Panorama sur les problèmes de Lehmer

Nicolas Ratazzi

31 mars 2004

Résumé : Cet exposé est un survol concernant les problèmes de Lehmer (multiplicatif, elliptique et abélien) sur les points et les sous-variétés. On commence par rappeler les énoncés "classiques" concernant la minoration de la hauteur canonique des points P (non de torsion) en fonction du degré $[\mathbb{Q}(P):\mathbb{Q}]$. Puis on s'intéresse à deux généralisations naturelles : minoration de la hauteur canonique de toutes les sous-variétés (non de torsion), et minoration de la hauteur canonique des points P (non de torsion) en fonction cette fois-ci de la partie non abélienne du degré, $[\mathbb{Q}^{\mathrm{ab}}(P):\mathbb{Q}^{\mathrm{ab}}]$. On donne également une motivation, concernant des généralisations de l'(ex) conjecture de Manin-Mumford, pour s'intéresser à ce dernier problème.

Table des matières

1 Introduction **2**

2 Quelques rappels **3**
2.1 Degré géométrique 3
2.2 Hauteur sur les points 4
2.3 Hauteur sur les variétés 6

3 Problèmes de Lehmer "classiques" **9**
3.1 Sur $\mathbb{G}_m$ 9
3.2 Sur une courbe elliptique E/K 10
3.3 En dimension supérieure 11

4 Problèmes de Lehmer pour les sous-variétés **12**
4.1 Cas des groupes multiplicatifs $\mathbb{G}_m^n$ 13
4.2 Cas des variétés abéliennes A/K 13

Keywords : elliptic curves, Abelian varieties, canonical height, Lehmer's problem
2000 Mathematics Subject Classification : 11G50, 14G40, 14K12, 14K22
Email address : ratazzi@math.jussieu.fr

5 Problèmes de Lehmer relatif **15**
5.1 Motivations 16
5.2 Résultats 17
5.3 Remarque sur le problème de Lehmer relatif pour les sous-variétés 19

1 Introduction

Soit G le groupe multiplicatif $\mathbb{G}_m^n$ défini sur $K = \mathbb{Q}$ ou une variété abélienne A/K définie sur un corps de nombres K. Pour simplifier on considerera dans toute la suite que $\mathbb{G}_m^n$ est naturellement plongé dans $\mathbb{P}_n$. Si G est une variété abélienne, on la considère donnée avec un fibré en droites (très) ample et symétrique L. On peut construire sur les points de $G(\overline{\mathbb{Q}})$ une hauteur particulièrement agréable (cf. paragraphe 2.2) : la hauteur de Néron-Tate $\widehat{h}_L$. Si $P \in G(\overline{\mathbb{Q}})$ et r un entier relatif, cette hauteur vérifie

$$\widehat{h}_L(rP) = \begin{cases} r^2\widehat{h}_L(P) & \text{si } G \text{ est une variété abélienne,} \\ |r|\widehat{h}_L(P) & \text{si } G = \mathbb{G}_m^n. \end{cases}$$

Dans le cas où $G = \mathbb{G}_m$ il s'agit de la hauteur de Weil (logarithmique absolue) usuelle h. De manière générale cette hauteur est toujours positive et s'annule précisément sur les points de torsion de $G(\overline{\mathbb{Q}})$. On peut facilement voir que le minorant de la hauteur des points qui ne sont pas de torsion doit dépendre du degré D du corps de définition du point dont on minore la hauteur. On va donc avoir une minoration de la forme $\widehat{h}_L(P) \geq \frac{c(G)}{\psi(D)}$ où $D = [K(P) : K]$ et ψ est une fonction croissante. Si l'on ne considère que des points $P \in G(K)$ (autrement dit en considérant $\psi(D)$ comme une constante) et que l'on s'intéresse à la variation de G dans cette minoration, les conjectures de Lang et Silverman nous indiquent que l'on peut prendre $c(G)$ de la forme $c_1(\dim G)\max\{h_{\text{Falt}}(G/K), 1\}$ où c_1 est une constante ne dépendant que de la dimension de G et où h_{Falt} est la hauteur de Faltings de la variété. Le problème de Lehmer quant à lui consiste à fixer G/K (autrement dit à considérer $c(G)$ comme une constante) et à trouver la fonction ψ optimale. C'est à ce dernier problème que l'on s'intéresse dans la suite.

Une généralisation naturelle de ce problème consiste en la minoration non pas de la hauteur d'un point, mais de la hauteur (cf. paragraphe 2.3) d'une sous-variété (non de torsion) de G, en fonction cette fois-ci du degré géométrique de la variété considérée. Un autre type d'extension consiste en l'obtention d'une minoration de la hauteur des points P en fonction de $[K^{\text{ab}}(P) : K^{\text{ab}}]$, où K^{ab} est la clôture abélienne de K, c'est-à -dire ne dépendant que de la partie non-abélienne du degré $[K(P) : K]$. Nous parlerons dans ce cas de problème de Lehmer relatif. On pourrait énoncer une conjecture généralisant ces problèmes. On obtiendrait ainsi un "problème de Lehmer relatif pour les sous-variétés". Ceci dit, l'intérèt paraît assez limité dans le sens où, comme on va l'indiquer au paragraphe 4, "une bonne minoration de la hauteur pour les points entraîne une bonne minoration de la hauteur pour toutes les sous-variétés". Autrement dit on sait [1] ramener les problèmes de Lehmer pour les sous-variétés aux problèmes de Lehmer usuels pour les points.

Ces problèmes de Lehmer ont au moins deux types d'applications : le problème classique peut servir, en conjonction avec une bonne compréhension des points de torsion de $G(\overline{\mathbb{Q}})$, à déterminer si des points $P_1, \ldots, P_m$ de $G(\overline{\mathbb{Q}})$ sont ou non linéairement indépendants. On trouvera une discussion de ce sujet dans l'article [19] de Masser. L'autre application possible est une utilisation du résultat concernant le problème de Lehmer en dimension supérieure et avec le degré non-abélien (au moins dans le cas des variété abéliennes). Il s'agit des problèmes, généralisant l'énoncé de la conjecture de Manin-Mumford (maintenant un théorème de Raynaud [28]), où l'on cherche à montrer que le cardinal de l'intersection d'une courbe avec l'ensemble des sous-groupes algébriques de codimension donnée de G est fini ou au moins de hauteur bornée. Nous reviendrons sur ceci au paragraphe 5.1.

Nous faisons au paragraphe suivant des rappels sur la notion de degré et de hauteur d'une sous-variétés. Ces notions ne seront utiles que pour le paragraphe 4 concernant le problème de Lehmer pour les sous-variétés[1]. Nous rappelons également la notion de hauteur de Néron-Tate pour les points, qui est cruciale dans tous les énoncés du type Lehmer.

2 Quelques rappels

Dans ce paragraphe, on fait des rappels sur les notions de degré géométrique, hauteur sur les points et hauteur sur les variétés. Nous rappelons les définitions ainsi que les propriétés usuelles dont nous nous servirons ensuite.

Soit K un corps. Si F/K est une extension de corps et X un $\operatorname{Spec} K$-schéma, alors, la notation X_F dénote le produit fibré $X \times_{\operatorname{Spec} K} \operatorname{Spec} F$ et $X(F)$, appelé l'ensemble des *points F-rationnels de X*, dénote l'ensemble $\operatorname{Mor}_K(\operatorname{Spec} F, X)$. On fera fréquemment l'abus consistant à écrire F au lieu de $\operatorname{Spec} F$ quand F est un corps ou même un anneau. On dit que V est une *variété algébrique sur K* si V est un K-schéma de type fini, irréductible et géométriquement réduit. Par sous-variété on entendra toujours sous-variété qui est un sous-schéma fermé. On appelle *courbe* toute variété de dimension 1 et on note $\mathbb{P}_n$ l'espace projectif sur K de dimension n.

2.1 Degré géométrique

Dans tout ce paragraphe, K est un corps et X/K une variété propre sur K de dimension n.

On donne une définition du degré géométrique en utilisant la théorie de l'intersection. C'est la méthode la plus intrinsèque. Comment fait-on ? On se donne une variété X sur un corps

[1] sous réserve, comme nous le verrons au paragraphe 4, d'avoir une minoration en terme de l'indice d'obstruction $\delta_L(P)$ plutôt qu'en terme du degré $[K(P) : K]$.

