

UNIVERSITÉ PARIS-SUD

École doctorale de mathématiques Hadamard (ED 574)
Laboratoire de mathématique d'Orsay (UMR 8628 CNRS)

Mémoire présenté pour l'obtention du

Diplôme d'habilitation à diriger les recherches

Discipline : Mathématiques

par

Yan PAUTRAT

Probabilités classiques pour la mécanique statistique quantique

Rapporteurs :
DJALIL CHAFAÏ
KRZYSZTOF GAWEDZKI
YVES LE JAN

Date de soutenance : 29 novembre 2019

Composition du jury :
JEAN-MARIE BARBAROUX (Examineur)
MICHEL BAUER (Examineur)
DJALIL CHAFAÏ (Rapporteur)
KRZYSZTOF GAWEDZKI (Rapporteur)
STÉPHANE NONNENMACHER (Examineur)
DIMITRI PÉTRITIS (Examineur)
CHRISTOPHE TEXIER (Examineur)

BIBLIOGRAPHIE PERSONNELLE

- [P27] Tristan Benoist, Martin Fraas, Yan Pautrat et Clément Pellegrini. Invariant measure for stochastic Schrödinger equations. Soumis.
- [P26] Tristan Benoist, Noé Cunéo, Vojkan Jakšić, Yan Pautrat et Claude-Alain Pillet. On entropy production of repeated quantum measurements III : A note on detailed balance. En préparation.
- [P25] Ivan Bardet, Hugo Bringuier, Yan Pautrat et Clément Pellegrini. Recurrence and transience of continuous-time open quantum walks. dans *Séminaire de Probabilités L*, volume 2252 des *Lecture Notes in Math.*, 2019.
- [P24] Tristan Benoist, Martin Fraas, Yan Pautrat et Clément Pellegrini. Invariant measure for quantum trajectories. *Probab. Theory Relat. Fields*, 174(1), 2019.
- [P23] Yan Pautrat. Notes on open quantum walks. *Notes d'un mini-cours à l'Institut Henri Poincaré, décembre 2018*. En préparation.
- [P22] Eric P. Hanson, Alain Joye, Yan Pautrat et Renaud Raquépas. Landauer's principle for trajectories of repeated interaction systems. *Ann. Henri Poincaré*, 19(7), 2018.
- [P21] Tristan Benoist, Annalisa Panati et Yan Pautrat. Heat conservation and fluctuations for open quantum systems in the two-time measurement picture. *arXiv :1810.09999*, à paraître dans *J. Stat. Phys.*, 2019.
- [P20] Tristan Benoist, Vojkan Jakšić, Yan Pautrat et Claude-Alain Pillet. On entropy production of repeated quantum measurements I. General theory. *Comm. Math. Phys.*, 357(1), 2018.
- [P19] Eric P. Hanson, Alain Joye, Yan Pautrat et Renaud Raquépas. Landauer's principle in repeated interaction systems. *Comm. Math. Phys.*, 349(1), 2017.
- [P18] Nilanjana Datta, Yan Pautrat et Cambyse Rouzé. Contractivity properties of a quantum diffusion semigroup. *J. Math. Phys.*, 58(1) :012205, 24, 2017.
- [P17] Ivan Bardet, Denis Bernard et Yan Pautrat. Passage times, exit times and Dirichlet problems for open quantum walks. *J. Stat. Phys.*, 167(2), 2017.
- [P16] Nilanjana Datta, Yan Pautrat et Cambyse Rouzé. Second-order asymptotics for quantum hypothesis testing in settings beyond i.i.d.—quantum lattice systems and more. *J. Math. Phys.*, 57(6) :062207, 26, 2016.
- [P15] Raffaella Carbone et Yan Pautrat. Open quantum random walks : reducibility, period, ergodic properties. *Ann. Henri Poincaré*, 17(1), 2016.
- [P14] Raffaella Carbone et Yan Pautrat. Irreducible decompositions and stationary states of quantum channels. *Rep. Math. Phys.*, 77(3), 2016.
- [P13] Raffaella Carbone et Yan Pautrat. Homogeneous open quantum random walks on a lattice. *J. Stat. Phys.*, 160(5), 2015.

- [P12] Tristan Benoist, Vojkan Jakšić, Annalisa Panati, Yan Pautrat et Claude-Alain Pillet. Full statistics of energy conservation in two-time measurement protocols. *Phys. Rev. E*, 92 :032115, 2015.
- [P11] Vojkan Jakšić, Yoshiko Ogata, Yan Pautrat et Claude-Alain Pillet. Entropic fluctuations in quantum statistical mechanics. an introduction. *Quantum Theory from Small to Large Scales, Lecture Notes of the Les Houches Summer School*, 95(978-0-19-965249-5), 2012.
- [P10] Vojkan Jakšić, Yan Pautrat et Claude-Alain Pillet. A quantum central limit theorem for sums of independent identically distributed random variables. *J. Math. Phys.*, 51(1) :015208, 8, 2010.
- [P9] Vojkan Jakšić, Yan Pautrat et Claude-Alain Pillet. A non-commutative Lévy-Cramér continuity theorem. *Markov Process. Related Fields*, 16(1), 2010.
- [P8] Vojkan Jakšić, Yan Pautrat et Claude-Alain Pillet. Central limit theorem for locally interacting Fermi gas. *Comm. Math. Phys.*, 285(1), 2009.
- [P7] Walter Aschbacher, Vojkan Jakšić, Yan Pautrat et Claude-Alain Pillet. Topics in non-equilibrium quantum statistical mechanics. Dans *Open quantum systems. III*, volume 1882 de *Lecture Notes in Math.*, 2007.
- [P6] Walter Aschbacher, Vojkan Jakšić, Yan Pautrat et Claude-Alain Pillet. Transport properties of quasi-free fermions. *J. Math. Phys.*, 48(3) :032101, 28, 2007.
- [P5] Yan Pautrat. Kernel and integral representations of operators on infinite dimensional toy Fock spaces. Dans *In memoriam Paul-André Meyer : Séminaire de Probabilités XXXIX*, volume 1874 des *Lecture Notes in Math.*, 2006.
- [P4] Stéphane Attal et Yan Pautrat. From repeated to continuous quantum interactions. *Ann. Henri Poincaré*, 7(1), 2006.
- [P3] Yan Pautrat. From Pauli matrices to quantum Itô formula. *Math. Phys. Anal. Geom.*, 8(2), 2005.
- [P2] Stéphane Attal et Yan Pautrat. From $(n + 1)$ -level atom chains to n -dimensional noises. *Ann. Inst. H. Poincaré Probab. Statist.*, 41(3), 2005.
- [P1] Yan Pautrat. Stochastic integral representations of second quantization operators. *J. Funct. Anal.*, 208(1), 2004.

BIBLIOGRAPHIE GÉNÉRALE

- [1] Luigi Accardi, Alberto Frigerio et Yun Gang Lu. The weak coupling limit as a quantum functional central limit. *Comm. Math. Phys.*, 131(3) :537–570, 1990.
- [2] Luigi Accardi et Yun Gang Lu. The number process as low density limit of Hamiltonian models. *Comm. Math. Phys.*, 141(1) :9–39, 1991.
- [3] Yakir Aharonov, Peter G. Bergmann et Joel L. Lebowitz. Time symmetry in the quantum process of measurement. *Phys. Rev. (2)*, 134 :B1410–B1416, 1964.
- [4] Vladimir V. Aizenstadt et Vadim A. Malyshev. Spin interaction with an ideal Fermi gas. *J. Statist. Phys.*, 48(1-2) :51–68, 1987.
- [5] David Andrieux, Pierre Gaspard, Takaaki Monnai et Shuichi Tasaki. The fluctuation theorem for currents in open quantum systems. *New Journal of Physics*, 11(4) :043014, 2009.
- [6] Huzihiro Araki et Tetsuya Masuda. Positive cones and L_p -spaces for von Neumann algebras. *Publ. Res. Inst. Math. Sci.*, 18(2) :759–831 (339–411), 1982.
- [7] Stéphane Attal, Francesco Petruccione, Christophe Sabot et Ilya Sinayskiy. Open quantum random walks. *J. Stat. Phys.*, 147(4) :832–852, 2012.
- [8] Stéphane Attal, Nadine Guillotin-Plantard et Christophe Sabot. Central limit theorems for open quantum random walks and quantum measurement records. *Ann. Henri Poincaré*, 16(1) :15–43, 2015.
- [9] Stéphane Attal et Alain Joye. The Langevin equation for a quantum heat bath. *J. Funct. Anal.*, 247(2) :253–288, 2007.
- [10] Koenaard M.R. Audenaert et Nilanjana Datta. α - z -Rényi relative entropies. *J. Math. Phys.*, 56(2) :022202, 16, 2015.
- [11] Joseph E. Avron, Martin Fraas et Gian Michele Graf. Adiabatic response for Lindblad dynamics. *J. Stat. Phys.*, 148(5) :800–823, 2012.
- [12] Joseph E. Avron, Martin Fraas, Gian Michele Graf et Philip Grech. Adiabatic theorems for generators of contracting evolutions. *Comm. Math. Phys.*, 314(1) :163–191, 2012.
- [13] Alberto Barchielli et Viacheslav P. Belavkin. Measurements continuous in time and a posteriori states in quantum mechanics. *J. Phys. A*, 24(7) :1495–1514, 1991.
- [14] Alberto Barchielli et Anna M. Paganoni. On the asymptotic behaviour of some stochastic differential equations for quantum states. *Infın. Dimens. Anal. Quantum Probab. Relat. Top.*, 6(2) :223–243, 2003.
- [15] Tiago B. Batalhão, Alexandre M. Souza, Laura Mazzola, Ruben Auccaise, Roberto S. Sarthour, Ivan S. Oliveira, John Goold, Gabriele De Chiara, Mauro Paternostro et Roberto M. Serra. Experimental reconstruction of work distribution and study of fluctuation relations in a closed quantum system. *Phys. Rev. Lett.*, 113 :140601, 2014.

