A.N.R. ARIVAF - WORKSHOP 3 : CONJECTURE DE MUMFORD-TATE I

ORGANISATEURS : A. CADORET, N. RATAZZI

1. Informations pratiques

Date: 8, 9 et 10 novembre 2011.

Lieu: Paris.

Programme:

- 08/11	09:00 - 10:30	:	(1) Groupes algébriques affines
	Café		
	11:00 - 12:30	:	(2) Groupes et algèbres de Lie ℓ-adiques
	14:30 - 16:00	:	(3) Catégories tannakiennes
	Café		
	16:30 - 18:00	:	(4) Poids et systèmes de racines
- 09/11	09:00 - 10:30	:	(5) Structures de Hodge
	Café		
	11:00 - 12:30	:	(6) Exemples
	14:30 - 16:00	:	(7) Niveaux de structures de Hodge et longueur de représentations
- 10/11	09:00 - 10:30	:	(8) Image de Galois
	Café		
	11:00 - 12:30	:	(9) Conjecture de Mumford-Tate
	14:30 - 16:00	:	(3) Motifs pur, motifs motivés

Orateurs:

(1) M. Romagny
(2) S. Maugeais
(3) N. Borne
(4) A. Cadoret
(5) S. Brochard
(6) D. Tossici
(7) N. Ratazzi
(8) M. Hindry
(9) N. Ratazzi
(10) Y. André

2. Prérequis

- Rudiments d'algèbres de Lie;
- Rudiments d'algèbre non commutative;
- Géométrie algébrique:
  – Variétés abéliennes;
  – Théorie de Lie des groupes algébriques.

Un certain nombre de résultats, notamment dans la partie *Généralités* seront énoncés sans preuve (groupes algébriques, catégories tannakiennes, groupes de Lie ℓ-adiques). On admettra également le théorème de comparaison entre cohomologie de Betti et cohomologie ℓ-adique (qui sera abordé en détails dans ARIVAF4) et certains résultats difficiles comme, par exemple, les conjectures de Tate pour les variétés abéliennes (Faltings) ou le théorème de semisimplicité de Deligne.

La conjecture de Mumford-Tate (cf. ci-dessous) s'inscrit dans la philosophie motivique que l'on peut brièvement résumer comme suit (ce point de vue sera développé dans l'exposé (10)) : soit k un sous-corps de $\mathbb{C}$ (typiquement un corps de nombres) et X un schéma lisse, projectif et géométriquement connexe sur k. Notons $\mathbf{H}_\ell(X)$ resp. $\mathbf{H}_B(X)$ les $\mathbb{Z}$-algèbres graduées de degrés pairs en cohomologie ℓ-adique (resp. de Betti) *i.e.*

$$\mathbf{H}_\ell(X) := \bigoplus_{d\geq 0} \mathrm{H}^{2d}(X_{\overline{k}}, \mathbb{Q}_\ell)(d), \quad \mathbf{H}_B(X) := \bigoplus_{d\geq 0} \mathrm{H}^{2d}(X_{\mathbb{C}}, \mathbb{Q})(d).$$

Les isomorphismes de comparaison entre cohomologie de Betti et cohomologie ℓ-adique permettent de comparer $\mathbf{H}_\ell(X)$ et $\mathbf{H}_B(X)$

$$\mathbf{H}_\ell(X) \tilde{\to} \mathbf{H}_B(X) \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}_\ell.$$

Les foncteurs $X \mapsto \mathbf{H}_\ell(X)$ resp. $X \mapsto \mathbf{H}_B(X)$ sont à valeurs dans la catégorie $\mathrm{Rep}_{\mathbb{Q}_\ell}(\mathrm{Gal}(\bar{k}/k))$ des représentations continues $\mathbb{Q}_\ell$-linéaires de dimension finie de $\mathrm{Gal}(\bar{k}/k)$, respectivement la catégorie $\mathbb{Q}\mathrm{HS}$ des $\mathbb{Q}$-structures de Hodge polarisables. Ils induisent des $\otimes$-foncteurs $M(k)_{\mathbb{Q}_\ell} \to \mathrm{Rep}_{\mathbb{Q}_\ell}(\mathrm{Gal}(\bar{k}/k))$ et $M(k)_{\mathbb{Q}} \to \mathbb{Q}\mathrm{HS}$, où $M(k)$ désigne la catégorie des motifs purs sur k.