[1] et également pour la définition de l'indice d'obstruction au paragraphe 3.3

K, un fibré en droites (faisceau inversible, diviseur de Cartier) L sur X et une sous-variété V de dimension k de X et on construit un produit d'intersection, noté $\cdot$, sur les diviseurs en suivant le livre de Fulton [12] :

Produit d'intersection sur les diviseurs : soit V une sous-variété de X sur K de dimension k. On note D le diviseur de Cartier associé au faisceau inversible L et on définit le cycle $D \cdot V$ de dimension $k-1$ à support dans $\mid D \mid \cap V$, noté également $D \cdot [V]$, comme suit :

Notons $j : V \hookrightarrow X$ l'inclusion naturelle. Deux cas se présentent :

- Si $V \subsetneq \mid D \mid$, alors D se restreint en un diviseur de Cartier, j^*D sur V et on pose

$$D \cdot [V] = [j^*D].$$

- Si $V \subseteq \mid D \mid$, on prend l'image réciproque faisceautique de D, *i.e.*, $j^*\mathcal{O}_X(D)$. On obtient ainsi un faisceau inversible sur V. À ce faisceau correspond un diviseur de Cartier, C tel que $\mathcal{O}_V(C) = j^*\mathcal{O}_X(D)$. On note $[C]$ sa classe de diviseur de Weil dans $\mathrm{A}_{k-1}(V)$ et on pose

$$D \cdot [V] = [C].$$

Par linéarité, on en déduit un produit d'intersection entre les diviseurs de Cartier et les cycles de dimension quelconque de X. On peut maintenant définir le degré d'un cycle (et donc d'une sous-variété).

Définition 1 Soit $\alpha = \sum n_P[P]$ un 0-cycle sur X, les n_P étant des entiers relatifs tous nuls sauf un nombre fini. On définit le *degré* du 0-cycle α comme étant :

$$\deg \alpha = \sum n_P[K(P) : K].$$

On peut maintenant définir le *degré relativement à* L d'une sous-variété V de X : en appliquant k fois l'opération "prendre le produit d'intersection avec D", on obtient un cycle de dimension zéro, $\sum n_P[P]$. On pose alors

$$\deg_L V = \sum n_P[K(P) : K].$$

Exemple 1 Si $x \in X(\overline{K})$ est un point $\overline{K}$-rationnel de X, en notant $V := \overline{\{x\}}$ la variété définie en prenant l'image schématique de $x \in X_{\overline{K}}$ dans X, on a :

$$\deg_L(V) = [K(x) : K].$$

2.2 Hauteur sur les points

2.2.1 Hauteur sur $\mathbb{P}^n(\overline{\mathbb{Q}})$

Soient K un corps de nombres de degré d et M_K l'ensemble des valeurs absolues (deux à deux non équivalentes) sur K, normalisées comme précédemment par $|p|_v = p^{-1}$ pour toute place finie v au dessus du nombre premier p. On note $d_v = [K_v : \mathbb{Q}_p]$ le degré local. De même si v est une place archimédienne, on prend pour valeur absolue la valeur absolue usuelle et on pose $d_v = 1$ si $K_v = \mathbb{R}$ et $d_v = 2$ si $K_v = \mathbb{C}$. On définit maintenant la *hauteur (logarithmique absolue)* sur $\mathbb{P}^n(\overline{\mathbb{Q}})$ par

$$h(x_0 : \ldots : x_n) = \frac{1}{d} \sum_{v \in M_K} d_v \log \max_{0 \le i \le n} |x_i|_v.$$

On voit sur la définition que la hauteur d'un point est toujours positive ou nulle. Dans cette définition, la renormalisation par $\frac{1}{d}$ sert juste à faire en sorte que le réel $h(x)$ soit indépendant du choix du corps K contenant x. De plus par la formule du produit, la hauteur est aussi indépendante du choix d'un système de coordonnées projectives.

Si $x \in \mathbb{G}_m^n(\overline{\mathbb{Q}}) \hookrightarrow \mathbb{P}^n(\overline{\mathbb{Q}})$, on définit la hauteur sur le groupe $\mathbb{G}_m^n(\overline{\mathbb{Q}})$ par $h(x) := h(1 : x)$.

Proposition 1 *Soient $r \in \mathbb{Z}$, $\sigma \in \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ et $x \in \mathbb{P}^n(\overline{\mathbb{Q}})$. On a*

$$h(x^r) = \mid r \mid h(x), \quad \text{et}, \quad h(\sigma(x)) = h(x).$$

Cette hauteur vérifie les théorèmes de Northcott et de Kronecker :

Théorème 1 (Northcott) *Soient A et B deux réels. L'ensemble*

$$\left\{ x \in \mathbb{P}^n(\overline{\mathbb{Q}}) \ / \ [\mathbb{Q}(x) : \mathbb{Q}] \le A, \quad h(x) \le B \ \right\}$$

est fini.

Théorème 2 (Kronecker) *Soient $x \in \mathbb{G}_m^n(\overline{\mathbb{Q}})$. On a, $h(x) = 0 \iff x \in (\mathbb{G}_m^n)_{\mathrm{tors}}$.*

2.2.2 Hauteur de Néron-Tate sur les variétés abéliennes

Définition 2 Soient X/K une variété projective et L un fibré très ample sur X. En notant φ_L le plongement de X dans un espace projectif $\mathbb{P}^n$ associé à L (c'est-à-dire tel que $L = \varphi_L^* \mathcal{O}(1)$), on définit la *hauteur* $h_L \ : \ X(\overline{K}) \to \mathbb{R}^+$ par $h_L(P) := h(\varphi_L(P))$, où $h(x_0 : \ldots : x_n)$ est la hauteur logarithmique absolue sur $\mathbb{P}^n(\overline{K})$ définie précédemment.

Dans le cas où $X = A$ est une variété abélienne et où L est de plus symétrique, cette hauteur vérifie un certain nombre de propriétés agréables. Nous indiquons les plus essentielles, qui nous serviront dans la suite. On renvoie par exemple au livre de Hindry et Silverman [15] Part B pour tout ce qui concerne les hauteurs.

Proposition 2 *Sur une variété abélienne A/K munie d'un fibré en droites L très ample et symétrique, la hauteur h_L vérifie :*
1. $\forall P \in A(\overline{K}) \qquad h_L([m]P) = m^2 h_L(P) + O(1).$
2. $\forall P, Q \in A(\overline{K}) \qquad h_L(P+Q) + h_L(P-Q) = 2h_L(P) + 2h_L(Q) + O(1).$
3. $\forall h > 0 \ \ \forall d > 0$ l'ensemble $\{P \in A(\overline{K}) / \ h_L(P) \le h, \ \ \deg(P) \le d\}$ est fini.
Dans les affirmations précédentes, la constante $O(1)$ dépend de A, L et m, mais pas des points P et Q.

Toujours dans le cas des variétés abéliennes, on peut à partir de cette hauteur en construire une plus jolie : la *hauteur de Néron-Tate* (ou *hauteur canonique*), notée $\widehat{h}_L$. La définition est la suivante :

$$\widehat{h}_L(P) = \lim_{n\to+\infty} \frac{h_L([2^n]P)}{4^n}.$$

Les propriétés classiques de cette hauteur sont résumées dans le théorème suivant.

Théorème 3 (Néron-Tate) *Soient A/K une variété abélienne et L un fibré ample et symétrique sur A. La hauteur canonique est une forme quadratique positive semi-définie sur $A(\overline{K})$, telle que*

1. $\forall P \in A(\overline{K}) \quad \widehat{h}_L(P) = h_L(P) + O(1)$

2. $\widehat{h}_L(P) = 0 \iff P \in A_{\mathrm{tors}}$.

