probabilités classiques pour la mécanique statistique quantique

Yan Pautrat
soutenance d'habilitation à diriger des recherches

29 novembre 2019

École doctorale de mathématiques Hadamard
Université Paris-Sud
Université Paris-Saclay

plan de l’exposé

- quelques questions issues de la physique
- problèmes de lois jointes d’observables
- donner un sens aux variations de grandeurs physiques
- mesures indirectes d’un système : les mesures
- mesures indirectes d’un système : le système

quelques questions issues de la physique

on décrira en général un système quantique par :

- son *espace d'état* :

  un espace de Hilbert $\mathcal{H}$

- son *état* :

  un opérateur ρ positif de trace 1 *ou* la forme $X \mapsto \mathtt{tr}(\rho X)$

- ses *observables* :

  les opérateurs autoadjoints de $\mathcal{B}(\mathcal{H})$

- une *dynamique* :

  une observable X évolue par $X \rightsquigarrow X_t = \mathrm{e}^{+\mathrm{i}tH} X \, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}tH}$

  H le “hamiltonien”

formalisme insuffisant pour décrire des limites thermodynamiques !

la mesure d'une observable M donne un résultat aléatoire :

si le système est dans l'état ρ, alors

si M admet une décomposition spectrale $M = \sum_{m \in \mathrm{sp}\, M} m \, \pi(m)$,

(pour $\dim \mathcal{H} < \infty$ c'est une simple diagonalisation)

avec probabilité $\mathrm{tr}(\rho\, \pi_m)$:

- on obtient un résultat $m \in \mathrm{sp}\, M$
- on doit considérer que l'état devient $\frac{\pi_m \rho\, \pi_m}{\mathrm{tr}(\pi_m \rho\, \pi_m)}$

la mesure d'une observable M donne un résultat aléatoire :

si le système est dans l'état ρ, alors

si la décomposition spectrale de M s'écrit $M = \int m \, \mathrm{d}\pi(m)$,

(possible par le théorème spectral de von Neumann)

avec probabilité $\mathrm{tr}\left(\rho\,\pi(E)\right)$:

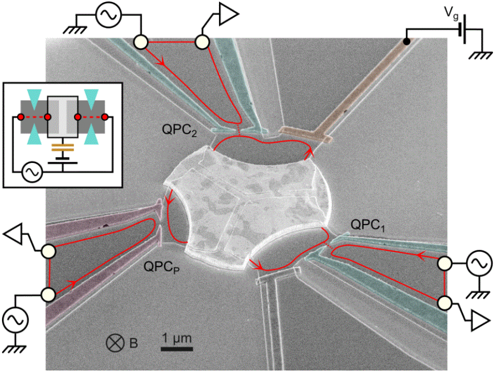
- on obtient un résultat dans E borélien de $\mathbb{R}$
- on doit considérer que l'état devient $\frac{\pi(E)\rho\,\pi(E)}{\mathrm{tr}\left(\pi(E)\rho\,\pi(E)\right)}$

il est naturel de dire que *la loi de M dans l'état* ρ est $\mu_{\rho,M} := \rho \circ \pi$

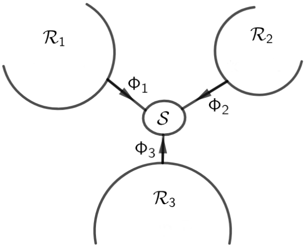
(convention : un μ représentera toujours une mesure de probabilité) pour des couples d'observables M et N :

- si M et N commutent on peut définir leur loi jointe dans l'état ρ
- si M et N ne commutent pas, *on ne peut pas définir de manière satisfaisante* la loi jointe de M et N dans tout état ρ

(traduit l'impossibilité de mesurer *simultanément* M et N)



(image LPA, ENS)



$\mathcal{R}_1, \ldots, \mathcal{R}_d$ à l'équilibre thermique
(i.e. $\mathcal{R}_i$ dans l'état $\sim \mathrm{e}^{-\beta_i H_i}$)

on les couple au temps $t = 0$

on s'attend à ce que s'établissent

- un régime permanent ρ_+
- des flux de chaleur Φ_i

quelles sont les propriétés de ces flux ?

la physique nous dit qu'on va observer :

- à l'équilibre ($T_i \equiv T$)

$$\rho_+(\Phi_i) = 0 \quad \forall i$$

- près de l'équilibre ($T_i \equiv T + o(\epsilon)$)

$$\rho_+(\Phi_i) = \sum_j L_{i,j}(\beta_j - \beta) + o(\epsilon)$$

"réponse linéaire"

et si le système est invariant par renversement du temps (IRT)

$L_{i,j} \sim$ covariance des fluctuations de $\Phi_i, \ \Phi_j$ à l'équilibre

"théorème de fluctuation-dissipation"

- loin de l'équilibre (cas général) :

$$\textstyle\sum_i \rho_+(\Phi_i) = 0 \quad \text{“premier principe”}$$

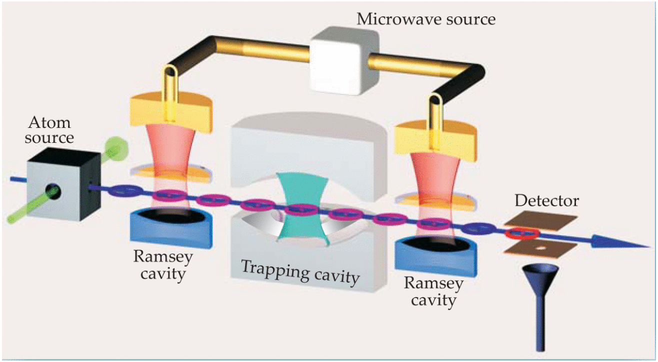
$$\textstyle\sum_i \beta_i \, \rho_+(\Phi_i) \geq 0 \quad \text{“deuxième principe”}$$

formulations “en moyenne”

