écrire $x_n = \frac{u_n}{v_n}$ et poser $v_n = 2^n f(n)+1$ avec $f(n) = (\prod_{i=1}^n p_i)^n$.

Exercice 2 (Complétion)

1. **(Théorème de Baire)** Soit E un espace topologique. On suppose que E est localement compact, ou que E est muni d'une distance d qui en fait un espace métrique complet. Montrer que toute intersection dénombrable $\bigcap_{n\geq 1} V_n$ d'ouverts denses dans E est dense dans E (on pourra construire une suite d'ouverts non vides (B_n) telle que $\overline{B}_{n+1} \subset V_n \cap B_n$).
2. Soit $(K, |\cdot|)$ un corps valué (*i.e.* muni d'une valeur absolue *ultramétrique*) complet, avec $|\cdot|$ une valeur absolue non-triviale. Montrer que K est indénombrable (on pourra utiliser le théorème de Baire).
3. En déduire que $\mathbb{Q}$ muni de la valeur absolue p-adique n'est pas complet.

Exercice 3 Soient U un ouvert de $\mathbb{Z}_p$. Montrer que U n'est pas connexe.

Exercice 4 (Description de $\mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p$) On rappelle que tout $x \in \mathbb{Q}_p$ admet le développement de Hensel suivant
$$x = \sum_{i\in\mathbb{Z}} x_i p^i \quad \text{avec} \quad x_i \in \{0, \ldots, p-1\} \quad \text{et } x_i = 0 \text{ pour tout } i \ll 0.$$
On note
$$[x] := \sum_{i\geq 0} x_i p^i \quad \text{sa partie entière, et} \quad < x >:= \sum_{i<0} x_i p^i \quad \text{sa partie fractionnaire.}$$

1. Supposant l'existence et l'unicité du développement de Hensel sur $\mathbb{Z}_p$ acquis, le démontrer pour $\mathbb{Q}_p$.
2. Montrer que $\mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p$ est un groupe topologique discret.
3. Montrer que l'application $\tau : \mathbb{Q}_p \to \mathbb{C}^*$, $x \mapsto \exp(2i\pi < x >)$ est bien définie et est un morphisme de groupes.

4. À quoi est isomorphe le groupe $\mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p$?

Exercice 5 (Extensions quadratiques de $\mathbb{Q}_2$)

1. Soient K un corps de caractéristique différente de 2 et $\alpha, \beta \in K - K^2$. Montrer que
$$K[\sqrt{\alpha}] = K[\sqrt{\beta}] \iff \exists x \in K^* \quad \alpha = x^2\beta.$$
2. Soit $x = 2^n u$ un élément de $\mathbb{Q}_2^*$ avec $n \in \mathbb{Z}$ et $u \in \mathbb{Z}_2^\times$ une unité 2-adique. Montrer que $x \in \mathbb{Q}_2^{*2}$ si et seulement si n est pair et $u = 1 \mod 8\mathbb{Z}_2$.
3. En déduire que $\mathbb{Q}_2^*/\mathbb{Q}_2^{*2} \simeq \mathbb{Z}/2Z \times (\mathbb{Z}/8\mathbb{Z})^\times \simeq (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^3$.
4. En déduire les extensions quadratiques de $\mathbb{Q}_2$.

Exercice 6 (Autres applications de Hensel)

1. Soient ℓ, p deux nombres premiers. Montrer que $\mathbb{Q}_\ell \simeq \mathbb{Q}_p$ si et seulement si $\ell = p$.
2. Soit $u \in \mathbb{Q}_p^*$. Montrer que
$$u \in \mathbb{Z}_p^\times \iff \text{il existe une infinité d'entiers } n \text{ tels que } u^{p-1} \in \mathbb{Q}_p^{*n}.$$
3. En déduire que si φ est un endomorphisme de corps de $\mathbb{Q}_p$ alors en notant v_p la valuation p-adique, on a : $\forall x \in \mathbb{Q}_p$, $v_p(\varphi(x)) = v_p(x)$.
4. En déduire que le seul endomorphisme de corps de $\mathbb{Q}_p$ est l'identité.