2.3 Hauteur sur les variétés

Il y a essentiellement deux approches de la notion de hauteur d'une variété, toutes deux consistant en une généralisation de la notion de hauteur d'un point. On a d'une part l'approche de Philippon (cf. [20], [21], [22]) qui est historiquement la première, consistant à se ramener au cas d'une sous-variété d'un $\mathbb{P}^n$, puis dans ce cas, à donner une définition élémentaire. D'autre part, il y a l'approche de Bost, Gillet et Soulé [9] fondée sur les travaux de Gillet et Soulé [13] [14], consistant à travailler en parfaite analogie avec le degré en construisant un produit d'intersection arithmétique, puis en voyant la hauteur comme un degré arithmétique (ou degré d'Arakelov). Un théorème de Soulé (th.3 p.366 de [32]) indique que ces deux notions de hauteurs coïncident, à condition de prendre les bonnes conventions pour les places à l'infini dans la définition de Philippon, *i.e.*, en prenant la définition de hauteur qu'il donne dans [22] paragraphe 2. On donne ici la construction issue de Bost-Gillet-Soulé. Contrairement au cas géométrique où la construction du produit d'intersection sur les diviseurs n'est pas dure, dans le cas arithmétique c'est difficile. On ne va donc pas définir le produit d'intersection arithmétique (même sur les diviseurs). Par contre, on peut donner une définition auto-contenue, suivant [9] proposition 3.2.1., de la hauteur en utilisant une construction par récurrence. C'est ce que l'on fait dans ce qui suit.

2.3.1 Hauteurs

Le corps K est toujours un corps de nombres, d'anneau d'entiers $\mathcal{O}_K$. On note $S = \operatorname{Spec} \mathcal{O}_K$ le schéma affine associé. Si X/S est un S-schéma de fibre générique une K-variété, on notera $X(\mathbb{C})$ la variété analytique complexe réunion disjointes des variétés $X_\sigma(\mathbb{C})$ où $X_\sigma(\mathbb{C})$ est la variété (analytique complexe) des points complexes de la variété (algébrique complexe) X_σ déduite de X par extension des scalaires de $\mathcal{O}_K$ à K, puis de K à $\mathbb{C}$ selon le morphisme σ, les σ décrivant l'ensemble des plongements de K dans $\mathbb{C}$.

Définition 3 On dit que X est une *variété arithmétique* sur S si c'est un S-schéma projectif (en fait on pourrait ce contenter de quasi-projectif) et plat, tel que sa fibre générique X_K soit une K-variété lisse.

Exemple 2 Un schéma abélien, le modèle de Weierstrass d'une courbe elliptique, sont des exemples de variétés arithmétiques.

Définition 4 On dit que $\overline{L} = (L, h)$ est un *fibré en droites hermitien* si L est un fibré en droites sur X et h une métrique hermitienne C^∞ stable par conjugaison complexe sur le fibré en droites holomorphe $L_{\mathbb{C}}$ canoniquement associé à L sur $X(\mathbb{C})$.

Définition 5 Soient X une variété arithmétique sur S, $\overline{L}$ un fibré en droites hermitien sur X et Y un sous-schéma fermé irréductible. On va définir par récurrence sur la dimension de Y, un nombre réel $h_{\overline{L}}(Y)$ appelé *hauteur de Y relativement à $\overline{L}$* :

- si Y est vertical, *i.e.*, s'il est contenu dans une fibre spéciale de X au dessus d'un idéal premier $\mathfrak{p}$, alors on pose

$$h_{\overline{L}}(Y) = \frac{1}{[K:\mathbb{Q}]} \deg_{L_{\mathbb{F}_\mathfrak{p}}}(Y) \log\left(N_{\mathbb{Q}}^K \mathfrak{p}\right),$$

  où $\deg_{L_{\mathbb{F}_\mathfrak{p}}}$ dénote le degré géométrique usuel au dessus de $\mathbb{F}_\mathfrak{p}$ défini au début de ce chapitre.
- si s est une section rationnelle de L dans Y de diviseur $\mathrm{div}(s) = \sum n_\alpha Z_\alpha$, on pose

$$h_{\overline{L}}(Y) = \sum_\alpha n_\alpha h_{\overline{L}}(Z_\alpha) - \frac{1}{[K:\mathbb{Q}]} \int_{Y(\mathbb{C})_{\text{lisse}}} \log \| s \| \, c_1(\overline{L_{\mathbb{C}}})^{\dim Y(\mathbb{C})}.$$

  Il reste à définir $c_1(\overline{L})$ quand L est un fibré en droites hermitien holomorphe sur une variété analytique complexe X. On note ∂ et $\overline{\partial}$ les opérateurs différentiels usuels (∂ envoie les (p,q)-formes différentielles sur les $(p+1,q)$-formes et $\overline{\partial}$ envoie les (p,q)-formes sur les $(p,q+1)$-formes). Soit maintenant s une section rationnelle de L dans X, on définit $c_1(\overline{L})$ par

$$c_1(\overline{L}) = \frac{1}{2i\pi} \partial\overline{\partial} \log \| s \|^2 .$$

Définition 6 Soient L un fibré en droites hermitien sur la variété arithmétique X et V/K une sous-variété de la fibre générique X_K de X. On définit la *hauteur de V relativement à L*, comme étant la hauteur de l'image schématique[1] $\mathcal{V}$ de V dans X.

Il nous reste maintenant à définir la hauteur d'une variété projective, sans supposer connu aucun modèle : on suppose donc donnée V une K-variété projective sur un corps de nombres. Par définition il existe un fibré en droites très ample L sur V définissant un

[1] le plus petit sous-schéma fermé de X contenant $p(V)$. Son espace topologique sous-jacent coïncide avec l'adhérence topologique de $p(V)$.

plongement $\varphi_L : V \hookrightarrow \mathbb{P}^n_K$ dans un espace projectif. L'espace projectif $\mathbb{P}^n_K$ a un modèle naturel sur S, $\mathbb{P}^n_S$, qui est une variété arithmétique naturellement munie d'un fibré en droites hermitien, le fibré $\mathcal{O}(1)$ muni de la métrique de Fubini-Study définie comme suit : pour toute section $s \in H^0\left(\mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}, \mathcal{O}(1)\right)$ (assimilable à l'espace des polynômes homogènes de degré 1 en $X_0, \ldots, X_n$), on a

$$|| \, s \, || \, (x_0 : \ldots : x_n) = \frac{1}{2} \frac{| \, s(x_0 : \ldots : x_n) \, |}{\sqrt{x_0^2 + \cdots + x_n^2}}.$$

Ceci nous permet de définir la hauteur de V :

Définition 7 Avec les notations précédentes, on appelle *hauteur de* V relativement à L et on note $h_L(V)$ le réel

$$h_L(V) = h_{\overline{\mathcal{O}(1)}}\left(\overline{\varphi_L(V)}\right),$$

où $\overline{\varphi_L(V)}$ est l'image schématique dans $\mathbb{P}^n_S$ de $\varphi_L(V)$.

Exemple 3 Si $x \in \mathbb{P}^n(\overline{\mathbb{Q}})$, en notant $V = \overline{\{x\}}$ l'image schématique de x dans $\mathbb{P}^n$ et en posant $L = \mathcal{O}(1)$, on a

$$\frac{h_L(V)}{\deg_L V} = h_2(x),$$

où h_2 la hauteur sur les points de $\mathbb{P}^n(\overline{\mathbb{Q}})$ définie en utilisant la norme $\mathbf{L}^2$ aux places archimédiennes plutôt que la norme $\mathbf{L}^\infty$ comme au paragraphe 2.2.1.

2.3.2 Hauteur de Néron-Tate

Partant d'une variété abélienne sur un corps de nombres K et d'un fibré en droites ample symétrique L, on peut fabriquer une hauteur sur les sous-variétés de A/K. De même que pour les points, on peut en dimension supérieure, fabriquer à partir de ces données une hauteur plus belle : la hauteur normalisée, ou hauteur canonique (encore appelée hauteur de Néron-Tate). Celle-ci à d'abord été construite par Philippon [22] en se basant sur sa propre construction des hauteurs des sous-variétés. Dans ses travaux sur la conjecture de Bogomolov [35], Zhang a montré comment, en utilisant les techniques arakeloviennes, fabriquer cette hauteur canonique en utilisant un procédé de limite dans l'esprit de celui utilisé par Tate pour fabriquer la hauteur canonique des points. On peut ainsi voir cette hauteur canonique comme une limite de hauteurs arakeloviennes.