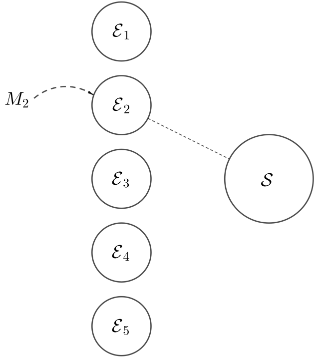
- peut-on dire quelque chose pour chaque réalisation ?

une symétrie dans la loi des variations $\pm s$ de l'entropie

“relation de fluctuation”



(image LKB ENS)



$\mathcal{S}$ un système fixé

on suit le protocole suivant :

- $\mathcal{S}$ interagit avec $\mathcal{E}_1$
- puis on mesure l'obs. M_1 sur $\mathcal{E}_1$
- $\mathcal{S}$ interagit avec $\mathcal{E}_2$
- puis on mesure l'obs. M_2 sur $\mathcal{E}_2$

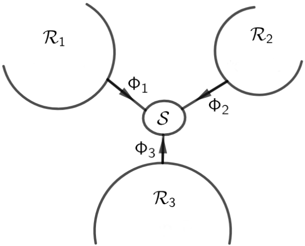
et ainsi de suite

quelle information sur $\mathcal{S}$ peut-on tirer des mesures ?

qu'arrive-t-il à $\mathcal{S}$ après un grand nombre d'itérations ?

problèmes de lois jointes

dans une approche algébrique



$$\rho_+ = \lim_{t\to\infty} \frac{1}{t} \int_0^t \rho_0 \circ \tau^s \, \mathrm{d}s \text{ existe}$$

sous conditions d'ergodicité

pour représenter les fluctuations de Φ_i on propose l'observable

$$\tilde{\Phi}_{i,t} = \frac{1}{\sqrt{t}} \int_0^t \big(\tau^s(\Phi_i) - \rho_+(\Phi_i)\big) \, \mathrm{d}s$$

mais $\tilde{\Phi}_{i,t}$ et $\tilde{\Phi}_{j,t}$ ne commutent pas, donc n'ont pas de loi jointe si M et N ne commutent pas, on peut les mesurer *l'une après l'autre*

$$\text{proba}\left(\begin{array}{c} \text{mesurer } M \text{ dans } E \\ \textit{puis } N \text{ dans } F \end{array} \right) = \rho\big(\mathbb{1}_E(M)\mathbb{1}_F(N)\mathbb{1}_E(M)\big)$$

pour des suites (ρ_t), (M_t), (N_t), sous quelles conditions a-t-on

$$\rho_t\big(\mathbb{1}_E(M_t)\mathbb{1}_F(N_t)\mathbb{1}_E(M_t)\big) \underset{t\to\infty}{\to} \rho\big(\mathbb{1}_E(M)\mathbb{1}_F(N)\mathbb{1}_E(M)\big)?$$

i.e. (ρ_t), (M_t), (N_t) “donnent une expérience approchée” de ρ, M, N

(analogue de la convergence en loi)

si $\mu_t(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha X_t}) \to \mu(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha X})\ \forall\alpha$ alors $\mu_t\big(f(X_t)\big) \to \mu\big(f(X)\big)$ si $\mu\big(\mathcal{D}(f)\big) = 0$

Théorème (Jaksic–P–Pillet [P9])

on suppose

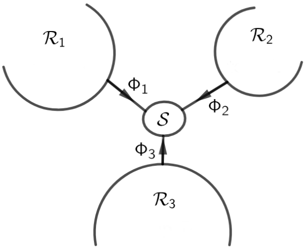
$$\rho_t(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha_1 A_{1,t}} \dots \mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha_p A_{p,t}}) \to \rho(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha_1 A_1} \dots \mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha_p A_p})$$

pour tous $p \in \mathbb{N}$, $A_{1,*}, \dots, A_{p,*} \in \{M_*, N_*\}$, $\alpha_1, \dots, \alpha_p \in \mathbb{R}$

si ρ est un état fidèle, alors

$$\rho_t\big(f_1(A_{1,t}) \dots f_p(A_{p,t})\big) \to \rho\big(f_1(A_1) \dots f_p(A_p)\big)$$

pour $f_1, \dots, f_p$ mesurables bornées telles que $\mu_{\rho,A_j}\big(\mathcal{D}(f_j)\big) = 0\ \ \forall j$.



si :

- les $\mathcal{R}_i$ sont des gaz de fermions libres dans un état β_i-KMS,
- le couplage est un polynôme en opérateurs de champ
  (et vérifie une condition d'ergodicité)

alors pour

$$\tilde{\Phi}_{i,t} = \frac{1}{\sqrt{t}} \int_0^t \left(\tau^s(\Phi_i) - \rho_+(\Phi_i)\right) \mathrm{d}s$$