- [16] Michel Bauer, Denis Bernard et Antoine Tilloy. The open quantum Brownian motions. *J. Stat. Mech. Theory Exp.*, (9) :p09001, 48, 2014.
- [17] Tristan Benoist et Ion Nechita. On bipartite unitary matrices generating subalgebra-preserving quantum operations. *Linear Algebra Appl.*, (521) :70–103, 2016.
- [18] Tristan Benoist, Noé Cuneo, Dmitry Jakobson, Vojkan Jakšić et Claude-Alain Pillet. On entropy production of repeated quantum measurements II. examples and extensions. En préparation.
- [19] Tristan Benoist, Martin Fraas, Vojkan Jakšić et Claude-Alain Pillet. Full statistics of erasure processes : Isothermal adiabatic theory and a statistical Landauer principle. *Rev. Roumaine Math. Pures Appl.*, (62) :259–286, 2017.
- [20] Tristan Benoist, Annalisa Panati et Renaud Raquépas. Control of fluctuations and heavy tails for heat variation in the two-time measurement framework. *Annales Henri Poincaré*, 20(2) :631–674, 2019.
- [21] Rajendra Bhatia. *Matrix analysis*, volume 169 de *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, 1997.
- [22] Patrick Billingsley. *Probability and measure. Édition anniversaire*. Hoboken, NJ : John Wiley & Sons, 2012.
- [23] Max Born et Vladimir Fock. Beweis des Adiabatenatzes. *Zeitschrift für Physik*, 51 :165–180, 1928.
- [24] Dmitriy D. Botvich et Hans Maassen. A Galton-Watson estimate for Dyson series. *Ann. Henri Poincaré*, 10(6) :1141–1158, 2009.
- [25] Dmitriy D. Botvich et Vadim A. Malyshev. Unitary equivalence of temperature dynamics for ideal and locally perturbed Fermi-gas. *Comm. Math. Phys.*, 91(3) :301–312, 1983.
- [26] Philippe Bougerol et Jean Lacroix. *Products of random matrices with applications to Schrödinger operators*, volume 8 de *Progress in Probability and Statistics*. Birkhäuser Boston, Inc., Boston, MA, 1985.
- [27] Jean-François Bougron et Laurent Bruneau. Linear response theory and entropic fluctuations in repeated interaction systems. En préparation.
- [28] Rufus Bowen. *Equilibrium states et the ergodic theory of Anosov diffeomorphisms*, volume 470 de *Lecture Notes in Mathematics*. Springer-Verlag, Berlin, édition révisée, 2008.
- [29] Ola Bratteli et Derek W. Robinson. *Operator algebras and quantum statistical mechanics. 1*. Texts and Monographs in Physics. Springer-Verlag, New York, deuxième édition, 1987.
- [30] Ola Bratteli et Derek W. Robinson. *Operator algebras and quantum statistical mechanics. 2*. Texts and Monographs in Physics. Springer-Verlag, Berlin, deuxième édition, 1997.
- [31] Laurent Bruneau, Alain Joye et Marco Merkli. Random repeated interaction quantum systems. *Comm. Math. Phys.*, 284(2) :553–581, 2008.
- [32] Włodzimierz Bryc. A remark on the connection between the large deviation principle and the central limit theorem. *Statist. Probab. Lett.*, 18(4) :253–256, 1993.
- [33] Michele Campisi, Ralf Blattmann, Sigmund Kohler, David Zueco et Peter Hänggi. Employing circuit QED to measure non-equilibrium work fluctuations. *New Journal of Physics*, 15(10) :105028, 2013.
- [34] Sergio Ciliberto et Eric Lutz. *The Physics of Information : From Maxwell to Landauer*, pages 155–175. Springer International Publishing, Cham, 2019.

- [35] Thomas M. Cover et Joy A. Thomas. *Elements of information theory*. Wiley-Interscience (John Wiley & Sons), Hoboken, NJ, deuxième édition, 2006.
- [36] Gavin E. Crooks. Quantum operation time reversal. *Phys. Rev. A*, 77(3) :034101, 2008.
- [37] Gavin E. Crooks. Entropy production fluctuation theorem and the nonequilibrium work relation for free energy differences. *Phys. Rev. E*, 60 :2721–2726, 1999.
- [38] Noé Cuneo, Vojkan Jakšić, Claude-Alain Pillet et Armen Shirikyan. Large deviations and fluctuation theorem for selectively decoupled measures on shift spaces. *arXiv*, 1712.09038.
- [39] Clive D. Cushen et Robin L. Hudson. A quantum-mechanical central limit theorem. *J. Appl. Probab.*, 8 :454–469, 1971.
- [40] Jean Dalibard, Yvan Castin et Klaus Mølmer. Wave-function approach to dissipative processes in quantum optics. *Phys. Rev. Lett.*, 68 :580–583, 1992.
- [41] E. Brian Davies. Quantum stochastic processes. *Comm. Math. Phys.*, 15(4) :277–304, 1969.
- [42] E. Brian Davies. Quantum stochastic processes. II. *Comm. Math. Phys.*, 19 :83–105, 1970.
- [43] E. Brian Davies. Markovian master equations. *Comm. Math. Phys.*, 39 :91–110, 1974.
- [44] E. Brian Davies. *Quantum theory of open systems*. Academic Press (Harcourt Brace Jovanovich, Publishers), London-New York, 1976.
- [45] Amir Dembo et Ofer Zeitouni. *Large deviations techniques and applications*, volume 38 de *Stochastic Modelling and Applied Probability*. Springer-Verlag, Berlin, 2010.
- [46] Jan Dereziński. *Introduction to Representations of the Canonical Commutation and Anticommutation Relations*, pages 63–143. Springer Berlin Heidelberg, Berlin, Heidelberg, 2006.
- [47] Jan Dereziński. Boson free fields as a limit of fields of a more general type. *Rep. Math. Phys.*, 21(3) :405–417, 1985.
- [48] Jan Dereziński, Wojcieck De Roeck et Christian Maes. Fluctuations of quantum currents and unravelings of master equations. *J. Stat. Phys.*, 131(2) :341–356, 2008.
- [49] Lajos Diosi. Quantum stochastic processes as models for state vector reduction. *J. Phys. A*, 21(13) :2885–2898, 1988.
- [50] Ross Dorner, Stephen R. Clark, Libby Heaney, Rosario Fazio, John Goold et Vlatko Vedral. Extracting quantum work statistics and fluctuation theorems by single-qubit interferometry. *Phys. Rev. Lett.*, 110 :230601, 2013.
- [51] Rick Durrett. *Probability : theory and examples*. Cambridge Series in Statistical and Probabilistic Mathematics. Cambridge University Press, Cambridge, quatrième édition, 2010.
- [52] Richard S. Ellis. *Entropy, Large Deviations, and Statistical Mechanics*. Grundlehren der mathematischen Wissenschaften 271. Springer New York, 1985.
- [53] Masatoshi Enomoto et Yasuo Watatani. A Perron-Frobenius type theorem for positive linear maps on C^* -algebras *Math. Japon.*, 24(1) :53–63, 1979/80.
- [54] Massimiliano Esposito, Upendra Harbola et Shaul Mukamel. Nonequilibrium fluctuations, fluctuation theorems, and counting statistics in quantum systems. *Rev. Mod. Phys.*, 81 :1665–1702, 2009.
- [55] Denis J. Evans, Ezechiele G. D. Cohen et Gary P. Morriss. Probability of second law violations in shearing steady states. *Phys. Rev. Lett.*, 71 :2401–2404, 1993.
- [56] David E. Evans et Raphael Høegh-Krohn. Spectral properties of positive maps on C^* -algebras. *J. London Math. Soc. (2)*, 17(2) :345–355, 1978.

- [57] Denis J. Evans et Debra J. Searles. Equilibrium microstates which generate second law violating steady states. *Phys. Rev. E*, 50 :1645–1648, 1994.
- [58] Gregory L. Eyink, Joel L. Lebowitz et Herbert Spohn. Microscopic origin of hydrodynamic behavior : entropy production and the steady state. *Chaos/Xaos (Woods Hole, MA, 1989)*, 367–391, 1990.
- [59] Mark Fannes, Bruno Nachtergaele et Reinhard F. Werner. Finitely correlated states on quantum spin chains. *Comm. Math. Phys.*, 144(3) :443–490, 1992.
- [60] Mark Fannes, Bruno Nachtergaele et Reinhard F. Werner. Finitely correlated pure states. *J. Funct. Anal.*, 120(2) :511–534, 1994.
- [61] De-Jun Feng. The variational principle for products of non-negative matrices. *Nonlinearity*, 17(2) :447, 2003.
- [62] De-Jun Feng. Lyapunov exponents for products of matrices and multifractal analysis. part ii : General matrices. *Israel J. Math.*, 170(1) :355–394, 2009.
- [63] Harry Furstenberg et Harry Kesten. Products of random matrices. *Ann. Math. Stat.*, 31(2) :457–469, 1960.
- [64] Giovanni Gallavotti et Ezechiel G. D. Cohen. Dynamical ensembles in stationary states. *J. Statist. Phys.*, 80(5-6) :931–970, 1995.
- [65] Nicolas Gisin. Quantum Measurements and Stochastic Processes. *Phys. Rev. Lett.*, 52(19) :1657–1660, 1984.
- [66] Danny Goderis, André Verbeure et Peter Vets. Non-commutative central limits. *Probab. Theory Relat. Fields*, 82(4) :527–544, 1989.
- [67] Danny Goderis et Peter Vets. Central limit theorem for mixing quantum systems and the CCR-algebra of fluctuations. *Comm. Math. Phys.*, 122(2) :249–265, 1989.
- [68] Ulrich Groh. The peripheral point spectrum of Schwarz operators on C^* -algebras. *Math. Z.*, 176(3) :311–318, 1981.
- [69] Ulrich Groh. Some observations on the spectra of positive operators on finite-dimensional C^* -algebras. *Linear Algebra Appl.*, 42 :213–222, 1982.
- [70] Christine Guerlin, Julien Bernu, Samuel Deleglise, Clement Sayrin, Sebastien Gleyzes, Stefan Kuhr, Michel Brune, Jean-Michel Raimond et Serge Haroche. Progressive field-state collapse and quantum non-demolition photon counting. *Nature*, 448(7156) :889–893, 2007.
- [71] Yves Guivarc’h et Émile Le Page. Spectral gap properties for linear random walks and Pareto’s asymptotics for affine stochastic recursions. *Ann. Inst. H. Poincaré Probab. Statist.*, 52(2) :503–574, 05 2016.
- [72] Yves Guivarc’h et Albert Raugi. Frontière de Furstenberg, propriétés de contraction et théorèmes de convergence. *Prob. Theory Rel. Fields*, 69(2) :187–242, 1985.
- [73] Allan Gut. On the moment problem. *Bernoulli*, 8(3) :407–421, 2002.
- [74] Madalin Guta et Jukka Kiukas. Equivalence classes and local asymptotic normality in system identification for quantum Markov chains. *Comm. Math. Phys.*, 335(3) :1397–1428, 2015.
- [75] Masahito Hayashi et Marco Tomamichel. Correlation detection and an operational interpretation of the Rényi mutual information. *J. Math. Phys.*, 57(10) :102201, 28, 2016.
- [76] Alexander S. Holevo. *Statistical structure of quantum theory*, volume 67 de *Lecture Notes in Physics. Monographs*. Springer-Verlag, Berlin, 2001.