On a alors :

- La catégorie $\mathrm{Rep}_{\mathbb{Q}_\ell}(\mathrm{Gal}(\bar{k}/k))$ est une catégorie tannakienne neutre sur $\mathbb{Q}_\ell$. Notons $\overline{\mathrm{G}}_\ell(X)$ le groupe de Tannaka de la sous-catégorie tannakienne $\langle \mathbf{H}_\ell(X)\rangle^\otimes$, c'est l'adhérence de Zariski de l'image $\mathrm{G}_\ell(X)$ de $\mathrm{Gal}(\bar{k}/k)$ agissant sur $\mathbf{H}_\ell(X)$.
- La catégorie $\mathbb{Q}\mathrm{HS}$ est une catégorie tannakienne semisimple neutre sur $\mathbb{Q}$. Notons $\mathrm{MT}(X)$ le groupe de Tannaka de la sous-catégorie tannakienne $\langle \mathbf{H}_B(X)\rangle^\otimes$.
- Si E désigne le corps des coefficients de la cohomologie de Weil avec laquelle on travaille (*i.e.* $E = \mathbb{Q}_\ell$ pour la cohomologie ℓ-adique et $E = \mathbb{Q}$ pour la cohomologie de Betti), conjecturellement (conjectures standards) $M(k)_E$ est une catégorie tannakienne semisimple neutre sur E; notons $\mathrm{G}_{\mathrm{mot}}(X)_E$ le groupe de Tannaka de la sous-catégorie tannakienne $\langle X\rangle^\otimes$.
- Conjecturellement (conjectures de Tate de semisimplicité et de plénitude) $\mathbf{H}_\ell(X)$ est semisimple et $M(k)_{\mathbb{Q}_\ell} \to \mathrm{Rep}_{\mathbb{Q}_\ell}(\mathrm{Gal}(\bar{k}/k))$ est un foncteur plein.
- Conjecturellement (conjectures de Hodge) $M(k)_{\mathbb{Q}} \to \mathbb{Q}\mathrm{HS}$ est un foncteur plein.

Notons que la conjecture de Hodge (respectivement la conjecture de Tate) implique les conjectures standards en caractéristique nulle. En supposant ces conjectures vraies pour toute puissance X^n de X, on obtient la conjecture suivante, due à Mumford-Tate [Mum66] dans le cas où X est une variété abélienne.

Conjecture 2.1. *Pour tout nombre premier ℓ, on a*

$$\overline{\mathrm{G}}_\ell(X)^0 = \mathrm{MT}(X)_{\mathbb{Q}_\ell},$$

où $\overline{\mathrm{G}}_\ell(X)^0$ désigne la composante connexe du neutre[1] *dans $\overline{\mathrm{G}}_\ell(X)$.*

Autrement dit, l'adhérence de Zariski de $\mathrm{G}_\ell(X)$ est controlée par le groupe algébrique $\mathrm{MT}(X)$ *défini sur* $\mathbb{Q}$ *et indépendant de* ℓ. Ceci permet en fait de contrôler $\mathrm{G}_\ell(X)$ car $\mathrm{G}_\ell(X)$ est ouvert dans $\overline{G}_\ell(X)(\mathbb{Q}_\ell)$.

Dans le cas où X est une variété abélienne, un renforcement conjectural de la conjecture de Mumford-Tate, dû à Serre [Se77], affirme même que :

Conjecture 2.2. *Le groupe $\mathrm{G}_\ell(X)$ est un sous-groupe ouvert, d'indice fini, borné indépendamment de ℓ, de* $\mathrm{MT}(X)(\mathbb{Z}_\ell)$.

Le point important nouveau par rapport à la conjecture originale de Mumford-Tate est l'aspect "borné indépendamment de ℓ".

On verra aussi que, dans la pratique, les groupes $\mathrm{MT}(X)$ sont souvent calculables.

[1] On verra dans l'exposé (8) qu'il existe une extension finie de k, *indépendante de ℓ*, sur laquelle $\overline{\mathrm{G}}_\ell(X)$ devient connexe.