Théorème (Jaksic–P–Pillet [P8])

on a

$$\rho(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha_1\tilde{\Phi}_{i_1,t}}\ldots\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha_p\tilde{\Phi}_{i_p,t}}) \to \varrho(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha_1\varphi_{i_1}}\ldots\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha_p\varphi_{i_p}})$$

où les $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha\varphi}$ et ϱ vérifient

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha_1\varphi_{i_1}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha_2\varphi_{i_2}} = \mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\,\mathrm{Im}\,L(\Phi_i,\Phi_j)}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha_2\varphi_{i_2}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha_1\varphi_{i_1}} \qquad \varrho(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha\varphi_i}) = \mathrm{e}^{-\alpha^2 L(\Phi_i,\Phi_i)}$$

pour

$$L(\Phi_i,\Phi_j) = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\rho_+\big(\tau^t\big(\Phi_i-\rho_+(\Phi_i)\big)\big(\Phi_j-\rho_+(\Phi_j)\big)\big)\,\mathrm{d}t.$$

la “loi” des mesures séquentielles de $\tilde{\Phi}_{1,t},\ldots,\tilde{\Phi}_{d,t}$ est décrite quand $t\to\infty$ par celle d'opérateurs de champ bosoniques de l'algèbre de Weyl sur $\mathrm{vect}(\Phi_1,\ldots,\Phi_d)$ pour la forme linéaire donnée par $2L$.

si $\beta_1 = \ldots = \beta_d$ alors (Haag–Hugenholtz–Winnink '67)

- L est à valeurs réelles donc $\mathcal{W}$ est commutative
- la loi jointe de $\varphi_1, \ldots, \varphi_d$ dans l'état ϱ est gaussienne de covariance $\big(2L(\Phi_i, \Phi_j)\big)_{i,j}$

or (Jaksic–Ogata–Pillet '07), si le système est IRT,

$$L_{i,j} = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \rho_{\beta_{\mathrm{eq}}}\big(\tau^t\big(\Phi_i - \rho_{\beta_{\mathrm{eq}}}(\Phi_i)\big)\big(\Phi_j - \rho_{\beta_{\mathrm{eq}}}(\Phi_j)\big)\big)\,\mathrm{d}t$$

$\rho_{\beta_{\mathrm{eq}}} = \rho_+$ pour $\beta_1 = \ldots = \beta_d = \beta_{\mathrm{eq}}$

$\rho_+(\Phi_i) = \sum_j L_{i,j}(\beta_j - \beta) + o(\epsilon)$

donc

$$L_{i,j} = 2 \times \text{covariance de la loi jointe limite de } \tilde{\Phi}_{i,t}, \tilde{\Phi}_{j,t}$$

on a relié le coefficient de transport aux covariances des fluctuations à l'équilibre des flux Φ_i mais. . .

mesures à deux temps

variations d'une observable

il y a un "mais"

comment mesurer ces fluctuations ?

$$\int_0^t \tau^s(\Phi_i)\,\mathrm{d}s = \tau^t(H_i) - H_i$$

on a modélisé la variation de H_i par l'observable $\tau^t(H_i) - H_i$

"quantification naïve"

mais

- on ne sait pas comment la mesurer
- la variation de l'entropie (de Clausius) $S = \sum_i \beta_i H_i$ est alors modélisée par $\tau^t(S) - S$, or…

pour un système IRT, on prouve en une ligne + une ligne que :

- pour un système classique les lois $\mathbb{P}_t$ de la variation par unité de temps de l'entropie et $\widehat{\mathbb{P}}_t$ de son opposé vérifient

$$\frac{\mathrm{d}\widehat{\mathbb{P}}_t}{\mathrm{d}\mathbb{P}_t}(s) = \mathrm{e}^{-s}$$

"relation de fluctuation"

- pour un système quantique les lois μ_t et $\hat{\mu}_t$ de $\frac{1}{t}\big(\tau^t(S) - S\big)$ et son opposé dans l'état ρ ne vérifient pas cette relation.

si $\dim \mathcal{H} < \infty$, pour $M = \sum_m m\,\pi_m$, ρ et $\tau^t = \mathrm{e}^{+\mathrm{i}tH} \cdot \mathrm{e}^{-\mathrm{i}tH}$ fixés,

on propose le protocole suivant :

- on mesure M, on obtient le résultat aléatoire m_1
- on laisse le système post-mesure évoluer par τ^t
- on mesure M, on obtient le résultat aléatoire m_2

la variation de M par “mesure à deux temps” est $\delta_t M = m_2 - m_1$

“vraie” variable aléatoire : pas de problème de loi jointe !

n’est pas canoniquement associée à la mesure d’une observable, mais correspond à une expérience explicite la règle de Born donne

$$\mathbb{P}(\delta_t M = \delta) = \sum_{m_2 - m_1 = \delta} \mathrm{tr}\left(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}tH} \pi_{m_1} \rho\, \pi_{m_1} \mathrm{e}^{+\mathrm{i}tH} \pi_{m_2}\right).$$

on a immédiatement :

$$\mathbb{E}(\mathrm{e}^{-\alpha \delta_t M}) = \mathrm{tr}\left(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}tH} \tilde{\rho}_M\, \mathrm{e}^{+\alpha M} \mathrm{e}^{+\mathrm{i}tH} \mathrm{e}^{-\alpha M}\right).$$

où $\tilde{\rho}_M = \sum_m \pi_m \rho\, \pi_m$

remarquons que

$$\mathbb{E}(\delta_t M) = \rho\big(\tau^t(M) - M\big) \qquad \mathbb{E}(\delta_t M^2) = \rho\big((\tau^t(M) - M)^2\big)$$

les deux premiers moments sont identiques pour mesures à deux temps et quantification naïve !