- [77] Jordan M. Horowitz et Juan M. R. Parrondo. Entropy production along nonequilibrium quantum jump trajectories. *New Journal of Physics*, 15(8) :085028, 2013.
- [78] Vojkan Jakšić et Claude-Alain Pillet. Mathematical theory of non-equilibrium quantum statistical mechanics. *J. Stat. Phys.*, 108(5) :787–829, 2002.
- [79] Vojkan Jakšić et Claude-Alain Pillet. A note on the Landauer principle in quantum statistical mechanics. *J. Math. Phys.*, 55(7) :075210–75210 :21, 2014.
- [80] Vojkan Jakšić et Claude-Alain Pillet. Non-equilibrium steady states of finite quantum systems coupled to thermal reservoirs. *Comm. Math. Phys.*, 226(1) :131–162, 2002.
- [81] Vojkan Jakšić, Yoshiko Ogata et Claude-Alain Pillet. The Green-Kubo formula for locally interacting fermionic open systems. *Ann. Henri Poincaré*, 8(6) :1013–1036, 2007.
- [82] Tosio Kato. On the Adiabatic Theorem of Quantum Mechanics. *J. Phys. Soc. Japan*, 5 :435, 1950.
- [83] Tosio Kato. *Perturbation Theory for Linear Operators*. Classics in mathematics. Springer, 1976.
- [84] Julia Kempe. Quantum random walks : an introductory overview. *Contemporary Physics*, 50(1) :339–359, 2009.
- [85] Karl Kraus. *States, effects, and operations*, volume 190 de *Lecture Notes in Physics*. Springer-Verlag, Berlin, 1983.
- [86] Ryogo Kubo, Morikazu Toda et Natsuki Hashitsume. *Statistical physics II. Nonequilibrium statistical mechanics*. Springer-Verlag, Berlin, 1991.
- [87] Burkhard Kümmerner et Hans Maassen. A pathwise ergodic theorem for quantum trajectories. *J. Phys. A*, 37(49) :11889–11896, 2004.
- [88] Burkhard Kümmerner et Hans Maassen. Purification of quantum trajectories. *Lecture Notes-Monograph Series*, 48 :252–261, 2006.
- [89] Greg Kuperberg. A tracial quantum central limit theorem. *Trans. Am. Math. Soc.*, 357(2) :459–471, 2005.
- [90] Jorge Kurchan. A quantum fluctuation theorem. *arXiv*, cond-mat/0007360, 2000.
- [91] Rolf Landauer. Irreversibility and heat generation in the computing process. *IBM Journal of Research and Development*, 5 :183–191, 1961.
- [92] Émile Le Page. Théorèmes limites pour les produits de matrices aléatoires. Dans *Probability measures on groups*, pages 258–303. Springer, 1982.
- [93] Leonid S. Levitov et Gordey B. Lesovik. Charge distribution in quantum shot noise. *Soviet Journal of Experimental and Theoretical Physics Letters*, 58 :230, 1993.
- [94] Bunrith Jacques Lim. *Frontières de Poisson d’opération quantiques et trajectoires quantiques*. Thèse de doctorat, Université Rennes I, 2010.
- [95] Goran Lindblad. On the generators of quantum dynamical semigroups. *Comm. Math. Phys.*, 48(2) :119–130, 1976.
- [96] Saunders Mac Lane et Garrett Birkhoff. *Algebra*. Chelsea Publishing Co., New York, troisième édition, 1988.
- [97] Taku Matsui. On the algebra of fluctuation in quantum spin chains. *Ann. Henri Poincaré*, 4(1) :63–83, 2003.
- [98] Laura Mazzola, Gabriele De Chiara et Mauro Paternostro. Measuring the characteristic function of the work distribution. *Phys. Rev. Lett.*, 110(23), 6 2013.

- [99] Dieter Meschede, Herbert Walther et Geheimer Müller. One-atom maser. *Phys. Rev. Lett.*, 54 :551–554, 1985.
- [100] Sean Meyn et Richard L. Tweedie. *Markov chains and stochastic stability*. Cambridge University Press, Cambridge, deuxième édition, 2009.
- [101] Milán Mosonyi et Tomohiro Ogawa. Quantum hypothesis testing and the operational interpretation of the quantum Rényi relative entropies. *Comm. Math. Phys.*, 334(3) :1617–1648, 2015.
- [102] Milán Mosonyi et Tomohiro Ogawa. Strong converse exponent for classical-quantum channel coding. *Comm. Math. Phys.*, 355(1) :373–426, 2017.
- [103] Martin Müller-Lennert, Frédéric Dupuis, Oleg Szehr, Serge Fehr et Marco Tomamichel. On quantum Rényi entropies : a new generalization and some properties. *J. Math. Phys.*, 54(12) :122203, 20, 2013.
- [104] James R. Norris. *Markov chains*, volume 2 de *Cambridge Series in Statistical and Probabilistic Mathematics*. Cambridge University Press, Cambridge, 1998.
- [105] Masanori Ohya et Dénes Petz. *Quantum entropy and its use*. Texts and Monographs in Physics. Springer-Verlag, Berlin, 1993.
- [106] James L. Park et Henry Margenau. Simultaneous measurability in quantum theory. *International Journal of Theoretical Physics*, 1(3) :211–283, 1968.
- [107] Clément Pellegrini. Continuous time open quantum random walks and non-Markovian Lindblad master equations. *J. Stat. Phys.*, 154(3) :838–865, 2014.
- [108] Clément Pellegrini. *Approche probabiliste des trajectoires quantiques*. Habilitation à diriger des recherches, Université Toulouse 3 – Paul Sabatier, 2018.
- [109] Dénes Petz. *An invitation to the algebra of canonical commutation relations*, volume 2 de *Leuven Notes in Mathematical and Theoretical Physics. Series A : Mathematical Physics*. Leuven University Press, Leuven, 1990.
- [110] Dénes Petz. *Quantum information theory and quantum statistics*. Berlin : Springer, 2008.
- [111] David Reeb et Michael M. Wolf. An improved Landauer principle with finite-size corrections. *New Journal of Physics*, 16(10) :103011, 2014.
- [112] Michael Reed et Barry Simon. *Methods of modern mathematical physics. III*. Academic Press [Harcourt Brace Jovanovich, Publishers], New York-London, 1979.
- [113] Wojciech De Roeck. Quantum fluctuation theorem : can we go from micro to meso? *Comptes Rendus Physique*, 8(5) :674 – 683, 2007. Work, dissipation, and fluctuations in nonequilibrium physics.
- [114] Lamberto Rondoni et Carlos Mejía-Monasterio. Fluctuations in nonequilibrium statistical mechanics : models, mathematical theory, physical mechanisms. *Nonlinearity*, 20(10) :R1, 2007.
- [115] David Ruelle. Natural nonequilibrium states in quantum statistical mechanics. *J. Stat. Phys.*, 98(1) :57–75, 2000.
- [116] Jun J. Sakurai et Jim Napolitano. *Modern quantum mechanics*. Always learning. Pearson, Harlow, 2., nouvelle édition internat., 2014.
- [117] Robert Schrader. Perron-Frobenius theory for positive maps on trace ideals. *Mathematical physics in mathematics and physics (Siena, 2000)*, 30 :361–378, 2001.
- [118] Peter Talkner, Eric Lutz et Peter Hänggi. Fluctuation theorems : Work is not an observable. *Phys. Rev. E*, 75 :050102, 2007.

- [119] Atushi Tanaka. Adiabatic theorem for discrete time evolution. *J. Phys. Soc. Japan*, 80(12), 2011.
- [120] Shuichi Tasaki et Taku Matsui. *Fluctuation theorem, nonequilibrium steady states and Maclennan-Zubarev ensembles of a class of large quantum systems*. Dans *Fundamental Aspects of Quantum Physics (Tokyo, 2001)* pages 100–119. World Scientific, 2003.
- [121] Peter Walters. *An introduction to ergodic theory*, volume 79 de *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York-Berlin, 1982.
- [122] Herbert Walther, Benjamin T. H. Varcoe, Berthold-Georg Englert et Thomas Becker. Cavity quantum electrodynamics. *Reports on Progress in Physics*, 69(5) :1325–1382, 2006.
- [123] Gen Miao Wang, Edie M. Sevick, Emil Mittag, Debra J. Searles et Denis J. Evans. Experimental Demonstration of Violations of the Second Law of Thermodynamics for Small Systems and Short Time Scales. *Phys. Rev. Lett.*, 89(5) :050601, 2002.
- [124] Mark M. Wilde, Andreas Winter et Dong Yang. Strong converse for the classical capacity of entanglement-breaking and Hadamard channels via a sandwiched Rényi relative entropy. *Comm. Math. Phys.*, 331(2) :593–622, 2014.
- [125] Michael M. Wolf. Quantum channels & operations : Guided tour. Notes pour un cours donné au Niels-Bohr Institute. 2012.

TABLE DES MATIÈRES

Bibliographie personnelle	3
Bibliographie générale	5
Remerciements	15
Préface et mode d'emploi	17
o Introduction et résumé	19
1 Fluctuation-dissipation et théorème non commutatif de la limite centrale	20
2 Mesures à deux temps et formulations statistiques de la thermodynamique	22
3 Mesures répétées d'un système : les mesures et le système	23
4 Dépendance en temps : le cas des régimes adiabatiques	25
5 Quelques sujets passés sous silence	26
1 Fluctuation-dissipation et théorème non commutatif de la limite centrale	29
1 Convergence de fonctions pseudo-caractéristiques et conséquences	31
2 Théorème de la limite centrale – quantique ou non	33
3 Théorème de la limite centrale pour les systèmes fermioniques	36
4 Fluctuation-dissipation pour les systèmes fermioniques	39
2 Mesures à deux temps et formulations statistiques de la thermodynamique	41
1 Insuffisances de la quantification naïve	41
2 Opérateur modulaire relatif et mesures à deux temps	43
3 Formulation statistique du deuxième principe	46
4 Formulation statistique du premier principe	49
5 Application : la réponse linéaire	54
3 Mesures répétées d'un système : les mesures et le système	57
1 Mesures répétées d'un système : les mesures	58
2 Entropie des statistiques de mesure répétées	66
3 Mesures répétées d'un système : le système	71
4 Marches quantiques ouvertes à temps continu	77
5 Mesures invariantes pour les équations de Schrödinger stochastiques	79

4	Dépendance en temps : le cas des systèmes adiabatiques	83
1	Mesures à deux temps des systèmes d'interactions répétées	85
2	Théorème adiabatique non unitaire à temps discret	89
3	Spectre périphérique de déformations de canaux quantiques	91
4	Applications : production d'entropie et principe de Landauer trajectoriels	92
	Projets de recherche	97
A	Applications complètement positives et leur spectre périphérique	99

REMERCIEMENTS

Il me semble avoir tant de gratitude à exprimer que leur expression pourrait dépasser en volume le pendant plus scientifique de ce manuscrit. Pour éviter l'indigestion à ceux qui pourtant se contenteraient de lire ces remerciements, je restreindrai leur champ à celui de ma vie professionnelle amorcée après mon doctorat.

Je remercie en premier lieu ceux qui font que cette soutenance a lieu. Tout d'abord mes rapporteurs : Djalil Chafaï, Krzysztof Gawedzki, Yves Le Jan, car c'est un honneur que de les voir émettre un avis sur mes travaux. Les autres membres du jury ensuite : Jean-Marie Barbaroux, Michel Bauer, Stéphane Nonnenmacher, Dimitri Pétritis, Christophe Texier, et j'ajoute à cette liste Armen Shirikyan, que son agenda a empêché d'être présent avec nous. Tous ceux-là sont des rencontres plus ou moins récentes et tous sans exception ont contribué à mon édifice scientifique. Catherine Ardin, Christine Bailleul et Frédéric Paulin, enfin, qui nous ont permis, à différents titres, de nous réunir aujourd'hui.

Si j'adopte un regard large sur mon activité scientifique, il me saute d'abord aux yeux que je dois beaucoup à mes coauteurs. Il est évident que mes travaux se sont nourris de leurs qualités scientifiques, mais je veux dire ici que ce sont leurs qualités humaines qui m'ont réellement enrichi, et qui font que je suis encore, ou à nouveau, mathématicien. C'est donc par leurs prénoms que je veux les interpeller : Alain, Annalisa, Cambyse, Claude-Alain, Clément, Denis, Eric, Ivan, Martin, Nilanjana, Raffaella, Renaud, Stéphane, Tristan, Vojkan, Walter, Yoshiko, je vous remercie pour votre compagnie.