Exercice 7 (Clôture algébrique de $\mathbb{Q}_p$) Notons $\overline{\mathbb{Q}}_p$ une clôture algébrique de $\mathbb{Q}_p$. Supposons par l'absurde que $\overline{\mathbb{Q}}_p$ est complet et posons $\alpha = \sum_{n=1}^{\infty} \zeta_{n'} p^n$ avec $n' = \begin{cases} n & \text{si } (n,p) = 1 \\ 1 & \text{sinon} \end{cases}$ où ζ_m est une racine primitive m-ieme de l'unité. Posons $K = \mathbb{Q}_p(\alpha)$.

1. Montrer que $\forall m \in \mathbb{N}$, $\zeta_{m'} \in \mathcal{O}_K$.
2. En déduire que $\overline{\mathbb{Q}}_p$ n'est pas complet.

Exercice 8 (Divers)

1. En considérant par exemple le polynôme $P = X^2 - p$ vérifier que $\mathbb{Q}_p$ n'est pas algébriquement clos.
2. Montrer que -1 est un carré dans $\mathbb{Q}_5$.
3. Montrer que l'équation $(X^2 - 2)(X^2 - 17)(X^2 - 34) = 0$ a des solutions dans tous les $\mathbb{Z}_p$ et dans $\mathbb{R}$ mais pas dans $\mathbb{Q}$.

Exercice 9 (Lemme de Krasner) Soit K un corps complet pour une valuation non-archimédienne. Soit α, β deux éléments d'une clôture algébrique $\overline{K}$ de K avec α séparable sur $K(\beta)$. On dit que α *appartient à* β si pour tout conjugé $\sigma\alpha \neq \alpha$ de α,
$$|\beta - \alpha| < |\sigma\alpha - \alpha|$$
(où $|\cdot|$ désigne l'unique extension de la valeur absolue de K).

1. Montrer que si α appartient à β alors $K(\alpha) \subset K(\beta)$.

2. Si $f = \sum_{i=0}^{n} a_i X^i \in K[X]$, on pose $|f| := \max_{0 \le i \le n} |a_i|$. Soient f et g deux éléments de $K[X]$ unitaires, de même degré n. On suppose que f est irréductible sur K et séparable. Montrer que si $|f - g|$ est suffisamment petite, alors g est aussi irréductible. De plus dans ce cas, si α est une racine de f dans $\overline{K}$ montrer qu'il existe une racine β de g dans $\overline{K}$ telle que $K(\alpha) = K(\beta)$.

Exercice 10 (Extensions totalement ramifiées)

1. Soit K un corps valué ultramétrique de valuation discrète, complet, d'anneau d'entiers A. Soit $\mathfrak{m}$ l'idéal maximal de A. Montrer que A est compact si et seulement si $A/\mathfrak{m}$ est fini.
2. En déduire que si K un corps valué ultramétrique de valuation discrète, complet, d'anneau d'entiers A, d'idéal maximal $\mathfrak{p}$, d'uniformisante π et de corps résiduel fini, alors pour tout entier $n \geq 0$, les ensembles $\mathfrak{p}^n$, $1 + \mathfrak{p}^n$, $A^\times \pi$ sont compacts.
3. En déduire que sous les hypothèses précédentes et en supposant de plus que K est de caractéristique nulle (ceci étant notamment vérifiée par $\mathbb{Q}_p$) qu'il n'y a, à isomorphisme près, qu'un nombre fini d'extensions de K totalement ramifiées de degré fixé.

Exercice 11 (Applications de Krasner)

1. Soient $\overline{\mathbb{Q}}_p$ une clôture algébrique de $\mathbb{Q}_p$ et $\mathbb{C}_p$ la complétion de $\overline{\mathbb{Q}}_p$. Montrer que $\mathbb{C}_p$ est algébriquement clos.
2. Soit K une extension finie de $\mathbb{Q}_p$. Montrer qu'il existe une extension finie L de $\mathbb{Q}$ contenue dans K telle que $[L : \mathbb{Q}] = [K : \mathbb{Q}_p]$ et $L\mathbb{Q}_p = K$.