si $S = \sum_i \beta_i H_i$, alors $\rho = \mathrm{e}^{-S} = \tilde{\rho}_S$ et

$$\mathbb{E}(\mathrm{e}^{-\alpha\delta_t S}) = \mathrm{tr}\left(\rho_t^{1-\alpha}\rho^{\alpha}\right)$$

$$(\rho_t = \rho \circ \tau^t)$$

si le système est IRT, on montre encore en une ligne que

$$\mathbb{E}(\mathrm{e}^{-\alpha\delta_t S}) = \mathbb{E}(\mathrm{e}^{-(1-\alpha)\delta_t S})$$

et donc

$$\frac{\mathrm{d}\widehat{\mathbb{P}}_{\delta_t S}}{\mathrm{d}\mathbb{P}_{\delta_t S}}(s) = \mathrm{e}^{-s}$$

bien ! mais cette définition semble limitée au cas $\dim \mathcal{H} < \infty$

Jaksic–Ogata–P–Pillet [**P11**] montre que

- cette définition (Kurchan ’00), concrète mais limitée aux observables discrètes,
- et une fonctionnelle de Tasaki–Matsui ’01 qui s’exprime en termes d’objets modulaires (théorie Tomita–Takesaki)

coïncident en dimension finie

Jaksic–Ogata–P–Pillet [**P11**] montre que

- cette définition (Kurchan '00), concrète mais limitée aux observables discrètes,
- et une fonctionnelle de Tasaki–Matsui '01 qui s'exprime en termes d'objets modulaires (théorie Tomita–Takesaki)

coïncident en dimension finie

or ces objets ont des avatars sur toute algèbre de von Neumann et la théorie Tomita–Takesaki est “robuste” (on a de bonnes convergences dans un schéma de discrétisation)

cette remarque donne une formulation générale mais concrète à la statistique des mesures à deux temps pour des systèmes même après limite thermodynamique

$$\frac{\mathrm{d}\widehat{\mathbb{P}}_{\delta_t S}}{\mathrm{d}\mathbb{P}_{\delta_t S}}(s) = \mathrm{e}^{-s}$$

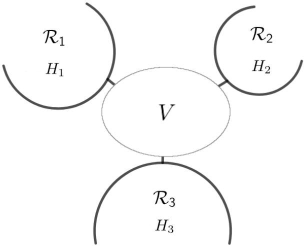
dit qu'une augmentation de l'entropie de s est exponentiellement plus probable qu'une diminution de s, avec un taux *universel*

"version trajectorielle du second principe de la thermodynamique"

cette relation est plus forte que la formulation "en moyenne"

$$\mathbb{E}(\mathrm{e}^{-\alpha\delta_t S}) = \mathbb{E}(\mathrm{e}^{-(1-\alpha)\delta_t S}) \overset{\alpha=1}{\Longrightarrow} \mathbb{E}(\mathrm{e}^{-\delta_t S}) = 1 \overset{\text{Jensen}}{\Longrightarrow} \mathbb{E}(\delta_t S) \geq 0$$

et pour le premier principe ?



$\boldsymbol{E} = (H_1, \ldots, H_d)$, $H = \sum_i H_i + V$

les H_i commutent

$\hookrightarrow$ mesurables simultanément

$$\mathbb{E}(\mathrm{e}^{-\vec{\alpha}.\delta_t \boldsymbol{E}}) = \mathrm{tr}\left(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}tH} \rho\, \mathrm{e}^{+\vec{\alpha}.\boldsymbol{E}} \mathrm{e}^{+\mathrm{i}tH} \mathrm{e}^{-\vec{\alpha}.\boldsymbol{E}}\right).$$

on va supposer que

$$\chi_+(\vec{\alpha}) := \lim_{t\to\infty} \frac{1}{t} \log \mathbb{E}(\mathrm{e}^{-\vec{\alpha}.\delta_t \boldsymbol{E}})$$

existe dans $[-\infty, +\infty]$ pour tout $\vec{\alpha}$

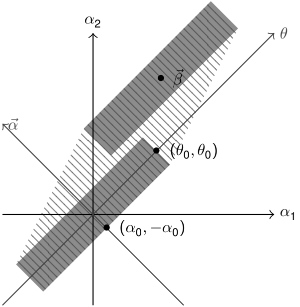
on définit des conditions disant que

$$V_{\vec{\alpha}} := \mathrm{e}^{+\frac{1}{2}\vec{\alpha}.\boldsymbol{E}}\, V\, \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\vec{\alpha}.\boldsymbol{E}}$$

est uniformément borné pour $\vec{\alpha}$ au voisinage de $\vec{0}$ et de $\vec{\beta}$

$$S_{\vec{\beta}}(\alpha_0, \theta_0) :=$$

$$\sup_{\|\vec{\alpha}\|\leq\alpha_0} \|V_{\vec{\alpha}+\theta\vec{1}}\| + \sup_{\|\vec{\alpha}\|\leq\alpha_0} \|V_{\vec{\beta}+\vec{\alpha}+\theta\vec{1}}\|$$