Si j'essaie d'organiser ma vision de cette longue période de ma vie scientifique, me viennent à l'esprit cinq lieux et trois époques. Les cinq lieux sont cinq villes où j'ai travaillé et vécu, où je me sens encore un familier légitime, grâce à ceux qui m'y ont accueilli. À Santiago ce furent Rolando Rebolledo et Rafael Tiedra; à Montréal ce furent Vojkan Jaksic et ses nombreux étudiants, ainsi que Marco Merkli et Annalisa Panati; à Toulouse ce furent Tristan Benoist, Ion Nechita, Clément Pellegrini; à Cambridge ce furent Nilanjana Datta, Cambyse Rouzé et toute l'équipe d'information quantique. Enfin, à Orsay, où j'ai (tout de même) passé le plus clair de mon temps, ce furent l'équipe de probabilités et statistique et celle qui ne s'appelle pas officiellement l'équipe de physique mathématique. Pour la convivialité au quotidien et les bonnes adresses, je remercie tout particulièrement mes cobureaux successifs : Olivier Raimond, Thierry Ramond, Vincent Rivoirard, Thanh Mai Pham Ngoc.

Les trois époques renvoient à un aspect particulier de ma carrière. Il est d'usage à ce point de souligner la chance que l'on a d'exercer la profession d'enseignant-chercheur; pour ma part j'ai eu cette chance, mais j'ai également eu celle de pouvoir arrêter et celle de pouvoir recommencer. Arrêter la recherche m'a permis de découvrir un autre monde en plus de découvrir deux pays, d'ajouter Hanoi et Phnom Penh à la liste des villes où j'ai le droit de me sentir chez moi, et surtout d'avoir envie de recommencer la recherche. J'ai découvert alors que celle-ci n'était pas tout à fait comme la bicyclette, et plus qu'à tout autre je suis reconnaissant à ceux qui, à mon retour, ont accepté simplement de travailler avec celui qui ne pédalait plus très droit. Je veux donc exprimer mon immense gratitude à Stéphane Attal, au collectif de mes petits frères de thèse que sont Clément Pellegrini, Ion Nechita, Julien Deschamps, Ivan Bardet et Simon Andréys, à

ce cousin qu'est Tristan Benoist, ainsi qu'à Yves Le Jan et Vojkan Jaksic avec qui les discussions ont repris comme si de rien n'était après trois ans d'interruption. Je veux également remercier le département de mathématiques d'Orsay qui m'a généreusement offert des facilités de remise en selle.

Je veux remercier encore tous les membres des projets ANR HamMark, StoQ et NonStops qui ont constitué une communauté active, hétéroclite mais toujours chaleureuse, et en particulier Denis Bernard et Claude-Alain Pillet, animateurs inlassables de ces communautés. Je remercie également Eric Hanson, qui subit mon apprentissage de l'encadrement de thèse et sait conserver son enthousiasme intense et discret, dans les périodes où je le harcèle comme dans celles où je le délaisse.

Je dois enfin déborder du champ annoncé, pour quelques remerciements d'ordre personnel, car si j'ai vanté l'humanité rencontrée lors de mon activité scientifique, elle ne peut éclipser celle qui m'entoure sans but. Je veux remercier mes amis : j'ai la chance d'en avoir beaucoup de solides, qui tous enrichissent ma réalité à chaque moment partagé, qu'il soit apéro ou voyage au bout du monde, avec une aisance qui m'étonnerait si je ne m'étais tranquillement convaincu de leur incroyable talent pour la magie. Ils sont issus de filières saint-maurienne, lyonnaise, grenobloise, santiagoise, montréalaise, mais pas que. Ils sauront se reconnaître, je l'espère, car je profite de ces pages pour leur exprimer toute mon admiration. Je veux remercier mes parents. La découverte récente du rôle de père m'a déjà fait ressentir l'éprouvante volonté de bien faire qu'ils ont toujours manifestée, et la grande beauté de leur technique. Vous êtes, avez toujours été, merveilleux. Je veux remercier Vanessa, en première ligne face à mon ingratitude quotidienne, lumière constante de mes journées, qui m'a rencontré non mathématicien mais est restée quand sont revenus les regards absents, les "ça marche" ou "ça marche pas" toujours grommelés et le travail sans horaires. Je veux enfin remercier Joseph et Selma, qui savent par un sourire, un baiser, une parole, donner un sens à mon temps de travail et une valeur à mon temps libre.

PRÉFACE ET MODE D'EMPLOI

L'objectif de ce document est de présenter ceux de mes travaux de recherche que j'ai effectués depuis la soutenance de mon doctorat. L'une des premières questions auxquelles j'ai été confronté à l'époque concernait les propriétés de la loi jointe des variations de quantités qui se trouvaient modéliser des flux de chaleur mais dont les observables associées ne commutaient pas. Fraîchement diplômé pour une thèse sur les probabilités non commutatives, je savais que cette loi jointe n'existait pas mais j'avais quand même envie de lui donner un sens.

Il m'a fallu quelques années de travail non commutatif pour arriver à faire apparaître des objets probabilistes pertinents là où il n'y en avait pas, le plaisir d'avoir surmonté des difficultés mathématiques éclipsant mal le doute quant au sens physique du résultat. Il m'a fallu quelques années de plus pour comprendre qu'une nouvelle idée, que l'on appelle maintenant les mesures à deux temps, permettait d'avoir dès le départ un problème de probabilités bien posé, un sens physique plus clair, et la possibilité de donner des formulations statistiques de principes de la thermodynamique. Le prix à payer en a été un changement de la définition des variations considérées, par exemple de chaleur ou d'entropie, mais d'un point de vue physique ce changement s'est lui-même avéré bénéfique. Ces deux étapes m'ont donc mené à pratiquer des probabilités exclusivement classiques dans le traitement de problèmes de mécanique statistique quantique. Le développement de l'intérêt pour les mesures (indirectes) répétées de systèmes quantiques, motivé en particulier par le développement d'expériences physiques permettant de manipuler individuellement des particules (on citera les expériences d'électrodynamique en cavité, ou impliquant des ions piégés, qui ont valu leur prix Nobel à Haroche et Wineland) m'a fourni une autre belle gamme de problèmes probabilistes, concernant à la fois les mesures elles-mêmes et leur effet (aléatoire) sur le système observé. Enfin, l'étude d'un autre principe de la thermodynamique, qui prend la forme d'une inégalité réputée devenir une égalité dans la limite de transformations infiniment lentes, m'a mené à considérer des systèmes dépendant du temps dans la limite dite adiabatique. Les quatre thèmes mentionnés ci-dessus : approche non-commutative des variations, mesures à deux temps, mesures répétées, systèmes adiabatiques, constituent les quatre chapitres de ce document. Il faut pour être complet préciser que le non-commutatif reste présent dans mes travaux, même les plus récents, puisque les systèmes dynamiques étudiés sont décrits par le formalisme quantique, à coups d'observables, d'états et de groupes d'évolution. Ce formalisme apparaît à la fois dans la définition des lois de probabilités classiques que j'étudie, mais aussi dans l'expression de certaines des lois physiques qui m'intéressent et qui relient souvent les propriétés de ces lois de probabilités à celles du système dynamique. Dans les cas les plus simples, les objets intrinsèquement quantiques restent essentiellement matriciels et je n'ai alors pas hésité à les mentionner; en revanche, dans un cadre thermodynamique on est souvent confronté à des systèmes comprenant des "réservoirs" décrits par des algèbres d'opérateurs plus générales. Certains de mes travaux portent même très précisément sur l'étude de systèmes dynamiques sur de telles algèbres d'opérateurs. Discuter de tels systèmes aurait mené trop loin du fil directeur probabiliste de ce document; j'ai donc fait le choix de ne pas les traiter en détail. Cela signifie d'une part que certains articles ne seront pas abordés ici, et d'autre part que je me livre parfois à un

numéro d'équilibriste consistant à dire que si l'on avait défini un certain objet, alors on pourrait montrer une formule le concernant, tout en tentant de justifier objet et formule par analogie. J'espère ne pas mécontenter ainsi à la fois les lecteurs qui connaissent les systèmes dynamiques quantiques et ceux qui ne les connaissent pas.

Ajoutons quelques lignes en guise de mode d'emploi : ce document est constitué d'un chapitre 0 qui introduit et résume les chapitres 1 à 4 qui, eux, décrivent plus en détail mes travaux. La lecture de ce chapitre 0 est évidemment recommandée au lecteur pressé, mais celui qui pense lire l'ensemble des chapitres suivants devra tout de même commencer par là, car certaines notions y sont définies. Les références bibliographiques du type [P8] renvoient à des publications auxquelles j'ai contribué, dont la liste commence page 4; parmi celles-là, les références [P1] à [P5] sont issues de mes travaux de doctorat. Les références bibliographiques du type [108] renvoient à des publications auxquelles je n'ai pas contribué, dont la liste commence page 11. Théorèmes, propositions et autres assertions sont numérotés par chapitre, le théorème 1.11 se trouvant par exemple au chapitre 1. Sections et équations ne portent pas de numéro de chapitre, la section 4 du chapitre 2 étant invoquée comme section 4 dans ce même chapitre et comme section 2.4 dans les autres.

CHAPITRE 0

INTRODUCTION ET RÉSUMÉ

Dans ce chapitre, nous introduisons et motivons les notions qui vont nous intéresser dans la suite, et résumons les résultats obtenus. Nous commençons par rappeler les bases de la modélisation orthodoxe de la mécanique quantique puis, dans les sections 1 à 4, décrivons la problématique des chapitres portant le même numéro. Nous travaillons principalement sur des espaces de Hilbert de dimension finie mais tentons de mettre en avant les objets pertinents dans le cas général, ce qui nous mène à des choix de notation qui peuvent sembler inutilement lourds ou pédants. En particulier, à chaque fois que nous parlons dans cette introduction d'hypothèses de régularité, celles-ci seront automatiquement vérifiées dans le cadre de dimension finie.

MODÉLISATION DES SYSTÈMES QUANTIQUES

Nous rappelons ici les bases de la modélisation de Dirac et von Neumann de la mécanique quantique, et recommandons au lecteur les références [44,76] pour une description mathématique ou [116] pour plus de physique. Dans ce cadre, l'espace d'état d'un système quantique est représenté par un espace de Hilbert \mathcal{H} , dont nous notons $\langle \cdot, \cdot \rangle$ le produit scalaire (que nous supposons linéaire en la deuxième variable). On considère (pour l'instant) que toute grandeur physique du système est représentée par un élément autoadjoint d'une algèbre \mathcal{O} d'opérateurs sur \mathcal{H} , qui sera sauf mention du contraire $\mathcal{O} = \mathcal{B}(\mathcal{H})$; ces éléments autoadjoints de \mathcal{O} seront donc appelés des *observables*. Pour nous, l'état du système sera représenté par une forme linéaire sur \mathcal{O} qui est positive (au sens où elle envoie les opérateurs positifs sur des réels positifs), envoie l'identité Id sur 1, et vérifie quelques propriétés de régularité s'apparentant à la convergence monotone de la théorie des probabilités. Quand $\mathcal{O} = \mathcal{B}(\mathcal{H})$, toute telle forme linéaire peut s'écrire sous la forme $X \mapsto \text{tr}(\rho X)$ avec ρ un opérateur positif à trace et de trace 1, appelé *matrice densité*, mais nous appellerons indifféremment *état* et noterons en général par le même symbole la forme linéaire et la matrice densité. L'ensemble des matrices densité sur \mathcal{H} sera noté $\mathcal{S}(\mathcal{H})$, et est donc une partie convexe de l'idéal $\mathcal{I}_1(\mathcal{H}_{\mathcal{S}})$ des opérateurs à trace. Un *état pur* sera un état de la forme $X \mapsto \langle \phi, X \phi \rangle$ pour $\phi \in \mathcal{H}_{\mathcal{S}}$ de norme 1. La matrice densité associée est alors le projecteur sur $\mathbb{C}\phi$, qui s'écrit $|\phi\rangle\langle\phi|$ dans suivant la convention de Dirac qui pour ψ, ϕ dans \mathcal{H} , note $|\psi\rangle\langle\phi|$ l'application $v \mapsto \langle \phi, v \rangle \psi$.