Exercice 12 (Polygone de Newton) Soit K un corps ultramétrique complet pour une valuation discrète. On étend sa valuation à la clôture algébrique de K : val :$\overline{K}^* \to \mathbb{Q}$. Pour

$$f(X) = \sum_{i=0}^{n} a_i X \quad a_i \in K \quad \text{et} \quad a_0 a_n \neq 0$$

on considère l'enveloppe convexe inférieure de l'ensemble des points $P_i := (i, \mathrm{val}(a_i))$ avec $i \in \{0, \ldots, n\}$, et on appelle *polygone de Newton de f* la chaine polygonale délimitant cette enveloppe convexe.

1. Comment est transformé le polygone de Newton quand on passe de f à $\frac{1}{a_n} f$?
2. (Cf. par exemple Neukirch *Algebraic Number Theory* p.145) Si le polygone de Newton de $f(X)$ a un segment de longueur n et de pente $-s$, montrer que f admet exactement n racines $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \overline{K}$ telles que $\mathrm{val}(\alpha_i) = 0$ pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$.
3. Montrer que $f_i(X) := \prod_{\mathrm{val}(\alpha_i) = s_i} (X - \alpha_i)$ est à coefficients dans K.
4. Soit $K = \mathbb{Q}[\alpha]$ où α est une racine de $X^3 - X^2 - 2X - 8$. Montrer qu'il y a trois extensions de la valuations 2-adique dans K.

Exercice 13 (Classification des corps locaux) On dit que K est un *corps local* si c'est un corps muni d'une valeur absolue non triviale, localement compact pour la topologie de cette valeur absolue et non discret. L'objet de cet exercice est la démonstration du résultat suivant :

Théorème : Tout corps local est isomorphe à l'un des corps suivants :

1. $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$;
2. une extension finie de $\mathbb{Q}_p$;
3. le corps des fractions de $k[[T]]$ où $[k : \mathbb{F}_p] < \infty$.

Dans chacun de ces cas, la valeur absolue est équivalente à la valeur absolue “naturelle”.

On note F un corps local et $|\cdot|$ sa valeur absolue.

1. Montrer que F n'est pas discret si et seulement si l'image de $|\cdot|$ est infinie.
2. On suppose F de caractéristique zéro. Montrer que F contient $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{Q}_p$ et que la restriction de $|\cdot|$ est équivalente à la valeur absolue naturelle sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{Q}_p$. Notons $F_0 \subset F$ ce sous-corps. (F_0 est dit *sous-corps premier topologique de* F).
3. On appelle *espace de Banach sur* F_0 un espace vectoriel V sur F_0 muni d'une norme et complet pour la topologie induite par cette norme. Montrer que F muni de sa norme est un Banach sur F_0.
4. Conclure quand F est de caractéristique zéro (on pourra se rappeler du théorème de Riesz).
5. On suppose maintenant F de caractéristique $p > 0$. Donc F contient $\mathbb{F}_p$. Soit k la clôture algébrique de $\mathbb{F}_p$ dans F. Montrer que $|x| = 1$ pour tout $x \in k^*$. En déduire que k est discret dans F et fini.
6. On rappelle que la valuation sur F est ultramétrique. Soit k_F le corps résiduel. Montrer que l'application naturelle $k \to k_F$ est un isomorphisme.
7. Montrer que F contient un élément t transcendant sur $\mathbb{F}_p$ tel que $|t| < 1$, puis que F contient un sous-corps $F_0 \simeq \mathbb{F}_p((T))$ et que la valeur absolue de F restreinte à F_0 est équivalente à l'une des valeurs absolues naturelles sur F_0. En déduire que F est une extension finie de F_0 et que la valeur absolue sur F est discrète.
8. D'après la question précédente, F contient un élément s tel que $|s| = \varepsilon$, avec ε le générateur inférieur à 1 de $|F^*|$. Montrer alors que tout élément de F s'écrit de façon unique $x = \sum_{n \geq n_0} a_n s^n$ avec $a_n \in k$. En déduire que F est isomorphe à $k((T))$.