Théorème (Benoist–Panati–P [P21])

si $\chi_+(\vec{\alpha})$ existe pour tout $\vec{\alpha}$ et que $S_{\vec{\beta}}(\alpha_0, \theta_0) < +\infty$ pour un $\alpha_0 > 0$, alors $\chi_+(\vec{\alpha} + \theta\vec{1}) = \chi_+(\vec{\alpha})$ pour $\|\vec{\alpha}\| < \alpha_0$, $|\theta| < \theta_0$

dans ce cas $\frac{1}{t}\delta_t \boldsymbol{E}$ vérifie un principe de grandes déviations avec fonction de taux I qui vérifie $I(\vec{s}) \geq \theta_0 |\sum_i s_i|$.

le long d'une trajectoire, la probabilité de non conservation de la chaleur décroît exponentiellement vite

"version trajectorielle du premier principe de la thermodynamique"

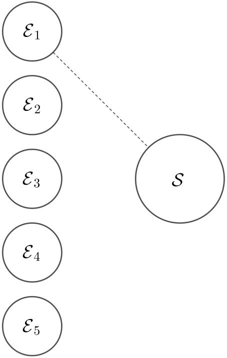
sans hypothèse du type S_β on peut avoir $\mathbb{E}(\|\delta_t \boldsymbol{E}\|^4) = +\infty \quad \forall t$

(Benoist–Panati–Raquépas '19)

même un V borné peut induire des grandes transitions d'énergie

- symétrie $\chi_+(\vec{\alpha}+\theta\vec{1}) = \chi_+(\vec{\alpha})$ implique un premier principe trajectoriel (Andrieux–Gaspard–Monnai–Tasaki ’09)
- symétrie $\chi_+(\alpha\vec{\beta}) = \chi_+(\vec{\beta}-\alpha\vec{\beta})$ implique un deuxième principe trajectoriel (Evans–Searles ’94)
- symétrie AGMT + symétrie ES impliquent pour un système IRT la symétrie $L_{i,j} = L_{j,i}$ (relations d’Onsager)
- elles impliquent sans doute plus que ça !
- si par exemple χ_+ existe sur un voisinage complexe, on a un TCL pour $\delta_t \boldsymbol{E}$ avec covariance limite $\big(2L(\Phi_i,\Phi_j)\big)_{i,j}$

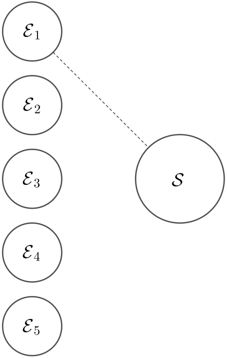
mesures indirectes d'un système : les mesures



si $\mathcal{S}$ d'espace d'état $\mathcal{H}$ ($\dim \mathcal{H} < \infty$) est initialement dans l'état ρ_0

avec proba $\mathrm{tr}\left(U(\rho_0 \otimes \xi)U^* \mathrm{Id} \otimes \pi_{m_1}\right)$:

- résultat de mesure m_1
- $\mathcal{S} \rightsquigarrow \frac{\mathrm{tr}_{\mathcal{E}_1}\left(\mathrm{Id}\otimes\pi_{m_1} U(\rho_0\otimes\xi)U^* \mathrm{Id}\otimes\pi_{m_1}\right)}{\mathrm{tr}\left(\mathrm{Id}\otimes\pi_{m_1} U(\rho_0\otimes\xi)U^* \mathrm{Id}\otimes\pi_{m_1}\right)}$



si $\mathcal{S}$ d'espace d'état $\mathcal{H}$ ($\dim \mathcal{H} < \infty$) est initialement dans l'état ρ_0

avec proba $\mathrm{tr}\left(\phi_{m_1}(\rho_0)\right)$:

- résultat de mesure m_1
- $\mathcal{S} \rightsquigarrow \frac{\phi_{m_1}(\rho_0)}{\mathrm{tr}\left(\phi_{m_1}(\rho_0)\right)} =: \rho_1$

où

$$\phi_m(\rho) = \mathrm{tr}_{\mathcal{E}_1}\left(\mathrm{Id}\otimes\pi_m U(\rho\otimes\xi)U^*\mathrm{Id}\otimes\pi_m\right)$$

est *complètement positive*

et $\phi = \sum_m \phi_m$ vérifie $\mathrm{tr}\circ\phi = \mathrm{tr}$

$\mathsf{tr} \circ \phi = \mathsf{tr}$ implique que

$$\mathbb{P}_{\rho_0}(m_1 \ldots, m_n) = \mathsf{tr}\left(\phi_{m_n} \circ \ldots \circ \phi_{m_1}(\rho_0)\right)$$

définit une probabilité sur $\Omega = (\mathsf{sp}\, M)^{\mathbb{N}}$

on définit deux variables aléatoires : pour $\omega = (m_1, m_2, \ldots)$

$$M_n(\omega) = m_n$$
$$\rho_n(\omega) = \frac{\phi_{m_n} \circ \ldots \circ \phi_{m_1}(\rho_0)}{\mathsf{tr}\left(\phi_{m_n} \circ \ldots \circ \phi_{m_1}(\rho_0)\right)}$$

ceci “contient” les chaînes de Markov

$$\rho_0 = \sum_{i \in V} p_i |i\rangle\langle i| \text{ et } \phi_{i,j}(\eta) = t_{i,j} \langle j, \eta j\rangle |i\rangle\langle i| \Longrightarrow \rho_n = \sum_{i \in V} (t^n p)_i |i\rangle\langle i|$$

on va s'intéresser :