3. Résumé des exposés

3.1. Généralités.

(1) Groupes algébriques affines (sur un corps k de caractéristique nulle) (90min).
- Rappels: théorème de structure des groupes algébriques affines (blocs de base, théorèmes de dévissage), cf. [Mi10, I.1].
- Théorème de Chevalley [De82, Prop. 3.1].
- Groupes algébriques réductifs (G réductif $\Leftrightarrow$ toute représentation linéaire de G est semisimple).
- Groupes algébriques connexes semisimples (G connexe est semi-simple $\Leftrightarrow$ Lie(G) est semisimple) [Mi10] II.5.23. Le groupe algébrique G est produit presque direct de ses sous-groupes connexes minimaux.
- Équivalence de catégorie entre les groupes algébriques de type multiplicatif sur k et les groupes commutatifs munis d'une action de Galois.
- Exemple (utile pour l'exposé (5)) des sous-groupes réductifs de $\mathrm{SL}_{2,\mathbb{Q}}$ (le groupe trivial $\{1\}$, $\mathrm{SL}_{2,\mathbb{Q}}$ et les tores maximaux de ce dernier).
- L'adhérence de Zariski d'un sous-groupe abstrait d'un groupe algébrique G sur k est un sous-groupe algébrique de G sur k.

(2) Groupes et algèbres de Lie (ℓ-adiques) (90min). Les deux références standards sont [DiSMS91] (point de vue groupes profinis) et [Se65] (point de vue plus géométrique).
- La catégorie $\mathcal{G}_\ell$ des groupes de Lie ℓ-adiques. Exemples. Le foncteur d'oubli de la catégorie des groupes de Lie ℓ-adique dans celle des espaces topologiques est pleinement fidèle.
- Théorie des groupes : tout sous-groupe fermé d'un groupe de Lie ℓ-adique est encore un groupe de Lie ℓ-adique (théorème de Cartan ℓ-adique), tout quotient d'un groupe de Lie ℓ-adique par un sous-groupe normal fermé est encore un groupe de Lie ℓ-adique.
- Tout sous-groupe compact de $\mathrm{GL}_r(\mathbb{Q}_\ell)$ est conjugué à un sous-groupe de $\mathrm{GL}_r(\mathbb{Z}_\ell)$.
- Théorie de Lie. Soit $\mathcal{L}_\ell$ la catégorie des $\mathbb{Q}_\ell$-algèbres de Lie de dimension finie. Construction du foncteur *Lie* : $\mathcal{G}_\ell \to \mathcal{L}_\ell$. Ce foncteur se factorise *via* une équivalence de catégories $\tilde{G}_\ell \to \mathcal{L}_\ell$, où $\tilde{\mathcal{G}}_\ell$ est la catégorie dont les objets sont les groupes de Lie ℓ-adiques et les morphismes $G \to G'$ les classes d'équivalence de couples (U, f), où U est un sous-groupe ouvert de G et $f : U \to G$ un morphisme de groupes ℓ-adiques. Propriétés d'exactitudes (suites exactes, stabilisateurs, normalisateurs, abélianisation, etc.). Représentation adjointe. Exemples.

- Rappels sur les algèbres de Lie semi-simples sur un corps k de caractéristique nulle (notamment définition d'une sous-algèbre de Cartan) : [Mi10] chapitre III pagraphes 2.a, 2.b et 2.c (utilisé dans les exposés suivants, notamment celui sur les systèmes de racines).

(3) Catégories tannakiennes (60 ou 90 min ?). Un fil directeur synthétique est [A04, I-2]. Les références classiques sont [DeMi82] et [Saa72].
- Définitions ($\otimes$-catégorie abélienne rigide, foncteur fibre, catégorie tannakienne neutre, catégorie tannakienne polarisable);
- 'Main theorem' (*e.g.* [DeMi82, Thm. 2.11, p.130]) : si $\mathcal{T}$ est une catégorie tannakienne sur un corps k, munie d'un foncteur fibre $\omega : \mathcal{T} \to \mathrm{Mod}(k)$ alors $G := \mathrm{Aut}^{\otimes}(\omega)$ est un groupe proalgébrique sur k et $\omega : \mathcal{T} \to \mathrm{Mod}(k)$ induit une équivalence de catégories entre $\mathcal{T}$ et la catégorie $\mathrm{Rep}_k(G)$ des représentations linéaires de G, k-rationnelles de dimension finie.
  Donner (dans la mesure du possible) une brève esquisse de la preuve.
- Dictionnaire fonctoriel (*e.g.* [A04, I-2.3]).
- Proposition 2.23 et lemmes 2.24 et 2.25 de [DeMi82] : la catégorie $\mathrm{Rep}_k(G)$ est semi-simple si et seulement si $\mathrm{Rep}_{\bar{k}}(\mathrm{G}_{\bar{k}})$ l'est. (Ces énoncés seront utilisés dans l'exposé d'exemples sur le groupe de Mumford-Tate).