On se donne une variété abélienne A/K, une sous-variété V de A et un fibré en droites symétrique ample L sur A. On se donne alors un modèle $\mathcal{A}/S$ propre et plat, l'image schématique $\mathcal{V}$ de V dans $\mathcal{A}$, un faisceau inversible ample $\mathcal{L}$ sur $\mathcal{A}$ étendant L et pour chaque place σ, une métrique hermitienne (à courbure positive) sur L_σ. On a alors le théorème suivant :

Théorème 4 (Zhang [35]) *la suite $\frac{1}{4^n} h_{\mathcal{L}}\left([2^n]_* \mathcal{V}\right)$ converge uniformément vers une limite finie appelée hauteur normalisée de V et notée $\widehat{h}_L(V)$. Cette limite ne dépend pas des choix* *de $\mathcal{A}$, $\mathcal{L}$ ni des métriques choisies. Elle coïncide avec la hauteur de Néron-Tate usuelle sur les points de $A(K)$.*

Exemple 4 Si $x \in A(\overline{K})$ et $V = \overline{\{x\}}$ est l'image schématique de x dans A, on a

$$\frac{\widehat{h}_L(V)}{\deg_L V} = \widehat{h}_L(x),$$

où $\widehat{h}_L(x)$ est la hauteur de Néron-Tate usuelle sur les points $\overline{K}$-rationnels de A.

3 Problèmes de Lehmer "classiques"

3.1 Sur $\mathbb{G}_m$

Soient x un nombre algébrique et $h(x)$ sa hauteur logarithmique absolue définie précédemment. Le problème classique de Lehmer est le suivant :

Conjecture 1 (Problème de Lehmer) *Il existe une constante $c > 0$ telle que pour tout nombre algébrique qui n'est pas une racine de l'unité, on a*

$$h(x) \geq \frac{c}{[\mathbb{Q}(x) : \mathbb{Q}]}.$$

En fait dans son article [17] de 1933, Lehmer ne formule pas une conjecture mais pose juste une question. Il pose même plus exactement la question inverse et il ajoute "whether this is true or not, I do not know".

La conjecture est trivialement vraie si l'on se restreint au sous-ensemble des nombres algébriques qui ne sont pas des entiers algébriques. Dans ce cas on peut même prendre $c = \log 2$. En 1971, Smyth [31] montre que la conjecture formulée précédemment est vraie pour le sous-ensemble de $\overline{\mathbb{Q}}$ constitué des nombres non-réciproques[1]. C'est à ce moment-là qu'apparaît la version indiquée du problème de Lehmer. En 1979, Dobrowolski [11] obtient, au choix de la constante c près, le meilleur résultat général en direction de la conjecture connu à ce jour. Si x est un nombre algébrique, on note $D = \deg(x) = [\mathbb{Q}(x) : \mathbb{Q}]$.

Théorème 5 (Dobrowolski) *Il existe une constante $c > 0$ telle que pour tout nombre algébrique qui n'est pas une racine de l'unité, on a*

$$h(x) \geq \frac{c}{D}\left(\frac{\log\log 3D}{\log 2D}\right)^3.$$

[1]les nombres réciproques étant les nombres racines d'un polynôme P vérifiant $P(X) = X^{\deg P}P(\frac{1}{X})$.

Dans son article, Dobrowolski montre même que l'on peut prendre $c = \frac{1}{1200}$. Depuis, Voutier [34], en utilisant les déterminants d'interpolation, a montré que dans l'énoncé précédent, le choix $c = \frac{1}{4}$ convient déja.

La preuve de Dobrowolski est une preuve typique de transcendance. On suppose par l'absurde le résultat faux, ce qui nous donne un x de grand degré D et de petite hauteur. On construit alors, en utilisant un lemme de Siegel, un polynôme P à coefficients entiers qui s'annule avec un grand ordre en x. L'idée nouvelle de Dobrowolski consiste à faire une extrapolation aux places ultramétriques : en utilisant le petit théorème de Fermat, on montre que le polynôme P s'annule modulo p premier en x^p. Utilisant l'hypothèse de petite hauteur sur x et l'inégalité de Liouville (ou la formule du produit) on montre alors que P s'annule en un grand nombre de x^p (tout ceci étant convenablement quantifié en fonction de D). Un lemme de zéros (trivial dans ce cas : il suffit de compter les zéros du polynôme et de comparer à son degré) permet alors de conclure. On peut trouver dans [27] une réécriture de cette preuve utilisant la notion de degré arithmétique et notamment l'inégalité des pentes introduite pour la première fois par Bost dans [8].

3.2 Sur une courbe elliptique E/K

En 1981, Laurent [16] étend le problème de Lehmer aux courbes elliptiques et étend le résultat aini que la preuve de Dobrowolski au cas des courbes elliptiques à multiplication complexe. On note $\widehat{h}(\cdot)$ la hauteur de Néron-Tate sur la courbe elliptique $E(\overline{K})$.

Conjecture 2 (Problème de Lehmer elliptique) *Soit E/K une courbe elliptique sur un corps de nombres K. Il existe une constante strictement positive $c(E/K)$ telle que pour tout point $P \in E(\overline{K})\backslash E_{\mathrm{tors}}$, on a*

$$\widehat{h}(P) \geq \frac{c(E/K)}{[K(P):K]}.$$

Pour pouvoir adapter l'idée de Dobrowolski, à savoir pour pouvoir extrapoler aux places p-adiques en utilisant le petit théorème de Fermat, il faut que les endomorphismes de Frobenius en caractéristique p se relèvent pour beaucoup de premiers en un endomorphisme de la courbe elliptique E/K. C'est pour assurer ceci que l'hypothèse de multiplication complexe apparaît dans le théorème suivant (ainsi que dans le théorème de David et Hindry sur les variétés abéliennes).

Théorème 6 (Laurent) *Soit E/K une courbe elliptique à multiplication complexe sur un corps de nombres K. Il existe une constante strictement positive $c(E/K)$ telle que pour tout point $P \in E(\overline{K})\backslash E_{\mathrm{tors}}$ de degré $D = [K(P):K]$, on a*

$$\widehat{h}(P) \geq \frac{c(E/K)}{D}\left(\frac{\log\log 3D}{\log 2D}\right)^3.$$

3.3 En dimension supérieure

En 1999-2000, David et Hindry [10] puis Amoroso et David [1] ont généralisé ces résultats en dimension supérieure : sur les variétés abéliennes pour David et Hindry et sur $\mathbb{G}_m^n$ pour Amoroso et David. Dans ce paragraphe et dans toute la suite, lorsque l'on parle du degré d'une sous-variété de $\mathbb{G}_m^n$ on regarde en fait le degré de la sous-variété image dans la compactification $\mathbb{P}_n$ de $\mathbb{G}_m^n$. Ceci étant dit, les auteurs de [10] et [1] utilisent en fait, pour énoncer les généralisations en dimension supérieure des problèmes de Lehmer classique et elliptique, un invariant plus naturel pour le problème de Lehmer en dimension supérieure que le degré : *l'indice d'obstruction*

$$\delta_L(x) = \min \left\{ \deg_L V^{\frac{1}{\mathrm{codim} V}} \ / \ V \text{sous-variété sur } K \text{ de } G, \text{ telle que } x \in V(\overline{K}) \right\}$$

où G est la variété abélienne A/K ou le tore $\mathbb{G}_m^n$ selon le cas.

Remarque 1 En prenant $V = \overline{\{x\}}$ l'adhérence schématique de x dans G (*i.e.*, en considérant toute l'orbite de x sous l'action du groupe de Galois $\mathrm{Gal}(\overline{K}/K)$), on voit que

$$1 \leq \delta_L(x) \leq [K(x) : K]^{\frac{1}{\dim G}}.$$

Conjecture 3 (Problème de Lehmer en dimension supérieure) *Il existe une constante $c(n) > 0$ telle que pour tout point $P \in \mathbb{G}_m^n(\overline{\mathbb{Q}})$ à coordonnées multiplicativement indépendantes, on a*

$$\widehat{h}_L(P) \geq \frac{c(n)}{\delta_L(P)}.$$

Dans la direction de cette conjecture, Amoroso et David montrent l'analogue du résultat de Dobrowolski.