- aux propriétés des résultats de mesures $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$
- au comportement des états $(\rho_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $\mathcal{S}$
- mais pas aux états de la "chaîne" $\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2 \ldots$

voir Fannes–Nachtergaele–Werner '92, '94

ϕ application sur $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ complètement positive et qui préserve la trace
"canal quantique"

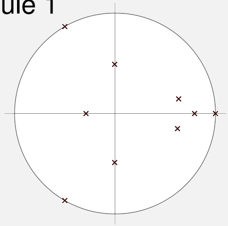
Définition [Davies] '70

Φ est irréductible s'il n'existe pas de sous-espace strict $\mathcal{H}'$ de $\mathcal{H}$ tel que $\mathcal{B}(\mathcal{H}')$ est stable par Φ

Théorème [Evans–Hoegh-Krøhn] '78

si Φ est irréductible, ses valeurs propres de module 1

- sont simples,
- forment un sous-groupe du cercle unité,
- l'invariant est un état fidèle $\rho_{\mathrm{inv}} > 0$



on a immédiatement :

- ϕ irréductible et $\rho_0 = \rho_{\mathrm{inv}} \Longrightarrow \mathbb{P}_{\rho_0}$ est ergodique
- si ϕ a période 1 alors $\phi^n(\rho) \underset{n\to\infty}{\to} \rho_{\mathrm{inv}}$

on montre facilement :

Théorème (Carbone–P [P13])

si ϕ est irréductible, les processus de comptage $(N_n)_n$ associés à $(M_n)_n$ vérifient loi des grands nombres, théorème de la limite centrale et principe de grandes déviations de fonction de taux

$$I(\nu) = \sup_{\alpha\in\mathbb{R}^d} \big(\langle\alpha,\nu\rangle - \log\lambda^{(\alpha)}\big)$$

où $\lambda^{(\alpha)}$ est le rayon spectral de $\sum_i \mathrm{e}^{\alpha_i}\phi_{m_i}$

des résultats de mesures déterminent-ils la flèche du temps ?

si l'on observe une suite de résultats de mesures, sait-on dire s'ils sont donnés “à l'endroit” ou “à l'envers” ?

le renversement de $(i_1, \ldots, i_n) \in V^n$ sera $(\theta(i_n), \ldots, \theta(i_1))$

θ une involution de V

si l'on suppose que

l'état initial ρ est fidèle et ϕ-invariant

on peut alors définir $\widehat{\mathbb{P}}_\rho$ par

$$\widehat{\mathbb{P}}_\rho(i_1, \ldots, i_n) = \mathbb{P}_\rho(\theta(i_n), \ldots, \theta(i_1))$$

et une suite de variables aléatoires

$$\varsigma_n(\omega) = \log \frac{\mathbb{P}_\rho(i_1, \ldots, i_n)}{\widehat{\mathbb{P}}_\rho(i_1, \ldots, i_n)}$$

production d'entropie le long de $i_1, \ldots, i_n$, Eyink–Lebowitz '90

Théorème (Benoist–Jaksic–P–Pillet [P20])

- $\mathrm{ep} := \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\,\mathbb{E}(\varsigma_n)$ existe dans $[0, +\infty]$
  taux moyen de production d'entropie
- $\sigma = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\,\varsigma_n$ existe $\mathbb{P}_\rho$-p.s. dans $\mathbb{R}$, et dans $\mathrm{L}^1(\mathbb{P}_\rho)$ si $\mathrm{ep} < \infty$
  production d'entropie le long de la trajectoire $\omega \in \Omega$

si ϕ est irréductible, alors $\sigma = 0$ ssi $\mathbb{P}_\rho = \widehat{\mathbb{P}}_\rho$.

en termes de test de la flèche du temps, on a

Théorème (Benoist–Jaksic–P–Pillet [P20])

si ϕ est irréductible, alors

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log \min \left(\widehat{\mathbb{P}}_\rho(T_n) \text{ pour } T_n \in \Omega_n \text{ avec } \mathbb{P}_\rho(T_n^c) \leq \epsilon \right) = -\mathrm{ep}.$$

supposons qu'il existe $C > 0$ et $\tau \geq 0$ tels que pour tous $i_1, \dots, i_m$ et $j_1, \dots, j_n$ il existe $k_1, \dots, k_\ell$ avec $\ell \leq \tau$, tels que

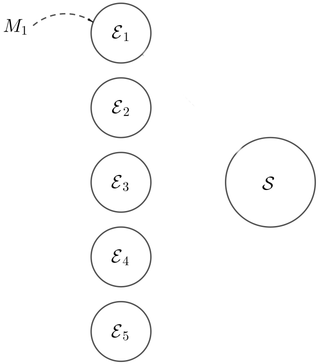
$$\mathbb{P}_\rho(i_1, \dots, i_m, k_1, \dots, k_\ell, j_1, \dots, j_n) \geq C\, \mathbb{P}_\rho(i_1, \dots, i_m)\, \mathbb{P}_\rho(j_1, \dots, j_n)$$
$$\widehat{\mathbb{P}}_\rho(i_1, \dots, i_m, k_1, \dots, k_\ell, j_1, \dots, j_n) \geq C\, \widehat{\mathbb{P}}_\rho(i_1, \dots, i_m)\, \widehat{\mathbb{P}}_\rho(j_1, \dots, j_n).$$