Si le système est fermé (au sens physique du terme), sa dynamique est décrite par un groupe $(\tau^t)_t$ d'automorphismes de $\mathcal{B}(\mathcal{H}_{\mathcal{S}})$, qui, si on le suppose fortement continu, a nécessairement la forme $\tau^t(X) = e^{+itH} X e^{-itH}$ où H est une observable que l'on appellera alors le *hamiltonien* du système. Cette description de la dynamique dans laquelle les observables évoluent suivant le flot $X \rightsquigarrow \tau^t(X) =: X_t$ et les états ne changent pas (dite représentation de Heisenberg) est équivalente à la description dans laquelle les observables ne changent pas, et les états évoluent suivant $\rho \rightsquigarrow \rho \circ \tau^t =: \rho_t$ (dite représentation de Schrödinger), l'équivalence étant donnée par la relation $\rho_t(X) = \rho(X_t)$.

Le dernier élément de notre modélisation concerne les mesures, ou plus précisément les mesures projectives dites de von Neumann. Si l'on mesure une observable X alors que le système est dans l'état ρ , la *règle de Born* dit que le résultat est aléatoire et que les valeurs possibles sont les éléments du spectre de X . Pour exprimer les probabilités associées, commençons dans le cas où \mathcal{H} est de dimension finie; dans ce cas X , étant autoadjointe, est diagonalisable et donc s'écrit

$$X = \sum_{x \in \text{sp } X} x \pi_X(x)$$

où les $\pi_X(x)$ sont des projecteurs orthogonaux. Alors la probabilité d'observer un résultat contenu dans un borélien E s'écrit

$$\text{tr}(\rho \pi_X(E)) = \sum_{x \in E} \text{tr}(\rho \pi_X(x)) \quad \text{où } \pi_X(E) = \sum_{x \in E} \pi_X(x)$$

et, conditionnellement au fait que l'on ait observé un résultat dans E , on doit considérer (c'est le postulat de projection, que nous ne commenterons pas ici) que l'état du système après la mesure est

$$\frac{\pi_X(E) \rho \pi_X(E)}{\text{tr}(\rho \pi_X(E))}.$$

Pour décrire le cas général de la mesure d'une observable $X \in \mathcal{O}$ lorsque le système est dans l'état ρ , rappelons que le théorème spectral de von Neumann (voir par exemple le théorème VIII.6 de [44]) dit que X peut s'écrire

$$X = \int x d\pi_X(x)$$

où π_X est une mesure à valeurs projections, c'est-à-dire une application de l'ensemble des boréliens de \mathbb{R} dans l'ensemble des projecteurs orthogonaux de \mathcal{H} , qui est σ -additive et envoie \mathbb{R} sur l'identité Id . Alors la probabilité d'observer un résultat contenu dans un borélien E de \mathbb{R} est simplement $\rho \circ \pi_X(E)$. On peut définir un calcul fonctionnel pour les fonctions boréliennes bornées en donnant un sens à $f(X) := \int f(x) d\pi_X(x)$, qui vérifie alors $\rho(f(X)) = \int f(x) d(\rho \circ \pi_X)(x)$, et $\rho \circ \pi_X$ est une probabilité; on dira que *la loi de X dans l'état ρ est $\rho \circ \pi_X$* . L'espérance de cette loi sera alors $\int x d(\rho \circ \pi_X)(x) = \rho(X)$. De plus, conditionnellement au fait que l'on ait observé une valeur dans E , on doit considérer que l'état du système devient après la mesure

$$X \mapsto \frac{\rho(\mathbb{1}_E(X) X \mathbb{1}_E(X))}{\rho(\mathbb{1}_E(X))}. \quad (1)$$

La mesure est donc le point d'irruption de l'aléa dans le modèle quantique; elle sera le dénominateur commun des questions considérées dans les chapitres 2, 3 et 4.

I. FLUCTUATION-DISSIPATION ET THÉORÈME NON COMMUTATIF DE LA LIMITE CENTRALE

Une situation canonique de la mécanique statistique hors équilibre est celle où plusieurs systèmes infinis (en général appelés "réservoirs") $\mathcal{R}_1, \dots, \mathcal{R}_\ell$ initialement à l'équilibre thermique à des températures différentes sont mis en contact, de telle sorte que l'ensemble s'établit dans un "état permanent" ρ_+ qui

n'est pas un état d'équilibre et en particulier présente des flux de chaleur non triviaux : on peut identifier des observables Φ_1, \dots, Φ_ℓ représentant ces flux de chaleurs, et on s'attend à ce que les flux moyens $\rho_+(\Phi_i)$ ne soient pas tous nuls. L'étude générale de ces flux s'est longtemps limitée (y compris dans le cas classique) à des propriétés très générales disant essentiellement que la somme des flux moyens est nulle (i.e. $\sum_{i=1}^{\ell} \rho_+(\Phi_i) = 0$) et que l'entropie de Clausius moyenne associée est positive (i.e. $\sum_{i=1}^{\ell} \beta_i \rho_+(\Phi_i) \geq 0$; voir plus loin la signification des β_i). Une situation simplifiée dans laquelle la théorie est mieux comprise est celle de la *réponse linéaire*, où les températures initiales des réservoirs sont proches, donc toutes identiques, à un ϵ près. Les trois piliers de la théorie de la réponse linéaire concernent le coefficient du premier ordre de dépendance du flux moyen sortant de \mathcal{R}_i , c'est-à-dire $\rho_+(\Phi_i)$, en la température de \mathcal{R}_j . Ces trois piliers sont la formule de Kubo, qui exprime ces coefficients comme des corrélations temporelles de ces flux entre eux "à l'équilibre", i.e. quand les réservoirs sont initialement tous à la même température; les relations de réciprocité d'Onsager, qui expriment une symétrie dans ces coefficients; et le théorème de fluctuation-dissipation, qui relie ces coefficients aux lois jointes asymptotiques des fluctuations temporelles à l'équilibre des flux Φ_i . Les articles [P6, P7] se sont intéressés aux formules de Kubo et aux relations de réciprocité d'Onsager pour des systèmes quantiques. Ils sortent du cadre purement probabiliste de cette introduction. En effet, les formules de Kubo ne peuvent s'énoncer qu'en considérant le système dynamique qui décrit l'ensemble du système, qui est nécessairement "infini", et il est alors nécessaire de sortir du cadre où l'algèbre d'observables \mathcal{O} est de la forme $\mathcal{B}(\mathcal{H})$, et de considérer des états et dynamiques plus généraux que nous ne l'avons fait ci-dessus. On entre dans le cadre des systèmes dynamiques sur des C^* -algèbres, que nous ne discuterons pas ici. Notons simplement qu'énoncé et preuve des formules de Kubo et des relations d'Onsager posent des problèmes techniques mais aucun problème conceptuel.

Ce n'est pas le cas du théorème de fluctuation-dissipation puisque celui-ci concerne des lois jointes; or, dans le cadre quantique, il n'est pas possible de donner un sens satisfaisant à la loi jointe de deux observables qui ne commutent pas. Il est en revanche possible de donner un sens aux probabilités associées à des mesures séquentielles, i.e. lorsque l'on mesure une observable, puis l'autre. Plus précisément, il est possible de mesurer d'abord X , puis Y ; les règles de Born évoquées ci-dessus montrent que la probabilité d'obtenir un résultat dans E puis un résultat dans F (pour E, F deux boréliens) est

$$\rho(\mathbb{1}_E(X)\mathbb{1}_F(Y)\mathbb{1}_E(X)).$$

Cette quantité, comme fonction de $E \times F$, ne définit en général pas une mesure sur \mathbb{R}^2 (elle n'est pas additive en E); on peut cependant l'interpréter, à E et F fixés, comme une valeur de probabilité, et se poser la question de son asymptotique si X, Y sont remplacées par des familles X_t, Y_t dépendant d'un paramètre t .

On peut alors se demander s'il existe un critère simple, dans le goût du théorème de Lévy–Cramér, permettant d'assurer une convergence en grand temps de ces probabilités de mesures séquentielles, à partir de fonctions dites pseudo-caractéristiques – qui pourraient être par exemple $(\alpha_1, \alpha_2) \mapsto \rho(e^{i\alpha_1 X_t} e^{i\alpha_2 Y_t})$. Ces questions sont discutées dans la section 1.1, qui décrit les résultats de l'article [P9]. On identifie alors, dans le cas où les X_t, Y_t sont des fluctuations "normalisées en $1/\sqrt{t}$ " une structure limite générique et un critère permettant de ramener la preuve de la convergence des fonctions pseudo-caractéristiques à des fonctions caractéristiques; ceci est décrit dans la section 1.2, qui discute des résultats contenus dans [P9] et [Pro].

On applique alors l'ensemble du programme que nous venons de décrire pour donner dans la section 1.3 les résultats de [P8] : un théorème de la limite centrale, au sens de la convergence des probabilités de mesures séquentielles, pour une classe de modèles dits "systèmes fermioniques". De plus, pour revenir à la motivation initiale qui est celle de la réponse linéaire, quand on considère ces fluctuations dans l'état

ρ d'équilibre (i.e. quand les réservoirs $\mathcal{R}_1, \dots, \mathcal{R}_\ell$ sont tous à la même température), ces limites de probabilités de mesures séquentielles définissent une vraie probabilité sur les couples de mesures. Ceci prouve, enfin, une forme de théorème de fluctuation-dissipation pour ces modèles; celui-ci va hélas s'avérer inadapté, mais pour des raisons physiques et non mathématiques.

2. MESURES À DEUX TEMPS ET FORMULATIONS STATISTIQUES DE LA THERMODYNAMIQUE

Avoir réussi à prouver un théorème de fluctuation-dissipation pour les systèmes fermioniques ne doit pas occulter une question fondamentale : les fluctuations considérées devraient physiquement être celles de la variation de la chaleur dans chaque réservoir \mathcal{R}_i , et cette dernière est représentée par le Hamiltonien H_i . Or, ce que nous avons fait revient à modéliser cette variation de H_i entre les temps 0 et t par l'observable $\tau^t(H_i) - H_i$. Si mathématiquement cela ne pose pas problème, on peut se demander quel procédé de mesure permettrait d'accéder à cette observable. De plus, une certaine combinaison linéaire $S = \sum_{i=1}^{\ell} \beta_i H_i$ devrait représenter l'entropie totale du système. Or, si l'on applique le même traitement à l'entropie S qu'aux H_i , sa variation devrait correspondre à l'observable $\tau^t(S) - S$; mais alors on peut voir que la loi de cet opérateur dans, par exemple, l'état initial, ne satisfait pas une relation a priori fondamentale appelée *relation de fluctuation* vérifiée dans les systèmes classiques. Ceci est discuté dans la section 2.1.