Théorème 7 (Amoroso-David) *Il existe une constante $c(n) > 0$ telle que pour tout point $P \in \mathbb{G}_m^n(\overline{\mathbb{Q}})$ à coordonnées multiplicativement indépendantes, on a*

$$\widehat{h}_L(P) \geq \frac{c(n)}{\delta_L(P)} \left(\log 2\delta_L(P)\right)^{-\kappa(n)},$$

où $\kappa(n) = 2n((n+1)!)^n - 1$.

Notons qu'en corollaire de ce théorème, les auteurs montrent, en utilisant un argument "kummerien", que le problème de Lehmer restreint aux nombres algébriques x tel que $\mathbb{Q}(x)/\mathbb{Q}$ est galoisien, est vrai.

Dans le cas abélien, en notant $\widehat{h}_L(\cdot)$ la hauteur de Néron-Tate associée à un fibré en droites symétrique ample L, on a

Conjecture 4 (Problème de Lehmer abélien) *Soient A/K une variété abélienne de dimension g sur un corps de nombres et L un fibré en droites ample et symétrique sur A. Il existe une constante $c(A/K,L)$ strictement positive telle que pour tout point $P \in A(\overline{K})$ d'ordre infini modulo toute sous-variété abélienne stricte de A, on a*

$$\widehat{h}_L(P) \geq \frac{c(A/K,L)}{\delta_L(P)}. \tag{1}$$

De plus, en terme du degré $D = [K(P):K]$, on a pour tout point $P \in A(\overline{K})$ qui n'est pas de torsion

$$\widehat{h}_L(P) \geq \frac{c(A/K,L)}{D^{\frac{1}{g_0}}}, \tag{2}$$

où g_0 est la dimension du plus petit sous-groupe algébrique contenant le point P.

Dans la direction de cette conjecture, David et Hindry obtiennent le

Théorème 8 (David-Hindry) *Soient A/K une variété abélienne de dimension g, de type C.M. sur un corps de nombres et L un fibré en droites ample et symétrique. Il existe une constante $c(A/K,L) > 0$ telle que pour tout point $P \in A(\overline{K})$ d'ordre infini modulo toute sous-variété abélienne, on a*

$$\widehat{h}_L(P) \geq \frac{c(A/K,L)}{D^{\frac{1}{g}}} (\log 2D)^{-\kappa(g)},$$

où $D = [K(P):K]$ et $\kappa(g) = (2g(g+1)!)^{g+2}$.

En fait ils remarquent que leur preuve donne même le théorème où l'on remplace $D^{\frac{1}{g}}$ par $\delta_L(P)$ et $\log 2D$ par $\log 2\delta_L(P)$, résultat plus proche de la partie (1) de leur conjecture. Par ailleurs, nous montrons dans [23] que ce théorème entraîne automatiquement la même minoration pour tous les points d'ordre infini de $A(\overline{K})$, en remplaçant l'exposant g par l'exposant g_0, dimension du plus petit sous-groupe algébrique contenant P. En particulier, cette remarque montre que la première partie de la conjecture 4 implique la seconde. De plus, cette remarque permet d'améliorer, dans le cas des variétés abéliennes de type C.M., le meilleur résultat précédemment connu, dû à Masser qui obtenait dans [18], pour tout point P d'ordre infini de $A(\overline{K})$:

$$\widehat{h}_L(P) \geq \frac{c(A/K,L)}{D^2 \log 2D}.$$

4 Problèmes de Lehmer pour les sous-variétés

Une généralisation naturelle des énoncés précédents est la suivante : minorer la hauteur des sous-variétés non de torsion de G ($G = A$ ou $G = \mathbb{G}_m^n$). Dans les cas multiplicatif et abélien, David et Philippon ont formulé les conjectures généralisant au cas des sous-variétés les énoncés du type Lehmer. Nous donnons ici des énoncés faisant intervenir le degré plutôt que l'indice d'obstruction. On pourrait également formuler des conjectures généralisant totalement les énoncés précédents en utilisant l'indice d'obstruction d'une sous-variété.

4.1 Cas des groupes multiplicatifs $\mathbb{G}_m^n$

Conjecture 5 (David-Philippon) *Soit n un entier non nul. Il existe une constante $c(n) > 0$ telle que pour toute sous-variété V stricte de $\mathbb{G}_m^n$, $\mathbb{Q}$-irréductible et telle que $V_{\overline{\mathbb{Q}}}$ n'est pas réunion de sous-variétés de torsion, on a l'inégalité*

$$\frac{\widehat{h}_L(V)}{\deg_L V} \geq c(n)(\deg_L V)^{-\frac{1}{s-\dim V}},$$

où s est la dimension du plus petit sous-groupe algébrique contenant V.

Dans le cas multiplicatif, Amoroso et David montrent (sans toutefois l'écrire explicitement) dans [3] que la conjecture 3 entraîne la conjecture 5 et, en utilisant leur résultat sur le problème de Lehmer en dimension supérieure, il obtiennent en direction de la conjecture 5 le résultat suivant :

Théorème 9 (Amoroso-David) *Soit n un entier non nul. Il existe une constante strictement positive $c(n)$ telle que pour toute sous-variété V stricte de $\mathbb{G}_m^n$, $\mathbb{Q}$-irréductible et telle que $V_{\overline{\mathbb{Q}}}$ n'est pas réunion de sous-variétés de torsion, on a l'inégalité*

$$\frac{\widehat{h}_L(V)}{\deg_L V} \geq c(n)(\deg_L V)^{-\frac{1}{s-\dim V}} (\log 2 \deg_L V)^{-\kappa(n)},$$

où $\kappa(n) = 2n((n+1)!)^n - 1$ et s est la dimension du plus petit sous-groupe algébrique contenant V.

4.2 Cas des variétés abéliennes A/K

On peut également formuler l'analogue abélien de la conjecture précédente.

Conjecture 6 (David-Philippon) *Soient A/K une variété abélienne sur un corps de nombres K et L un fibré en droites ample et symétrique. Il existe une constante strictement positive $c(A/K, L)$ telle que pour toute sous-variété V stricte de A sur K, K-irréductible et telle que $V_{\overline{K}}$ n'est pas réunion de sous-variétés de torsion, on a l'inégalité*

$$\frac{\widehat{h}_L(V)}{\deg_L(V)} \geq c(A/K, L) \deg_L(V)^{-\frac{1}{s-\dim V}},$$

où s est la dimension du plus petit sous-groupe algébrique contenant V.

En reprenant les idées de la preuve du théorème 9, nous montrons dans [24] (corollaire 2) l'analogue pour les variétés abéliennes de type C.M. du théorème 9.

Théorème 10 *Soient A/K une variété abélienne de type C.M. sur K et L un fibré en droites ample et symétrique sur A. Il existe une constante strictement positive $c(A/K, L)$ telle que si V est une sous-variété algébrique stricte de A sur K, K-irréductible et telle que $V_{\overline{K}}$ n'est pas réunion de sous-variétés de torsion, on a l'inégalité*

$$\frac{\widehat{h}_L(V)}{\deg_L(V)} \geq c(A/K, L) \deg_L(V)^{-\frac{1}{s-\dim V}} \left(\log(3 \deg_L(V))\right)^{-\kappa(s)},$$

où s est la dimension du plus petit sous-groupe algébrique contenant V et où $\kappa(s) = (2s(s+1)!)^{s+2}$.

Notons qu'en appliquant ce résultat à la variété $V = \overline{\{x\}}$, adhérence schématique d'un point x d'ordre infini de $A(\overline{K})$, nous retrouvons immédiatement en corollaire ce que l'on disait à la suite de l'énoncé du théorème 8 :

Corollaire 1 *Soient A/K une variété abélienne de type C.M. de dimension g sur un corps de nombres et L un fibré en droites ample et symétrique sur A. Il existe une constante $c(A/K, L)$ strictement positive telle que pour tout point $P \in A(\overline{K})$ d'ordre infini qui n'est pas de torsion*

$$\widehat{h}_L(P) \geq \frac{c(A/K, L)}{D^{\frac{1}{g_0}}} (\log D)^{-\kappa(g_0)}, \tag{3}$$

où $D = [K(P) : K]$ et g_0 est la dimension du plus petit sous-groupe algébrique contenant le point P et $\kappa(g_0) = (2g_0(g_0+1)!)^{g_0+2}$.