Théorème (Benoist–Jaksic–P–Pillet [P20])

pour tout $\alpha \in]0, 1[$, la limite $e(\alpha) := \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log \mathbb{E}(\mathrm{e}^{-\alpha\varsigma_n})$ existe dans $]-\infty, +\infty]$ et si l'on peut imposer $\tau = 0$ alors e est partout finie et différentiable.

si $\tau = 0$ alors on a un principe de grandes déviations pour ς_n, ce qui donne des résultats par exemple pour les tests symétriques

(contre-exemples dans Benoist–Cuneo–Jakobson–Jaksic–Pillet) si chaque sonde est mesurée avant et après interaction



on a immédiatement loi des grands nombres, théorème de la limite centrale, principe de grande déviation pour les couples (i, j) de mesures

et donc pour des marginales comme $j - i$

on voudrait considérer

$$V = \mathrm{sp}\, M \times \mathrm{sp}\, M \qquad \theta(i,j) = (j,i)$$

$\hookrightarrow$ renversement de $\big((i_1,j_1),\ldots,(i_n,j_n)\big)$ est $\big((j_n,i_n),\ldots,(i_1,j_1)\big)$

mais

- les résultats ci-dessus ne s'appliquent que si le système est IRT
- renversement non physique dans un processus de mesure

(ne prend pas en compte la dynamique)

on propose une autre définition du renversement :

(les valeurs propres des $H_{\mathcal{E}}$ sont notées i, j)

on définit le protocole en avant :
pour $k = 1 \nearrow n$

- on mesure $H_{\mathcal{E}_k}$ $\qquad i_k$
- on laisse $\mathcal{S} + \mathcal{E}_k$ évoluer par U
- on mesure $H_{\mathcal{E}_k}$ $\qquad j_k$

on propose une autre définition du renversement :

(les valeurs propres des $H_{\mathcal{E}}$ sont notées i, j)

on définit le protocole en avant/en arrière :

pour $k = 1 \nearrow n$ / $n \searrow 1$

- on mesure $H_{\mathcal{E}_k}$ $\qquad$ i_k / j_k
- on laisse $\mathcal{S} + \mathcal{E}_k$ évoluer par U / U^*
- on mesure $H_{\mathcal{E}_k}$ $\qquad$ j_k / i_k

on peut alors exprimer les deux probabilités $\mathbb{P}^F(\vec{i}, \vec{j})$ et $\mathbb{P}^B(\vec{i}, \vec{j})$

on montre alors, si par exemple les états ξ sont "thermiques" :

$$\log \frac{\mathbb{P}^F(\vec{i},\vec{j})}{\mathbb{P}^B(\vec{i},\vec{j})} = \beta \sum_k (j_k - i_k)$$

qui est le résultat cumulé des mesures à deux temps des $H_{\mathcal{E}_k}$

donc $\log \frac{\mathbb{P}^F(\vec{i},\vec{j})}{\mathbb{P}^B(\vec{i},\vec{j})}$ vérifie un principe de grandes déviations

utilisé dans Hanson–Joye–P–Raquépas [**P21**] pour donner une formulation trajectorielle du *principe de Landauer*

(dans un cadre adiabatique : avec des $\mathcal{E}_k$ qui varient, mais lentement)

mesures indirectes d’un système : le système

on revient à

$$\rho_n(\omega) = \frac{\phi_{i_n} \circ \ldots \circ \phi_{i_1}(\rho_0)}{\mathrm{tr}\left(\phi_{i_n} \circ \ldots \circ \phi_{i_1}(\rho_0)\right)}$$

le processus $(\rho_n)_n$ est une chaîne de Markov :

$$\rho_{n+1} = \frac{\phi_i(\rho_n)}{\mathrm{tr}(\phi_i(\rho_n))} \quad \text{avec probabilité } \mathrm{tr}(\phi_i(\rho_n))$$

et $\phi = \sum_i \phi_i$ est l'évolution moyenne :

$$\mathbb{E}(\rho_n) = \phi^n(\rho_0)$$

Théorème [Kümmerer–Maassen '04]

si ϕ est irréductible alors $\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n} \rho_k \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \rho_{\mathrm{inv}}$ $\mathbb{P}_\rho$-p.s.

supposons que les instruments ϕ_i soient *parfaits* : $\phi(\eta) = V_i \eta V_i^*$

correspond à M non dégénérée et ξ état pur

alors l'évolution préserve la pureté : si ρ_n est pur, ρ_{n+1} l'est aussi

(Pur) il n'existe aucun projecteur π de rang ≥ 2 tel que $\forall i_1, \ldots, i_n$,
$\pi V_{i_n}^* \ldots V_{i_1}^* V_{i_1} \ldots V_{i_n} \pi$ est proportionnel à π

Théorème [Kümmerer–Maassen '06]

si (**Pur**) est vérifiée alors

$$\mathrm{tr}(\rho_n^2) \underset{n\to\infty}{\to} 1 \ \mathbb{P}_\rho\text{-p.s.}$$

donc ρ_n est asymptotiquement pur

on suppose (**Pur**) donc on va se restreindre aux états purs

$$\left.\begin{array}{c} \hat{x} \in \mathrm{P}\mathcal{H} \\ V \in \mathcal{B}(\mathcal{H}) \end{array}\right\} \rightsquigarrow V.\hat{x} := \frac{Vx}{\|Vx\|} \text{ si } Vx \neq 0$$

on considère donc la chaîne de Markov définie par

$$\hat{x}_{n+1} = V_i.\hat{x}_n \text{ avec probabilité } \|V_i x_n\|^2$$

- c'est une chaîne de Markov singulière
- s'écrit en fonction d'un produit aléatoire de matrices