(4) Poids et systèmes de racines (90 min). La référence standard est évidemment [Bour81] et [Bour90]. On suivra essentiellement le résumé de la théorie dans [Mi10] Chapitre III paragraphes 1 et 2 (à l'exclusion des paragraphes 1.f, 1.h, 1.j, 2.a, 2.b, 2.c). On pourra également consulter le paragraphe 3 de [Se79]. Cet exposé est crucial pour l'exposé (7) : "niveaux de structures de Hodge et longueurs de représentations".

- Réflexions.
- Systèmes de racines, groupe de Weyl.
- Réseaux des poids et des racines, poids (dominants) fondamentaux.
- Cas des algèbres de Lie semi-simples.
- Plus hauts poids, théorèmes 2.37, 2.38, 2.39 de [Mi10].
- exemple : suivre (suivant Milne) en filigrane l'étude du cas de l'algèbre $\mathfrak{sl}_n$ (on pourra aussi voir le chapitre 7 de la partie *Lie Algebra* de [Se65] et notamment donner, si le temps le permet, l'idée de preuve des théorèmes 2.37-2.39 de [Mi10] dans ce cas particulier, suivant Serre [Se65]).
- Représentations minuscules, cf. [Bour90] chapitre VIII, paragraphe 7.3.

3.2. Groupes de Mumford-Tate.

(5) Structures de Hodge (90min). Les références de base sont les notes de cours [Mo99] paragraphe 1 et [Mo04] paragraphes 1, 3 et 4. On pourra également tirer profit de consulter les notes de Milne [Mi04] chapitre 2, paragraphe "Hodge structures" ainsi que les chapitres 2.1 et 2.2 de [1].
  - Catégorie tannakienne des structures de Hodge. Polarisation et semisimplicité. Exemples cohomologiques.
  - Groupes de Mumford-Tate. Définition *via* le tore de Deligne et définition tannakienne (équivalence des deux définitions) (on pourra voir à ce titre le paragraphe I.B de [GGK]. Propriétés élémentaires (connexité, réductivité, produit *etc.*).

(6) Exemples (90min). Là encore on pourra suivre [Mo04, §5], dont on utilise les notations ci-dessous, ainsi que [Mo99, §2].
  - $\mathrm{MT}(\mathbb{Q}(m))$;

  Si A est une variété abélienne, classification d'Albert [Mo99, §1.19], cf. également [Mum70].
  - Détailler les paragraphes 1.21, 1.23, 1.24 et 1.26 de [Mo99].
  - Application 1 : A est une variété abélienne de type CM si et seulement si $\mathrm{MT}(A)$ (ou de manière équivalente $\mathrm{Hdg}(A)$) est un tore algébrique [cf. [Mo04, §5.3] et [Mum69, §2]].
  - Application 2 : Détermination des groupes $\mathrm{MT}(E)$ possibles pour $E/\mathbb{C}$ une courbe elliptique complexe (cf. [Mo99, §2.6] et [Mo04, §5.4]).
  - Application 3 : détermination des groupes de Mumford-Tate pour une surface abélienne suivant [Mo99, §2.7] (probablement dur et trop long...).
  - Encadrement $\mathbb{G}_m\mathrm{Id} \subset \mathrm{MT}(A) \subset \mathrm{GL}_D(V) \cap \mathrm{CSp}(V, \phi)$.
  - Courbes elliptiques - application à la conjecture de Hodge pour les produits de courbes elliptiques (énoncé au moins).

(7) Niveaux de structures de Hodge et longueur de représentations (90min). L'objectif est de s'appuyer sur les exposés précédents pour expliquer le paragraphe 3 de [Mo99], lui même basé sur [Za85], et aboutir aux théorème 3.11 et corollaire 3.13.