En fait, nous montrons que toute bonne minoration *(i.e.*, utilisant l'indice d'obstruction) de la hauteur de Néron-Tate des points d'ordre infini modulo toute sous-variété abélienne stricte de A, entraîne une minoration analogue pour toutes les sous-variétés non de torsion de A. On renvoie à la remarque 5 de [24] pour plus de détails. La preuve de ce théorème se fait en utilisant des arguments de géométrie (et d'arithmétique) sur les variétés abéliennes. Il n'y a pas ici d'argument d'approximation diophantienne. C'est pour pouvoir appliquer le théorème 8 (en l'appliquant avec l'indice d'obstruction il est expliqué dans la remarque qui suit ce théorème) que l'on est conduit à supposer la variété abélienne de type C.M. En particulier, nous montrons :

Théorème 11 *La conjecture 4 de David-Hindry implique la conjecture 6 de David-Philippon.*

Enfin, nous montrons dans [25] qui est l'analogue abélien de [2] (mais dont la preuve est plutôt une relecture de l'article [10]), un résultat sensiblement plus fin en direction de la conjecture 6 : on peut prendre pour κ une valeur absolue, indépendante de g. En notant $\delta_{i,j}$ le symbole de Kronecker (valant 1 si $i = j$ et 0 sinon), nous démontrons le résultat suivant :

Théorème 12 *Soient A/K une variété abélienne de type C.M. et L un fibré en droites ample et symétrique sur A. Il existe une constante $c(A/K, L)$ strictement positive telle que si V est une hypersurface irréductible de A sur K telle que $V_{\overline{K}}$ n'est pas réunion de sous-variétés de torsion, on a l'inégalité*

$$\widehat{h}_L(V) \geq c(A/K, L)\frac{(\log\log 3\deg_L V)^{1+2\delta_{g-s,1}}}{(\log 2\deg_L V)^{2+\delta_{g-s,1}}},$$

où s est la dimension du stabilisateur de V.

La preuve de ce résultat se fait cette fois-ci en utilisant la machinerie classique de transcendance. Au lieu d'appliquer brutalement le résultat principal de [10], nous reprenons leur démonstration (dont le schéma est calqué sur celui de Dobrowolski) et nous l'adaptons au cadre qui nous intéresse.

En supposant que A/K est une courbe elliptique, L le fibré en droites associé au diviseur $3(0)$ et $V = \overline{\{P\}}$ l'image schématique d'un point d'ordre infini $P \in A(\overline{K})$ défini sur une extension finie de degré $D = [K(P) : K]$, nous retrouvons exactement le théorème 6 de Laurent sur le problème de Lehmer elliptique. Dans le cas d'une "vraie" hypersurface, *i.e.*, quand $\delta_{g-s,1} = 0$, nous obtenons une minoration un peu meilleure.

Finalement la conclusion à retenir de ce paragraphe est que, au vu des articles [3] et [24], le seul réel problème, est le problème de Lehmer pour les points, le problème pour les sous-variétés de dimension supérieure en étant une conséquence.

5 Problèmes de Lehmer relatif

Nous avons vu au paragraphe précédent que les problèmes de Lehmer se ramènent au problème de la minoration de la hauteur des points dans $\mathbb{G}_m^n$ ou dans une variété abélienne. Énoncé sous sa forme simple, le problème de Lehmer consiste à obtenir une minoration en terme du degré $[K(P) : K]$. Il semble en fait que l'on puisse proposer un énoncé plus fin, faisant intervenir non-pas le degré $D := [K(P : K]$ mais plutôt le degré $D_{\mathrm{tors}} := [K_{\mathrm{tors}}(P) : K_{\mathrm{tors}})]$ où $K_{\mathrm{tors}} = K(G_{\mathrm{tors}})$ et où G est le groupe multiplicatif ou la variété abélienne. Dans le cas du groupe multiplicatif ou d'une variété abélienne de type C.M. (et quitte à faire une extension de degré bornée en fonction de A[1]), on a $D_{\mathrm{tors}} = [K^{\mathrm{ab}}(P) : K^{\mathrm{ab}}]$ où K^{ab} est la clôture abélienne de K. Dans ce cas on peut voir D_{tors} comme la "partie non-abélienne de D" et on le note plutôt D_{ab}. Avant de donner les résultats en direction de ce *problème de Lehmer relatif*, énonçons la conjecture précise et donnons les motivations. On donne l'énoncé dans le cas des variétés abéliennes, le même énoncé valant aussi pour $\mathbb{G}_m^n$ avec les modifications évidentes. On définit *l'indice d'obstruction de torsion* :

[1]Par exemple dans le cas d'une courbe elliptique à multiplication complexe, il suffit de remplacer K par son corps de classe de Hilbert.

$$\delta_L^{\mathrm{tors}}(P) = \min\left\{ \deg_{L^{\mathrm{tors}}} V^{\frac{1}{\mathrm{codim} V}} \ / \ V \text{sous-variété sur } K_{\mathrm{tors}} \text{ de } A_{K_{\mathrm{tors}}}, \text{ avec } P \in V(\overline{K}) \right\}.$$

Conjecture 7 (David, forme forte) (Problème de Lehmer relatif) *Soient A/K une variété abélienne sur un corps de nombres et L un fibré en droites ample et symétrique sur A. Il existe une constante strictement positive $c(A/K, L)$ telle que pour tout point $P \in A(\overline{K})$ qui est d'ordre infini modulo toute sous-variété abélienne stricte de A, on a*

$$\widehat{h}_L(P) \geq \frac{c(A/K, L)}{\delta_L^{\mathrm{tors}}(P)}.$$

Comme dans le cas classique, et pour la même raison, on a l'encadrement

$$1 \leq \delta_L^{\mathrm{tors}}(P) \leq [K_{\mathrm{tors}}(P) : K_{\mathrm{tors}}]^{\frac{1}{\dim A}}.$$

Par ailleurs on énonce une forme affaiblie de cette conjecture qui suffit pour les aplications (externes aux problémes de Lehmer) et paraît nettement plus accessible, au vu des résultats du type Dobrowolski-Laurent-Amoroso-David-Hindry dans le cas classique :

Conjecture 8 (David, forme faible) *Soient A/K une variété abélienne sur un corps de nombres et L un fibré en droites ample et symétrique sur A. Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une constante strictement positive $c(A/K, L, \varepsilon)$ telle que pour tout point $P \in A(\overline{K})$ qui est d'ordre infini modulo toute sous-variété abélienne stricte de A, on a*

$$\widehat{h}_L(P) \geq \frac{c(A/K, L, \varepsilon)}{D_{\mathrm{tors}}^{\frac{1}{g}+\varepsilon}}.$$

5.1 Motivations

On indique ici un des intérèts d'un tel résultat (conjecture 8). Pour expliquer cela, on introduit quelques notations. Soit G un groupe algébrique (pour nous ce sera $\mathbb{G}_m^n$ ou une variété abélienne). On dit qu'une courbe sur G est *transverse* si elle n'est contenue dans aucun translaté de sous-groupe algébrique strict de G. On note

$$G^{[r]} = \bigcup_{\mathrm{codim}\ H \geq r} H(\overline{K}),$$

où H décrit l'ensemble des sous-groupes algébriques de codimension indiquée. Dans l'article [29], Rémond prouve :

Théorème 13 (Rémond) *Soient A une variété abélienne sur $\overline{K}$, X une courbe transverse de A et $r \geq 2$ un entier. Si la conjecture (8) est vraie, alors $X(\overline{K}) \cap A^{[r]}$ est fini.*

En fait Rémond montre un énoncé plus général, valable même si la conjecture 8 n'est pas vraie, mais avec dans ce cas une conclusion bien plus faible. Nous renvoyons à son papier pour plus de détails. Notons que le cas le plus faible de cet énoncé, en prenant $r = \dim A$, (et en supposant vraie la conjecture 8) correspond au résultat suivant, né conjecture de Manin-Mumford et démontré en premier par Raynaud [28] :