Plusieurs définitions alternatives de la variation d'entropie ont été proposées, qui vérifient la relation de fluctuation : les plus satisfaisantes datent du début des années 2000, et sont dues à Matsui et Tasaki dans [120] d'une part, à Kurchan dans [90] d'autre part. La proposition de Matsui et Tasaki définit la loi de la variation d'entropie comme la loi (au sens donné en page 20) de l'opérateur autoadjoint $\log \Delta_{\rho_t|\rho}$ dans (une représentation de) l'état ρ_t , où $\Delta_{\rho_t|\rho}$ est un opérateur modulaire relatif, issu de la théorie Tomita-Takesaki pour les algèbres de von Neumann. Cette définition a l'avantage de s'étendre par essence à un choix très large d'algèbres \mathcal{O} ; en revanche son sens physique n'était pas clair puisque $\log \Delta_{\rho_t|\rho}$ n'appartient pas à l'ensemble \mathcal{O} des observables (ni même à sa représentation standard – voir la remarque 2.9). La proposition de Kurchan, elle, consiste à définir la variation d'entropie entre 0 et t comme la différence entre une première mesure, au temps initial, d'une “observable d'entropie” qui appartient bien à \mathcal{O} , et une deuxième mesure de cette même observable mais sur le système perturbé par la première mesure et évolué pendant un temps t . Cette proposition a donc un sens physique parfaitement défini, même si la quantité considérée n'est pas issue de la mesure unique d'une observable mais d'une *mesure à deux temps*, et définit une notion de trajectoire (liée aux mesures effectuées). En revanche, elle est essentiellement limitée au cas de systèmes de dimension finie. L'article [P11] montre que ces deux propositions sont en fait identiques sur les systèmes finis. On a alors une définition d'une variable aléatoire de variation d'entropie entre les temps 0 et t , qui a une interprétation physique satisfaisante, et s'applique dans de nombreux cas : la théorie modulaire est assez robuste pour donner de bonnes convergences dans un schéma d'approximation d'une algèbre générale par des algèbres finies, ce qui permet d'étendre l'interprétation comme résultat de mesure à deux temps. Nous discutons ces définitions dans la section 2.2. La relation de fluctuation s'exprime alors par la symétrie $e_t(\alpha) = e_t(1 - \alpha)$, satisfaite par la fonction génératrice e_t de cette variable aléatoire. Ceci donne une expression probabiliste de la deuxième loi de la thermodynamique : une variation $+s$ (où s est positif) de l'entropie entre les temps 0 et t est plus probable d'un facteur universel e^{+st} qu'une variation de $-s$: voir la section 2.3.

Inspiré par cette réussite, on peut se demander si, en considérant une définition des variations d'énergie par une mesure à deux temps, on peut obtenir une expression probabiliste de la première loi de la ther-

modynamique, et si celle-ci s'exprime par une nouvelle symétrie de fonctions génératrices χ_t associées. Une telle symétrie a été proposée par Andrieux, Gaspard, Monnai et Tasaki dans [5] mais la démonstration mathématique présente une erreur, que nous avons comblée dans [P21] en faisant apparaître une condition de régularité des interactions qui s'avère nécessaire. Contrairement au cas des symétries de e_t , il n'existe pas de symétrie à temps fini pour χ_t et il est nécessaire de considérer la limite $t \rightarrow \infty$. Cette symétrie et ses conséquences sont étudiées dans [P12] en ce qui concerne l'énergie totale du système, et dans [P21] en ce qui concerne la chaleur détaillée dans chaque réservoir. Nous allons voir que combiner les symétries des fonctionnelles χ_+ et e_+ , obtenues dans la limite $t \rightarrow \infty$, permet de prouver formule de Kubo, relations de réciprocity d'Onsager et théorème de fluctuation-dissipation pour les flux dans le régime permanent, lorsque les variations sont au sens des mesures à deux temps. Nos deux types de symétries seraient donc les propriétés universelles étendant la théorie de la réponse linéaire au-delà du "presque équilibre".

Notons que, même si des définitions de e_t et χ_t peuvent être données directement pour des systèmes infinis grâce à la théorie modulaire de Tomita–Takesaki, nous faisons le choix de donner des définitions des variations d'entropie ou d'énergie par des mesures à deux temps sur des systèmes finis, et de ne considérer la "limite thermodynamique" (qui fait passer à des systèmes infinis) qu'au niveau des lois de ces variations. Ceci nous permet de substituer des considérations probabilistes élémentaires à des considérations algébriques compliquées.

3. MESURES RÉPÉTÉES D'UN SYSTÈME : LES MESURES ET LE SYSTÈME

Remarquons que les mesures dont il a été question au début de ce chapitre sont des mesures projectives. Il existe une autre classe de mesures, dites *mesures généralisées*, qui apparaissent par exemple dans le cadre des mesures indirectes. Pour présenter ces mesures indirectes, appelons \mathcal{S} le système considéré et notons $\mathcal{H}_{\mathcal{S}}$ (au lieu de \mathcal{H}) l'espace de Hilbert qui le décrit. Supposons alors que \mathcal{S} est initialement dans l'état ρ , et que l'on fait l'expérience suivante :

1. on couple le système \mathcal{S} avec un "environnement" \mathcal{E} décrit par $\mathcal{H}_{\mathcal{E}}$ initialement dans l'état ξ , et on les laisse interagir suivant l'unitaire U de $\mathcal{H}_{\mathcal{S}} \otimes \mathcal{H}_{\mathcal{E}}$;
2. on effectue une mesure d'une observable M qui agit uniquement sur $\mathcal{H}_{\mathcal{E}}$, dont on suppose ici qu'elle a un spectre discret, de sorte qu'elle s'écrit $M = \sum_{m \in \text{sp } M} m \pi_m$;
3. on se désintéresse du système $\mathcal{H}_{\mathcal{E}}$, au sens où il n'apparaîtra plus dans la suite de l'expérience (i.e. il n'interagira plus et on n'effectuera pas de mesure sur lui).

Alors le résultat de l'étape 1. est qu'après l'interaction, la réunion des deux systèmes se trouve dans l'état $U(\rho \otimes \xi)U^*$. L'application de la règle de Born montre que la probabilité d'observer le résultat m lors de l'étape 2. est alors $\text{tr}(\text{Id}_{\mathcal{H}_{\mathcal{S}}} \otimes \pi_m U(\rho \otimes \xi)U^*)$. On peut de même écrire explicitement l'état du système après l'étape 2, conditionnellement à l'observation du résultat m ; et, après l'étape 3, on doit considérer que l'état de $\mathcal{H}_{\mathcal{S}}$ est la trace partielle suivant $\mathcal{H}_{\mathcal{E}}$ de ce dernier état conditionnel¹. Les expressions obtenues sont lourdes mais peuvent se simplifier : si l'on note

$$\Phi_m(\rho) := \text{tr}_{\mathcal{H}_{\mathcal{E}}}((\text{Id}_{\mathcal{H}_{\mathcal{S}}} \otimes \pi_m) U(\rho \otimes \xi)U^* (\text{Id}_{\mathcal{H}_{\mathcal{S}}} \otimes \pi_m)) \quad (2)$$

alors le résultat de l'expérience correspondant aux étapes 1,2. et 3. est que ce résultat de mesure, noté m_1 , vaut m avec probabilité

$$\mathbb{P}_{\rho}(m_1 = m) = \text{tr}(\Phi_m(\rho)), \quad (3)$$

1. La trace partielle suivant $\mathcal{H}_{\mathcal{E}}$, notée $\text{tr}_{\mathcal{H}_{\mathcal{E}}}$ est l'application $\text{Id} \otimes \text{tr}$ de $\mathcal{B}(\mathcal{H}_{\mathcal{S}}) \otimes \mathcal{B}(\mathcal{H}_{\mathcal{E}})$ dans $\mathcal{B}(\mathcal{H}_{\mathcal{S}})$, définie donc par $\text{tr}_{\mathcal{H}_{\mathcal{E}}}(A \otimes B) = \text{tr}(B)A$

et que conditionnellement au résultat m , l'état du système \mathcal{S} devient

$$\rho_1(m) = \frac{\Phi_m(\rho)}{\text{tr}(\Phi_m(\rho))}. \quad (4)$$

Remarquons que, dans le cas où ξ est un état pur $|\Omega\rangle\langle\Omega|$ et que M est non dégénérée, chaque Φ_m est de la forme $\rho \mapsto V_m \rho V_m^*$, et l'évolution ci-dessus préserve la pureté, au sens où chaque ρ_n est pur si ρ l'est. L'hypothèse de non-dégénérescence de M est assez naturelle puisqu'elle signifie qu'un résultat de mesure spécifie un état pur. Celle de pureté de ξ le devient dès que l'on fait précéder l'étape 1. ci-dessus d'une mesure non-dégénérée de l'état $\mathcal{H}_{\mathcal{E}}$, comme par exemple lorsque l'on effectue une mesure à deux temps de M . Remarquons encore que les mesures indirectes ne sont pas les seules situations menant à des mesures généralisées : si par exemple une mesure projective de M est suivie d'une évolution suivant l'unitaire U (de $\mathcal{H}_{\mathcal{S}}$ seul, cette fois-ci) alors l'effet de ces deux étapes est décrit par (3) et (4) avec $\Phi_m(\rho) = V_m \rho V_m^*$ où $V_m = U \pi_m$.

Contrairement aux mesures projectives, les mesures généralisées ne déterminent pas les mesures effectuées par la suite : si par exemple on revient au cas des mesures indirectes, et qu'après la première mesure on répète l'expérience correspondant aux étapes 1. à 3. avec le système \mathcal{S} mis à jour, mais avec un "nouvel" environnement \mathcal{E}_2 , alors on n'obtient pas en général le même résultat lors de la deuxième mesure que lors de la première. Si l'on itère ainsi de suite n fois ces mesures généralisées avec des environnements $\mathcal{E}_1, \dots, \mathcal{E}_n$, on obtient un n -uplet de résultats de mesure m_1, \dots, m_n et un état ρ_n qui est l'état actualisé conditionnellement aux n mesures; le processus $(\rho_n)_n$ (ou parfois le processus $(x_n, \rho_n)_n$) est appelé *trajectoire quantique*. Les environnements $\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2, \dots$ sont souvent appelés des *sondes* puisqu'ils jouent ce rôle dans des expériences d'électrodynamique quantique en cavité, comme celles de [70, 99, 122]; ces expériences sont la principale motivation pour l'étude présente des mesures indirectes répétées. Il semble naturel de se demander quelles sont les propriétés statistiques de $(m_n)_n$, et quel est le comportement quand $n \rightarrow \infty$ de $(\rho_n)_n$.

Pour étudier le comportement de $(m_n)_n$, nous étendons un peu le cadre ci-dessus et supposons que les paramètres de la mesure généralisée (par exemple les ξ, U, M de la description des mesures indirectes) peuvent dépendre des résultats de mesure précédents. On décrira alors les mesures non plus par $m_n \in \text{sp } M$ mais par $x_n \in V$, où V est un espace de configuration discret, et les opérateurs $(\Phi_m)_{m \in \text{sp } V}$ sont remplacés par des $(\Phi_{i,j})_{i,j \in V}$, où pour chaque j les $(\Phi_{i,j})_{i \in V}$ sont les opérateurs appliqués pour la $n+1$ -ième mesure si la n -ième a mené à $x_n = j$. Le processus ainsi obtenu a été appelé *marche quantique ouverte* dans [7], et proposé comme analogue des chaînes de Markov pertinentes pour les modèles quantiques, avec des transitions affectées par le degré de liberté interne $(\rho_n)_n$ (précisons tout de suite que ni $(x_n)_n$, ni $(m_n)_n$ dans le cas précédent, ne sont en général des chaînes de Markov). Il est alors naturel de se demander ce que l'on peut dire de la loi de $(x_n)_n$. On obtient loi des grands nombres, théorème de la limite centrale et principe de grandes déviations en étudiant une certaine expression de la fonction génératrice de $(x_n)_n$; ceci correspond aux articles [Pr13, Pr15]. Pour pousser l'analogie avec les chaînes de Markov, on s'intéresse aux temps d'atteinte ou nombre de visites par $(x_n)_n$ d'une configuration i de V et à l'universalité des notions de récurrence pour $(x_n)_n$, ce qui est traité dans [P21]. Ces différents points sont décrits dans la section 3.1.