(on y reviendra)

on définit une métrique sur $\mathrm{P}\mathcal{H}$ par

$$\mathrm{dist}(\hat{x}, \hat{y}) = \left(1 - \left|\frac{\langle x, y\rangle}{\|x\|\,\|y\|}\right|^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

et la distance de Wasserstein d'ordre 1 par

$$W_1(\sigma, \tau) = \sup_{f \in \mathrm{Lip}_1(\mathrm{P}\mathcal{H})} \left| \int_X f \,\mathrm{d}\sigma - \int_X f \,\mathrm{d}\tau \right|$$

Théorème (Benoist–Fraas–P–Pellegrini [P24])

supposons (**Pur**), et que Φ admet un unique état invariant, alors la chaîne de Markov admet une unique probabilité invariante ν_{inv} et il existe $z \in \{1, \ldots, \dim \mathcal{H}\}$, $C > 0$ et $0 < \lambda < 1$ tels que, quelle que soit la loi de $\hat{x}_0$,

$$W_1\left(\tfrac{1}{z}\sum_{r=0}^{z-1} \mathbb{P}_{\hat{x}_{zn+r}}, \nu_{\mathrm{inv}}\right) \leq C\lambda^n$$

- $\mathrm{P}\mathcal{H}$ étant compact, convergence pour $W_1 \Leftrightarrow$ convergence en loi
- pas de convergence en variation totale

  (si $\hat{x}_0$ a une loi diffuse/atomique, c'est encore le cas pour $\hat{x}_n$)
- le z est la période de ϕ, le λ est inconnu
- sans l'hypothèse d'unicité de l'état invariant de ϕ : les probas invariantes forment un simplexe de points extrémaux associés aux "blocs irréductibles" de ϕ (voir Carbone–P [**P14**])
- sans l'hypothèse (**Pur**) : $\emptyset$
- permet d'améliorer le thm ergodique de Kümmerer–Maassen : $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n} f(\hat{x}_k) = \int f \,\mathrm{d}\nu_{\mathrm{inv}}$ p.s. pour f continue.

même conclusions par un cas particulier de Guivarc'h–Le Page '16

sous les hypothèses

- les V_i sont inversibles,
- la famille $(V_i)_i$ est *fortement irréductible*
- la famille $(V_i)_i$ est *contractante*

nos hypothèses sont toutes plus faibles :

- nous n'utilisons pas l'inversibilité,
- $(V_i)_i$ fortement irr. $\Rightarrow \phi$ irréductible $\Rightarrow \phi$ a un unique invariant
- si les V_i inversibles et $(V_i)_i$ fortement irr. : (**Pur**) $\Leftrightarrow$ contractivité.

équation maîtresse stochastique :

$$\begin{aligned} \mathrm{d}\rho_t =& \mathcal{L}(\rho_{t-})\,\mathrm{d}t \\ &+ \quad \textstyle\sum_{i\in B}\big(L_i\rho_{t-} + \rho_{t-}V_i^* - \mathrm{tr}\,\big(\rho_{t-}(V_i + V_i^*)\big)\rho_{t-}\big)\,\mathrm{d}B_i(t) \\ &+ \quad \textstyle\sum_{j\in P}\big(\frac{V_j\rho_{t-}V_j^*}{\mathrm{tr}(V_j\rho_{t-}V_j^*)} - \rho_{t-}\big)\big(\mathrm{d}N_j(t) - \mathrm{tr}(V_j\rho_{t-}V_j^*)\,\mathrm{d}t\big), \end{aligned}$$

où $(W_i, i \in B)$ sont des browniens standard et $(N_j, j \in P)$ sont des processus de Poisson d'intensités $t \mapsto \big(\int_0^t \mathrm{tr}(C_j\rho_{s-}C_j^*)\mathrm{d}s\big)$.

se justifie à partir des modèles discrets, voir Pellegrini '08, '10

Benoist–Fraas–P–Pellegrini [**P27**] montrent des résultats analogues à ceux du cas discret

et maintenant ?

quelques questions

- peut-on prouver des principes de grandes déviations pour $\hat{x}_n$?
- la condition (**Pur**) : peut-on exhiber des conditions suffisantes utiles ?
- est-elle vraie pour un choix “typique” de famille $(\phi_i)_{i\in V}$?
- randomiser le choix de $(\phi_i)_{i\in V}$ régularise la chaîne de Markov : peut-on relier les propriétés de cette régularisation à celle de la chaîne $(\hat{x}_n)_n$?
- quelles sont les propriétés de $\nu_{\rm inv}$? dans quelle mesure dépendent-elles de ϕ seul, ou de la décomposition $\phi = \sum_i \phi_i$?
- a-t-on un phénomène de concentration de $\nu_{\rm inv}$ quand la dimension de $\mathcal{S}$ tend vers l'infini ?
- peut-on relier la réversibilité du canal ϕ à celle de la chaîne $(\hat{x}_n)_n$?

Merci à tous