Corollaire 2 (Conjecture de Manin-Mumford) *Soit C une courbe irréductible de $A_{\overline{K}}$ qui n'est pas de torsion. Alors, l'ensemble $C \cap A_{\text{tors}}\left(\overline{K}\right)$ des points de $C(\overline{K})$ de torsion dans $A_{\overline{K}}$ est fini.*

L'énoncé conjectural de Rémond est donc une généralisation en dimension supérieure de la conjecture de Manin-Mumford. En fait il s'agit d'une généralisation au cas des variétés abéliennes d'un résultat de Viada [33] concernant les courbes elliptiques. L'énoncé de Viada étant lui même une extension du même énoncé, dans le cadre du groupe $\mathbb{G}_m^n$ dû à Bombieri, Masser et Zannier [7]. Précisément, on a

Théorème 14 (Bombieri-Masser-Zannier) *Soit C une courbe transverse de $\mathbb{G}_m^n$. L'ensemble $C(\overline{\mathbb{Q}}) \cap (\mathbb{G}_m^n)^{[2]}$ est fini.*

Théorème 15 (Viada) *Soient E/K une courbe elliptique à multiplication complexe, n un entier non nul et C/K une courbe transverse dans E^n. L'ensemble $C(\overline{K}) \cap (E^n)^{[2]}$ est fini.*

Notons que les deux derniers énoncés ne sont pas conjecturaux contrairement au résultat de Rémond. Ceci tient au fait que dans ces deux cas, il suffit d'utiliser les résultats connus en direction du problème de Lehmer (non-relatif), théorèmes 7 et 8 respectivement de ce papier, ainsi qu'un subtil arguement cohomologique. Il ne semble toutefois pas possible d'éviter l'utilisation du problème de Lehmer relatif (forme faible) pour le cas des variétés abéliennes (même de type C.M.[1]).

5.2 Résultats

On indique maintenant les résultats que l'on a en direction du problème de Lehmer relatif et qui rendent crédible cette conjecture. Là encore, on dispose d'un parallèlisme absolu entre le cadre multiplicatif et le cadre abélien. Le premier pas a été effectué par Amoroso et Dvornicich [4] puis par Amoroso et Zannier :

Théorème 16 (Amoroso-Zannier) *Soit K un corps de nombres. Il existe une constante $c(K)$ strictement positive, telle que*

$$\forall x \in \mathbb{G}_m(\overline{K}) \backslash \mu_\infty, \quad h(x) \geq \frac{c(K)}{D} \left(\frac{\log \log 5D}{\log 2D} \right)^{13},$$

où $D = [K^{\text{ab}}(x) : K^{\text{ab}}]$.

[1] au moins si on veut un énoncé optimal, cf. [29].

Le théorème 16 étend le résultat de Amoroso et Dvornicich qui traitait le cas où x appartenait à une extension abélienne de K, *i.e.*, le cas (déjà non-trivial contrairement à ce qui se passe pour le problème de Lehmer classique) $D = 1$. C'est précisément ce théorème, dans le cas $D = 1$, qui a été étendu aux courbes elliptiques à multiplication complexe ou ayant un j-invariant non-entier par Baker dans [5], puis par Silverman [30] dans le cas des courbes elliptiques sans multiplication complexe. Ainsi pour les courbes elliptiques, on a

Théorème 17 (Baker-Silverman) *Soit E/K une courbe elliptique. Il existe une constante strictement positive $c(E/K)$ telle que*

$$\forall P \in E(K^{\mathrm{ab}}) \backslash E_{\mathrm{tors}}, \quad \widehat{h}(P) \geq c(E/K).$$

Ce dernier résultat a été récemment étendu par Baker et Silverman (cf. [6]) au cas des variétés abéliennes.

Théorème 18 (Baker-Silverman) *Soient A/K une variété abélienne sur un corps de nombres K et L un fibré en droites ample et symétrique. Il existe une constante strictement positive $c(A/K, L)$ telle*

$$\forall P \in A(K^{\mathrm{ab}}) \backslash A_{\mathrm{tors}}, \quad \widehat{h}_L(P) \geq c(A/K, L).$$

Dans l'article [26], nous montrons l'analogue du résultat de Amoroso-Zannier pour les courbes elliptiques à multiplication complexe.

Théorème 19 *Soit E/K une courbe elliptique à multiplication complexe. Il existe une constante $c(E/K)$ strictement positive, telle que*

$$\forall P \in E(\overline{K}) \backslash E_{\mathrm{tors}}, \quad \widehat{h}(P) \geq \frac{c(E/K)}{D} \left(\frac{\log \log 5D}{\log 2D} \right)^{13},$$

où $D = [K^{\mathrm{ab}}(P) : K^{\mathrm{ab}}]$.

L'exposant 13 apparaissant en exposant des facteurs log et log log dans le théorème 19 peut être amélioré au prix d'une hypothèse supplémentaire.

Théorème 20 *Soit $c_0 > 0$. Il existe une constante strictement positive $c(E/K, c_0)$, telle que : pour toute extension abélienne L/K et pour tout point $P \in E(\overline{K}) \backslash E_{\mathrm{tors}}$ vérifiant $D = [L(P) : L]$, si le nombre de nombres premiers qui se ramifient dans L est borné par $c_0 \left(\frac{\log 2D}{\log \log 5D} \right)^2$, alors on a l'inégalité*

$$\widehat{h}(P) \geq \frac{c(E/K, c_0)}{D} \left(\frac{\log \log 5D}{\log 2D} \right)^3.$$

On voit qu'en imposant une contrainte sur l'étendue de la ramification dans l'extension abélienne (théorème 20), nous obtenons une généralisation du théorème 6 de Laurent. Dans le cas général (théorème 19), sans imposer aucune condition, nous obtenons une minoration optimale aux puissances de log près, avec un exposant légèrement dégradé par rapport au cas classique : on a comme puissance de log un exposant 13 au lieu d'un exposant 3 ; toutefois cet exposant 13 est le même que dans le cas multiplicatif dû à Amoroso et Zannier (cf. théorème 16). Ce théorème 19, dans le cas des courbes elliptiques à multiplication complexe, généralise au cas D quelconque un précédent résultat de Baker [5] (cf. théorème 17).

Il est probable que l'on puisse généraliser le théorème 19 au cas des variétés abéliennes de type C.M. L'idée serait pour cela de reprendre l'article [10] en incorporant les nouvelles idées que l'on trouve dans [26].

Notons par ailleurs que notre théorème 19 permet déjà de simplifier la preuve du theorème 15 précédent de Viada [33] : la preuve de Viada est calquée sur celle de Bombieri, Masser et Zannier [7] dans le cas de $\mathbb{G}_m^n$. Elle utilise le fait que la hauteur des points de $C(\overline{K})\cap(E^n)^{[1]}$ est bornée. Il s'agit du Theorem 1. du même article de Viada qui résulte simplement des propriétés fonctorielles des hauteurs et du théorème du cube pour les variétés abéliennes. Ceci étant acquis on constate, en appliquant le théorème de Northcott, qu'il suffit alors de montrer que le degré des points de $C(\overline{K}) \cap (E^n)^{[2]}$ est borné. C'est la partie difficile de la preuve. Viada montre ceci en deux étapes : la première consiste à montrer la finitude de l'ensemble $C(\overline{K})\cap(E^n)^{[3]}$. La seconde étape consiste à montrer la finitude de $C(\overline{K})\cap(E^n)^{[2]}$ en utilisant un argument cohomologique. Nous montrons dans [26] comment éviter cet argument cohomologique en appliquant notre théorème 19.