3.3. Image galoisienne.

(8) Adhérence de Galois (90min). Dans cet exposé, on se placera dans le contexte géométrique suivant : soient k un corps et X une variété abélienne sur k. On considère l'action du groupe de Galois absolu $\mathrm{Gal}(\bar{k}/k)$ de k sur $V_\ell := T_\ell(X) \otimes_{\mathbb{Z}_\ell} \mathbb{Q}_\ell$. On note G_ℓ l'image de $\mathrm{Gal}(\bar{k}/k)$ dans $\mathrm{GL}(V_\ell)$, $\overline{G}_\ell$ la cloture de Zariski de G_ℓ dans GL_{V_ℓ} et $\overline{\mathrm{G}}_\ell^0$ la composante neutre de $\overline{\mathrm{G}}_\ell$.
  - Application des théorèmes de Deligne et Faltings.
    – Semisimplicité de $\overline{\mathrm{G}}_\ell^0$ (k corps de fonctions en car. 0) [De71].
    – Reductivité de $\overline{\mathrm{G}}_\ell^0$ (k corps de nombres) [Fal83].
    – Une "courte" preuve du théorème de l'image ouverte de Serre pour les courbes elliptiques.
  - Le morphisme $\mathrm{Gal}(\bar{k}/k) \to \overline{\mathrm{G}}_\ell/\overline{\mathrm{G}}_\ell^0$ est surjectif et son noyau est indépendant de ℓ. (On se limitera au cas des corps de nombres) [Se00].
  - G_ℓ est ouvert dans $\mathrm{G}_\ell(\mathbb{Q}_\ell)$.
    – <u>Fait</u>: *Si* G_ℓ *est semisimple alors* $Lie(\mathrm{G}_\ell) = Lie(G_\ell^0)$ $\Rightarrow$ O.k. si k corps de fonctions en car. 0.
    – Corps de nombres: théorème de Bogomolov [Bo80], [Se94].

3.4. Conjecture de Mumford-Tate.

(9) Conjecture de Mumford-Tate (90min). L'objectif de cet exposé est de faire le point sur les cas connus de la conjecture de Mumford-Tate en donnant quelques idées d'au moins une des preuves.

- Théorème de comparaison cohomologie de Betti-cohomologie ℓ-adique. Enoncé de la conjecture pour les variétés abéliennes.
- Faits:
  – Inclusion Galois $\subset$ Mumford-Tate [De82, Prop. 2.9 et Th. 2.11].
  – Si la conjecture de Mumford-Tate est vraie pour un ℓ fixée, alors elle est vraie pour tout ℓ [LP95, Thm. 4.3].
  – Le rang de $\overline{\mathrm{G}}_\ell^0$ est indépendant de ℓ.
- Mumford-Tate pour les courbes elliptiques.
- Mumford-Tate pour A telle que $\mathrm{End}(A) = \mathbb{Z}$ et dimension impaire.
- Application de Mumford-Tate : borne sur la torsion $[K(A[\ell^n]) : K]$ pour A/K fixée quelconque et ℓ et n variables.

(10) Motifs purs, motifs purs motivés (90min). Conjecture de Hodge, de Tate et de Mumford-Tate. L'objectif de cet exposé est de situer la conjecture de Mumford-Tate dans le contexte général de la théorie des motifs purs. Là encore, on pourra suivre l'excellente synthèse [A04, I, 1-7, 9-10]. L'article de référence sur les cycles motivés est [A96].

- Construction de la catégorie des motifs purs.
- Conjectures standards.
- Contournement des conjectures standards par la théorie des cycles motivés, définition des groupes de Galois motiviques motivés.
- Conjectures de Hodge et de Tate (motivées). "Hodge+Tate $\Rightarrow$ Mumford-Tate".

(11) Conclusion (20min). Esquisse du programme d'ARIVAF5.

References

[A92] Y. André, *Mumford-Tate groups of mixed Hodge structures and the theorem of the fixed part*, Comp. Math., **82**, 1–24, 1992.

[A96] Y. André, *Pour une théorie inconditionnelle des motifs*, Publ. Math. I.H.E.S., **83**, 5–49, 1996.

[A04] Y. André, *Une introduction aux motifs (motifs purs, motifs mixtes, périodes)*, S.M.F. - Panoramas et Synthèses, **17**, 2004.

[Bo80] F. Bogomolov, *Sur l'algébricité des représentations ℓ-adiques*, C.R. Acd. Sc. Paris, **290** Série A, 1980, pp. 701–703.

[Bour81] N. Bourbaki, *Éléments de mathématique. Groupes et algèbres de Lie. Chapitres IV-VI*, Masson, Paris, 1981.