Une autre question naturelle concernant $(m_n)_n$ est "l'apparition de la flèche du temps", i.e. l'asymétrie dans les résultats de mesure, qui peut se résumer ainsi : si l'on reçoit une liste (m_1, \dots, m_n) dont on ne sait si elle est à l'endroit ou à l'envers, pourra-t-on déterminer le sens correct? Cette question de test d'hypothèses requiert l'étude de la régularité de l'entropie de Rényi relative de \mathbb{P}_ρ et $\widehat{\mathbb{P}}_\rho$, respectivement loi de (m_1, \dots, m_n) et loi des résultats renversés (qui peuvent être (m_n, \dots, m_1) , mais on peut considérer une notion plus subtile de renversement). Cette question de la régularité se traite par le formalisme

thermodynamique (voir [28]), mais les mesures \mathbb{P}_ρ et $\widehat{\mathbb{P}}_\rho$ n'entrent pas dans les classes classiquement étudiées, et il nous a fallu leur appliquer le “formalisme thermodynamique non-additif”. Nos résultats (issus de [P20]) s'étendent immédiatement au cas où l'on souhaiterait déterminer si la liste (m_1, \dots, m_n) provient de mesures indirectes effectuées avec le protocole induit par des paramètres ξ_1, U_1, M_1 , ou avec celui induit par d'autres paramètres ξ_2, U_2, M_2 . Tous ces points sont discutés dans la section 3.2.

Dans la section 3.3, nous nous demandons ce qui peut être dit du comportement en temps long du processus $(\rho_n)_n$. Peu de résultats étaient connus à son sujet, la plupart dus à Kümmerer et Massen. L'un d'entre eux concernait le fait que sous une condition assez générale, non seulement l'éventuelle pureté de l'état ρ sera préservée pour toutes les valeurs successives de la suite, mais cet état ρ_n sera asymptotiquement pur quand $n \rightarrow \infty$ quelle que soit la condition initiale (voir [88]). Il est donc naturel de restreindre l'étude au cas des états purs. La question du comportement de $(\rho_n)_n$ se ramène alors à l'étude asymptotique d'une chaîne de Markov sur la sphère projective de \mathcal{H}_S , qui s'exprime en termes d'un produit aléatoire de matrices. Nous montrons dans [P24] que la condition de purification de [88] implique une convergence de la loi de $(\rho_n)_n$ vers une distribution invariante à vitesse exponentielle pour la distance de Wasserstein d'ordre 1.

Enfin, nous terminons ce chapitre 3 avec les sections 3.4 et 3.5 qui présentent des extensions à temps continu des résultats des sections 3.3 et 3.3, issues de [P25] et [P27] respectivement. Dans ces deux cas, nous nous contentons de présenter une construction du modèle et indiquons comment étendre les preuves en temps discret.

4. DÉPENDANCE EN TEMPS : LE CAS DES RÉGIMES ADIABATIQUES

Le principe de Landauer (énoncé en 1961 dans [91]) peut se résumer ainsi : la transformation irréversible de l'état d'un système \mathcal{S} par interaction avec un environnement \mathcal{E} initialement à l'équilibre thermique à température T a un coût énergétique minimal, ce qui s'exprime synthétiquement par

$$\beta \Delta Q_{\mathcal{E}} \geq \Delta S_{\mathcal{S}} \quad (5)$$

où $\beta = T^{-1}$ est la température inverse², $\Delta Q_{\mathcal{E}}$ est la variation d'énergie libre de \mathcal{E} et $\Delta S_{\mathcal{S}}$ la variation d'entropie de \mathcal{S} . De plus, on s'attend à une saturation de l'inégalité (5) lorsque l'interaction est adiabatique, c'est-à-dire obtenue par une évolution infiniment lente à partir d'un ensemble $\mathcal{S} \vee \mathcal{E}$ initialement à l'équilibre.

Une première preuve mathématiquement satisfaisante a été donnée par Reeb et Wolf dans [III]; elle s'exprime dans le formalisme quantique, et en dimension finie, auquel cas on ne peut observer la saturation adiabatique. L'article [79] a étendu l'approche ci-dessus au cas où l'environnement est décrit par une C^* -algèbre quelconque, permettant alors de montrer la saturation de (5), dans la limite adiabatique. L'article [P19] étudie le même problème en modélisant l'environnement par un “système d'interactions répétées”.

Un *système d'interactions répétées* (SIR) est composé d'un système fixe \mathcal{S} comme ci-dessus, qui interagit pendant une unité de temps avec un système \mathcal{E}_1 , suivant une dynamique hamiltonienne, avant que le couplage de \mathcal{S} et \mathcal{E}_1 soit désactivé et que \mathcal{S} interagisse avec un système \mathcal{E}_2 pendant l'unité de temps suivante, et ainsi de suite. Cette situation est similaire à celle de la section 3, et nous n'utilisons le terme de système d'interactions répétées que pour souligner le rôle de la suite $(\mathcal{E}_n)_n$ comme un environnement. En effet, cette situation a par définition deux des caractéristiques attendues d'un réservoir : avoir une énergie

2. Il serait plus correct d'écrire que $\beta = (k_B T)^{-1}$ où k_B est la constante de Boltzmann, mais nous prendrons cette dernière égale à 1

totale infinie, et (en tout cas quand tous les \mathcal{E}_n sont identiques) un temps caractéristique de retour à l'équilibre petit devant celui de \mathcal{S} . Le cas adiabatique est décrit en faisant varier lentement (avec des variations de l'ordre de $1/T$ à chaque étape) les paramètres de \mathcal{E}_n et de l'interaction entre \mathcal{S} et \mathcal{E}_n . L'article [P19] étudie alors la question de la saturation pour ces SIR adiabatiques, avec les mêmes définitions de $\Delta S_{\mathcal{S}}$ et $\Delta Q_{\mathcal{E}}$ que [iii] et [79]. L'étude de la saturation a été menée dans [P19]; cependant la question initiale méritait d'être améliorée.

En effet, les quantités $\Delta Q_{\mathcal{E}}$ et $\Delta S_{\mathcal{S}}$ de [79, iii] sont des quantités moyennes. On pouvait espérer raffiner ce principe de Landauer en une relation entre les lois des deux variables aléatoires correspondant aux variations, au sens des mesures à deux temps, de l'entropie du système \mathcal{S} et de l'entropie de la chaîne $\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2, \dots$, le long d'une trajectoire. Les fonctions génératrices de ces variables aléatoires s'expriment alors en fonction d'un produit des déformations d'opérateurs du type de (2) pour les temps n/T , $n = 1, \dots, T$; pour étudier l'asymptotique de ces fonctions génératrices, nous développons deux résultats techniques. Le premier est un "théorème adiabatique" exprimant la limite quand $T \rightarrow \infty$ d'un tel produit. Cette limite s'exprimant à partir du spectre périphérique des déformations, il a fallu expliciter la forme de ce spectre périphérique. Ces deux résultats sont décrits dans les sections 4.2 et 4.3.

Nous obtenons ainsi une formulation statistique du principe de Landauer sur une trajectoire associée à un système d'interactions répétées, avec saturation sous une condition bien identifiée. Lorsque cette condition n'est pas vérifiée, nos résultats s'apparentent à ceux de la section 3.2 sur l'entropie de Rényi relative entre les lois de mesures à l'endroit et à l'envers. Tout ceci est discuté dans la section 4.4.

5. QUELQUES SUJETS PASSÉS SOUS SILENCE

Plusieurs de mes travaux sont passés sous silence dans la suite de ce document; nous les mentionnons rapidement ici.

Les articles [P6] et [P7] étudient des systèmes quantiques composés de réservoirs $\mathcal{R}_1, \dots, \mathcal{R}_\ell$, initialement à l'équilibre thermique à des températures différentes, qui sont mis en interaction. Comme nous l'avons écrit dans la section 1, on s'attend à ce que le système s'établisse dans un état permanent ρ_+ , et on peut s'intéresser au flux de chaleur moyen $\rho_+(\Phi_i)$ sortant de \mathcal{R}_i et à sa dépendance en les températures des autres réservoirs. Cette étude est faite ici dans un cadre C^* -algébrique, dans le cas où la dynamique du système est quasi-libre, de sorte que tout s'exprime à partir du scattering des évolutions à une particule et que l'on peut obtenir des formules explicites pour les $\rho_+(\Phi_i)$ sans supposer que l'on est proche de l'équilibre. Ces articles sont intégralement écrits dans le formalisme algébrique que nous avons cherché à éviter ici.

L'article [P14] (auquel on fait appel dans la suite du texte, mais qui n'est pas détaillé) donne un résultat général de décomposition d'un canal quantique (soit le type d'opérateur décrivant en temps discret l'évolution d'un système ouvert, comme par exemple 2) en une somme directe de canaux irréductibles, et décrit l'ensemble des états invariants, dont on montre qu'il n'est un simplexe que sous une condition d'unicité de décompositions de l'espace de Hilbert \mathcal{H} en somme de supports de projecteurs réduisant Φ . La nouveauté dans cet article tient dans cette description des états invariants, qui n'avait été donnée qu'en temps continu, et avec un manque de rigueur qui pouvait faire douter de son exactitude. Ces dernières précisions sur la forme des états invariants sont nécessaires pour obtenir la forme générale des mesures invariantes pour l'évolution associée aux trajectoires quantiques, comme c'est discuté dans l'article [P24] et décrit dans la section 3.3.

L'article [P16] concerne un raffinement du lemme de Stein quantique. Supposons que l'on a une suite d'algèbres $\mathcal{O}_n = \mathcal{B}(\mathcal{H}_n)$, dont les "vrais" états sont donnés soit par la suite $(\rho_n)_n$, soit par la suite $(\sigma_n)_n$,

et que l'on veuille déterminer quelle est la bonne suite en se basant sur la mesure d'observables-tests $(T_n)_n$ où $T_n \in \mathcal{O}_n$. Alors, pour tout τ strictement inférieur à $S(\rho|\sigma) := \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} S(\rho_n|\sigma_n)$, on peut trouver des tests $(T_n)_n$ où $T_n \in \mathcal{O}_n$ tels que l'erreur de deuxième espèce décroît comme $e^{-n\tau}$, et celle de première espèce est arbitrairement petite. Si en revanche on veut que l'erreur de deuxième espèce décroisse comme $e^{-n\tau}$ avec τ strictement supérieur à $S(\rho|\sigma)$, alors nécessairement l'erreur de première espèce va tendre vers 1 (c'est la "réciproque forte"). L'article [P16] raffine cette dépendance en montrant que l'erreur de première espèce optimale sous la condition que l'erreur de deuxième espèce décroisse comme $e^{-nS(\rho|\sigma) - \sqrt{n}v}$ est proportionnelle à $\mathbb{P}(Z \leq v)$ où Z suit une loi normale centrée réduite – ceci sous des conditions de régularité d'une extension à paramètre complexe de l'application qui à α associe la α -entropie de Rényi relative des deux états. De manière étonnante nous n'avons trouvé aucune mention de ce problème dans la littérature sur les tests d'hypothèses classiques.