5.3 Remarque sur le problème de Lehmer relatif pour les sous-variétés

Comme dans le cas classique, on peut énoncer une généralisation du problème de Lehmer relatif aux sous-variétés. Précisément en travaillant avec K_{tors}, on peut poser la conjecture suivante :

Conjecture 9 *Soient A/K une variété abélienne sur un corps de nombres et L un fibré en droites ample et symetrique. Il existe une constante $c(A/K, L)$ strictement positive, telle que pour toute sous-variété $V/\overline{K}$ de A, $\overline{K}$-irréductible et qui n'est pas une variété de torsion de $A_{\overline{K}}$, on a*

$$\frac{\widehat{h}_L(V)}{\deg_L V} \geq \frac{c(A/K, L)}{(\deg_L V_{\mathrm{tors}})^{\frac{1}{s-\dim V}}}$$

où s est la dimension du plus petit sous-groupe algébrique contenant V et où V_{tors} est l'image schématique de V dans $A_{\bar{K}_{\mathrm{tors}}}$ par la projection naturell de $A_{\overline{K}}$ sur $A_{K_{\mathrm{tors}}}$.

Cet énoncé est bien sur une généralisation de la conjecture 6 de David et Philippon, puisque $\deg_L V_{\text{tors}}^{\text{irr}} \leq \deg_L V$. Par ailleurs, de même que dans le cas classique, cet énoncé n'est pas une généralisation à strictement parler de la conjecture 7 sur les points. Toutefois, à condition de remplacer l'hypothèse "$V_{\overline{K}}$ n'est pas une réunion de sous-variétés de torsion de $A_{\overline{K}}$" par l'hypothèse "$V_{\overline{K}}$ n'est pas contenue dans une réunion de sous-variétés de torsion de $A_{\overline{K}}$", on peut remplacer dans la conclusion le terme

$$(\deg_L V_{\text{tors}})^{\frac{1}{s-\dim V}} \text{ par le terme } \delta_{L^{\text{tors}}}(V_{\text{tors}}) .$$

On obtient alors un énoncé qui généralise le cas des points. De plus par un argument de projection comme dans l'article [24], on voit que cet énoncé modifié entraîne l'énoncé de départ (la conjecture 9). Enfin, en corollaire du théorème principal de [24] et par la même preuve que dans le cas classique, on voit que cet énoncé modifié découle en fait du cas des points donné par la conjecture 7 de David. Ainsi comme dans le cas classique, pour savoir traiter le cas de la minoration de la hauteur de sous-variétés de dimension supérieure, (il faut et) il suffit de savoir traiter le cas des points.

Références

[1] F. Amoroso and S. David. Le problème de Lehmer en dimension supérieure. In *J. Reine Angew. Math.*, volume 513, pages 145–179, 1999.

[2] F. Amoroso and S. David. Minoration de la hauteur normalisée des hypersurfaces. In *Acta Arith.*, volume 92, pages 339–365, 2000.

[3] F. Amoroso and S. David. Densité des points à coordonnées multiplicativement indépendantes. In *Ramanujam J.*, volume 5, pages 237–246, 2001.

[4] F. Amoroso and R. Dvornicich. A Lower Bound for the height in Abelian Extensions. In *J. Number Theory*, volume 80, pages 260–272, 2000.

[5] M. Baker. Canonical heights on elliptic curves over abelian extensions. In *Internat. Math. Res. Notices*, volume 29, pages 1571–1589, 2003.

[6] M. Baker and J. Silverman. A lower bound for the canonical height on abelian varieties over abelian extensions. À paraître dans *Mathematical Research Letters*, 2003.

[7] E. Bombieri, D. Masser, and U. Zannier. Intersecting a Curve with Algebraic Subgroups of Multiplicative Groups. In *Internat. Math. Res. Notices*, volume 20, pages 1119–1139, 1999.

[8] J. B. Bost. Périodes et isogénies des variétés abéliennes sur les corps de nombres (d'après D. Masser et G. Wüstholz). In *Séminaire Bourbaki*, volume 237, pages 115–161. Astérisque, 1996.

[9] J.-B. Bost, H. Gillet, and C. Soulé. Heights of projective varieties and positive Green forms. In *J. Amer. Math. Soc.*, volume 7, pages 903–1022, 1994.

[10] S. David and M. Hindry. Minoration de la hauteur de Néron-Tate sur les variétés abéliennes de type C. M. In *J. Reine Angew. Math.*, volume 529, pages 1–74, 2000.

[11] E. Dobrowolski. On a question of Lehmer and the number of irreductible factors of a polynomial. In *Acta Arith.*, volume 34, pages 391–401, 1979.

[12] W. Fulton. *Intersection Theory*. Springer, seconde edition, 1998.

[13] H. Gillet and C. Soulé. Arithmetic intersection theory. In *Publ. IHES*, volume 72, pages 94–174, 1990.

[14] H. Gillet and C. Soulé. Characteristic classes for algebraic vector bundles with hermitian metrics I,II. In *Ann. of Math.*, volume 131, pages 163–203 et 205–238, 1992.

[15] M. Hindry and J. Silverman. *Diophantine Geometry An Introduction*, volume 201 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, 2000.

[16] M. Laurent. Minoration de la hauteur de Néron-Tate. In M.-J. Bertin, editor, *Séminaire de théorie des nombrs de* P*aris, 1981-1982*, volume 38, pages 137–152. Progr. Math., 1983.

[17] H. Lehmer. Factorisation of some cyclotomic functions. In *Ann. of Math.*, volume 34, pages 461–479, 1933.

[18] D. Masser. Lettre à Daniel Bertrand du 10 novembre 1986.

[19] D. Masser. Small values of the quadratic part of the néron-tate height. In *Progr. Math.*, volume 12, pages 213–222. Birkhäuser, 1981.

[20] P. Philippon. Sur des hauteurs alternatives I. In *Math. Ann.*, volume 289, pages 255–283, 1991.

[21] P. Philippon. Sur des hauteurs alternatives II. In *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)*, volume 44, pages 1043–1065, 1994.

[22] P. Philippon. Sur des hauteurs alternatives III. In *J. Math. Pures Appl.*, volume 74, pages 345–365, 1995.

[23] N. Ratazzi. *Minoration de la hauteur de Néron-Tate pour les points et les sous-variétés : variations sur le problème de Lehmer*. Thèse de mathématiques de l'Université Paris 6 Pierre et Marie Curie, mai 2004, disponible à l'adresse http ://tel.ccsd.cnrs.fr/documents/archives0/00/00/61/63/index_fr.html.

[24] N. Ratazzi. Densité de points et minoration de hauteur. In *J. Number Theory*, volume 106/1, pages 113–128, 2004.

[25] N. Ratazzi. Problème de lehmer pour les hypersurfaces de variétés abéliennes de type c.m. In *Acta Arith.*, volume 113, 2004.

[26] N. Ratazzi. Théorème de Dobrowolski-Laurent pour les extensions abéliennes sur une courbe elliptique à multiplication complexe. À paraître dans *Int. Math. Res. Not.*, 2004.

[27] N. Ratazzi. Problème de Lehmer sur $\mathbb{G}_m$ et méthode des pentes. Notes d'un exposé fait au groupe de travail AGAD, disponible à l'adresse http ://www.math.jussieu.fr/∼ratazzi/dobropente.pdf, février 2003.

[28] M. Raynaud. Courbes sur une variété abélienne et points de torsion. In *Invent. Math.*, volume 71, pages 207–234, 1983.

[29] G. Rémond. Intersection de sous-groupes et de sous-variétés I. Prépublication de l'Institut Fourier no. 626, octobre 2003.

[30] J. Silverman. A Lower Bound for the Canonical Height on Elliptic Curves over Abelian Extensions. In *J. Number Theory*, volume 104, pages 353–372, 2004.

[31] C.J. Smyth. On the product of conjugates outside the unit circle of an algebraic integer. In *Bulletin of the London Math. Soc.*, volume 3, pages 169–175, 1971.

[32] C. Soulé. Géométrie d'Arakelov et théorie des nombres transcendants. In *Journées Arithmétiques, 1989 (Luminy), Astérique*, volume 198-200, pages 355–371, 1992.

[33] E. Viada. The intersection of a curve with algebraic subgroups in a product of elliptic curves. In *Ann. Scuola Norm. Pisa Cl. Sci.* Série *(V)*, volume 1, pages 47–75, 2002.

[34] C. Voutier. An effective lower bound for the height of algebraic umbers. In *Acta. Arith.*, volume 74, no. 1, pages 81–96, 1996.

[35] S. Zhang. Small points and adelic metrics. In *J. Algebraic Geom.*, volume 4, pages 281–300, 1995.