[Bour90] N. Bourbaki, *Éléments de mathématique. Groupes et algèbres de Lie. Chapitres VII-VIII (nouveau tirage)*, Masson, Paris, 1990.

[De71] P. Deligne, *Théorie de Hodge II*, Publ. Math. I.H.E.S. **40**, 1971.

[De82] P. Deligne, *Hodge cycles on abelian varieties*, in Hodge cycles, Motives and Shimura Varieties, L.N.M. **900**, Springer-Verlag, 1982.

[De90] P. Deligne, *Catégories tannakiennes*, in Grothendieck Festschrift, vol. 2, Progress in Math. **87**, Birkhauser, 1990.

[DeMi82] P. Deligne et J.S. Milne, *Tannakian categories*, in Hodge cycles, Motives and Shimura Varieties, L.N.M. **900**, Springer-Verlag, 1982.

[DiSMS91] J.D. Dixon, M.P.F. du Sautoy, A. Mann and D. Segal, *Analytic pro-p Groups*, L.M.S. L.N.S. **157**, Cambridge University Press, 1991.

[Fal83] G. Faltings, *Endlichkeitssatze fur abelsche Varietaten uber Zahlkorpern*, Invent.Math.**73**, 1983, pp. 349–366.

[GGK] M. Green, P. Griffiths et M. Kerr, *Mumford-Tate groups and domain : their geometry and arithmetic*, notes disponibles sur maths.dur.ac.uk/ dma0mk/MTD.pdf

[LP95] M. Larsen and R. Pink, *Abelian varieties, ℓ-adic representations and ℓ-independence*, Math. Ann. **302**, 1995, pp. 561–579.

[Mi04] J.S. Milne, *Introduction to Shimura varieties*, notes de 2004 disponibles sur http://www.jmilne.org/math/

[Mi10] J.S. Milne, *Algebraic groups, Lie groups and their arithmetic subgroups*, notes révisés en avril 2011 disponibles sur http://www.jmilne.org/math/

[Mo99] B. Moonen, *Notes on Mumford-Tate groups*, unpublished lecture notes - March 1999, disponibles sur http://staff.science.uva.nl/bmoonen/index.html#NotesMT

[Mo04] B. Moonen, *An introduction to Mumford-Tate groups*, unpublished lecture notes - May 2004, disponibles sur http://staff.science.uva.nl/bmoonen/index.html#NotesMT

[Mum66] D. Mumford,*Families of abelian varieties*, in *Algebraic Groups and Discontinuous Subgroups*, Proc.Sympos. Pure Math. **9**, A.M.S., Providence, RI, 1966, pp. 347–351.

[Mum69] D. Mumford, *A note of Shimura's paper "Discontinuous groups and abelian varieties*, Math. Ann. **181**, 1969, pp. 345–351.

[Mum70] D. Mumford *Abelian varieties*, Oxford Univ. Press, Oxford, 1970. Tata Institute of Fundamental Research Studies in Mathematics, No. 5.

[1] C. Peters et P. Steenbrink, *Mixed Hodge Structures*, Springer.

[Saa72] N. Saavadra Rivano, *Catégories tannakiennes*, L.N.M. **265**, Springer, 1972.

[Se65] J.-P. Serre, *Lie algebras and Lie groups - 1964 lectures given at Harvard University*, W.A. Benjamin, 1965.

[Se77] J.-P. Serre, *Représentations l-adiques*, Japan Soc. Promotion Sci., Tokyo, 1977, pp. 177–193.

[Se79] J.-P. Serre, *Groupes algébriques associés aux modules de Hodge-Tate*, in *Journées de Géométrie Algébrique de Rennes. (Rennes 1978), Vol. III.*, Soc. Math. France, Paris, 1979, pp. 155–188.

[Se94] J.-P. Serre, *Propriétés conjecturales des groupes de Galois motiviques et des représentations ℓ-adiques*, in *Motives (Seattle, WA, 1991), vol. I*, Proc. sympos. Pure Math. **55**, A.M.S. 1994, pp. 377–400.

[Se00] J.-P. Serre, *Lettre à Ken Ribet*, in *Oeuvres. Collected papers. IV.* Springer-Verlag, Berlin, 2000.

[Za85] Y. G. Zarhin *Weights of simple Lie algebras in the cohomology of algebraic varieties*, Math. USSR-Izv. **24**, 1985, pp. 245–281.