Enfin, l'article [P18] considère un semigroupe dynamique quantique $(e^{t\mathcal{L}})_{t \in \mathbb{R}_+}$ sur un espace de dimension finie, qui est vu dans la littérature comme engendrant une "diffusion quantique". Ce semigroupe de diffusion a la particularité de préserver le caractère gaussien (voir [76]) des états. Contrairement à ce qui nous a intéressé dans d'autres articles, on n'a pas ici convergence de $\rho_t := e^{t\mathcal{L}}(\rho)$. Nous étudions la vitesse de croissance vers l'infini de l'entropie de ρ_t par des inégalités fonctionnelles permettant de montrer la vitesse de décroissance de la plus grande valeur propre de ρ_t . Cet article a été l'occasion de s'attaquer aux inégalités fonctionnelles dans le cadre quantique.

CHAPITRE I

FLUCTUATION-DISSIPATION ET THÉORÈME NON COMMUTATIF DE LA LIMITE CENTRALE

Ce chapitre présente les résultats contenus dans les articles [P8, P9, P10]. Ceux-ci constituent une première tentative de donner un sens aux lois jointes de fluctuations d'opérateurs dans un système quantique; ils sont les seuls, dans ce document, qui relèvent du domaine des “probabilités non commutatives” ou “probabilités quantiques”. Le contexte qui a motivé ces études est celui de la réponse linéaire des systèmes ouverts quantiques hors équilibre, qui est le sujet des articles [P6, P7]. Détailler le contenu de ces articles exigerait l'introduction de la théorie des systèmes dynamiques sur des C^* -algèbres, ce qui serait lourd et nous ferait dévier du fil directeur de ce document. Nous nous contenterons donc du strict nécessaire pour motiver la question des lois jointes de fluctuations.

La mécanique statistique quantique des systèmes hors équilibre telle que pratiquée dans les articles [P6, P7] (et avant eux dans [78, 115], références pour l'ensemble de ce paragraphe), considère un système constitué de réservoirs infinis $\mathcal{R}_1, \dots, \mathcal{R}_\ell$, qui sont initialement dans des états d'équilibre thermique de paramètres $\beta_1, \dots, \beta_\ell$, et que l'on fait interagir par des interactions locales à partir du temps $t = 0$, éventuellement au travers d'un “petit” système \mathcal{S} . Si $\ell = 1$, ou de manière équivalente si $\beta_1 = \dots = \beta_\ell = \beta$, alors on s'attend à ce que dans la limite $t \rightarrow \infty$, l'ensemble $\mathcal{S} \vee \mathcal{R}_1 \vee \dots \vee \mathcal{R}_\ell$ se stabilise dans un état d'équilibre thermique à la température β . Si en revanche $\ell > 1$ et que les β_i ne sont pas tous égaux – c'est le cas dit “hors équilibre” – alors au mieux, le système s'établit quand $t \rightarrow \infty$ dans un état permanent ρ_+ (souvent appelé NESS pour “non-equilibrium steady state”), et on s'attend à observer un phénomène de transport, avec des flux de chaleur “sortant de \mathcal{R}_i ”, représentés par des observables Φ_i . Cependant, étudier les propriétés de ρ_+ et des flux Φ_i dans le cas général est difficile. Une première approche de la situation hors équilibre utilise le fait que, sous des hypothèses assez générales, on peut montrer que si $\beta_1 = \dots = \beta_\ell$, alors $\rho_+(\Phi_i) = 0$ pour tout i . Sous des hypothèses de régularité, on doit pouvoir montrer que si $\sup_i |\beta_i - \beta_{\text{eq}}| < \epsilon$ pour une certaine valeur de référence β_{eq} de β , alors

$$\rho_+(\Phi_i) = \sum_{j=1}^{\ell} L_{i,j}(\beta_j - \beta_{\text{eq}}) + o(\epsilon). \quad (1)$$

Le centre de l'étude se déplace alors sur les coefficients $L_{i,j}$. C'est la théorie de la réponse linéaire (que l'on peut faire remonter à Onsager dans les années 30, voir le chapitre 4 de [86]). Dans le cadre classique (i.e. non quantique), la théorie de la réponse linéaire a trois piliers. Pour les formuler, ignorons un instant la distinction classique/quantique, et supposons que sur une algèbre d'observables \mathcal{O} (qui devrait alors, pour que les résultats ci-dessous puissent être vrais, décrire un système infini), on a un groupe d'automor-

phismes $(\tau^t)_t$. Les trois piliers, qui supposent une propriété d'invariance par renversement du temps (que nous préciserons en temps voulu) sont alors :

- la formule de Kubo

$$L_{i,j} = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \rho_{\text{eq}} \left((\Phi_i - \rho_{\text{eq}}(\Phi_i)) \tau^t (\Phi_j - \rho_{\text{eq}}(\Phi_j)) \right) dt \quad (2)$$

où ρ_{eq} est le NESS dans le cas $\beta_1 = \dots = \beta_\ell$;

- les relations de réciprocity d'Onsager

$$L_{i,j} = L_{j,i} \text{ pour tous } i, j ; \quad (3)$$

- la relation de fluctuation-dissipation, qui dit que les fluctuations temporelles spontanées des Φ_i dans l'état d'équilibre ρ_{eq} sont gaussiennes centrées, de matrice de covariance $(2L_{i,j})_{i,j}$.

Prouver (1), la formule de Kubo et les relations d'Onsager (comme on le fait dans les articles [P6, P7] pour certaines classes de modèles quantiques) exige d'avoir défini le système dynamique (\mathcal{O}, τ^t) mais ne pose pas de problème conceptuel. En revanche, formuler la relation de fluctuation-dissipation dans un cadre quantique demande à clarifier le sens que l'on donne aux fluctuations. En effet, admettons pour l'instant que les fluctuations de Φ_i sur l'intervalle de temps $[0, t]$ soient représentées par l'opérateur

$$\tilde{\Phi}_{i,t} = \frac{1}{\sqrt{t}} \int_0^t \tau^s (\Phi_i - \rho_+(\Phi_i)) ds.$$

L'énoncé standard du théorème de fluctuation-dissipation (dans le cadre classique en tout cas) concerne des fluctuations *jointes*, donc la loi jointe limite de $\tilde{\Phi}_{i,t}$ et $\tilde{\Phi}_{j,t}$ quand $t \rightarrow \infty$. Hélas, dans le cadre quantique, cette loi jointe ne peut être définie de manière satisfaisante. C'est ce que nous expliquons maintenant.

Comme on l'a expliqué en page 20, le théorème spectral de von Neumann et le calcul fonctionnel borélien borné pour les opérateurs autoadjoints permettent de définir la loi d'une observable X dans l'état ρ : si $X = \int x d\xi_X(x)$ alors cette loi est la probabilité $\mu_X^\rho := \rho \circ \xi_X$, qui vérifie $\rho(f(X)) = \int f(x) d\mu_X^\rho(x)$. On reste jusque-là dans le domaine des probabilités classiques et si, par exemple, on a une suite d'observables $(X_n)_n$ et une suite d'états $(\rho_n)_n$, on peut parler sans ambiguïté de l'asymptotique (au sens de la convergence étroite) de la loi $\mu_{X_n}^{\rho_n}$ de X_n dans l'état ρ_n . De même, si deux opérateurs X et Y commutent, alors on peut les écrire comme intégrales d'une même mesure spectrale¹ ξ sur \mathbb{R}^2 :

$$X = \int_{\mathbb{R}^2} x d\xi_{X,Y}(x, y) \quad Y = \int_{\mathbb{R}^2} y d\xi_{X,Y}(x, y)$$

et l'on peut donc définir $\mu_{X,Y}^\rho := \rho \circ \xi_{X,Y}$ sur \mathbb{R}^2 vérifiant

$$\rho(f(X)g(Y)) = \int f(x)g(y) d\mu_{X,Y}^\rho(x, y) \quad (4)$$

pour toutes f et g continues bornées, ce qui définit une loi jointe de X et Y dans l'état ρ . La non commutativité entre en jeu dès que l'on tente de parler de loi jointe de X et Y qui ne commutent pas, le folklore

1. L'algèbre de von Neumann engendrée par X et Y étant commutative, on peut y définir un calcul fonctionnel pour les fonctions boréliennes et construire alors $\xi_{X,Y}$ à partir des fonctions indicatrices.

nous disant que cette loi jointe n'existe pas. Un énoncé précis (parmi d'autres) est le suivant : il n'existe pas d'application $\rho \mapsto \mu_{X,Y}^\rho$ de l'ensemble des formes linéaires positives sur $\mathcal{B}(\mathcal{H})$, à valeurs dans l'ensemble des probabilités sur \mathbb{R}^2 , telle que pour tout ρ on a la relation (4) et

$$\rho(f(X)) = \int_{\mathbb{R}^2} f(x) d\mu_{X,Y}^\rho(x, y) \quad \rho(g(Y)) = \int_{\mathbb{R}^2} g(y) d\mu_{X,Y}^\rho(x, y) \quad (5)$$

pour toutes f et g continues bornées² (ceci peut se prouver grâce au théorème 3.2.1 de [44]). En particulier, la relation (4) ne peut être vraie pour tout ρ .

Pour revenir à notre tentative de prouver un théorème de fluctuation-dissipation quantique, nous voyons que les problèmes commencent dès que l'on tente d'en donner un énoncé : puisque les opérateurs $\tilde{\Phi}_{i,t}$ et $\tilde{\Phi}_{j,t}$ ne commutent pas en général, on ne peut parler de leur loi jointe et, a fortiori, on ne peut parler de la limite de cette loi.

I. CONVERGENCE DE FONCTIONS PSEUDO-CARACTÉRISTIQUES ET CONSÉQUENCES

Pour donner malgré tout un sens au comportement joint de $\tilde{\Phi}_{i,t}$ et $\tilde{\Phi}_{j,t}$, on revient à une approche opérationnelle : si $(X_n)_n$ et X sont des observables et $(\rho_n)_n$ et ρ sont des états, dire que la loi de X_n dans l'état ρ_n converge vers μ_X^ρ signifie que, pour une large classe de boréliens E , il suffit de prendre n assez grand pour que “observer si X_n prend une valeur dans E quand le système est dans l'état ρ_n ” ait une probabilité de succès proche celle qui consiste à “observer si X prend une valeur dans E quand le système est dans l'état ρ ”. Autrement dit, les observables $(X_n)_n$ et états $(\rho_n)_n$ fournissent une expérience approchée de celle qui correspond à l'observable X et à l'état ρ .

D'après le canon de la mécanique quantique, l'absence de loi jointe dans un état ρ pour deux observables X et Y qui ne commutent pas est l'expression de l'impossibilité de mesurer ces deux observables simultanément. Il reste en revanche possible de mesurer d'abord X , puis Y . Les règles de Born évoquées en page 20 montrent que la probabilité d'observer que X est dans E , puis que Y est dans F (où E, F sont deux boréliens) est

$$\rho(\mathbb{1}_E(X)\mathbb{1}_F(Y)\mathbb{1}_E(X)). \quad (6)$$

Cette quantité, comme fonction de $E \times F$, ne définit pas en général une probabilité sur \mathbb{R}^2 (elle n'est pas additive en E^3); il n'empêche que (6) attribue une probabilité à une certaine expérience. Si l'on considère par exemple des suites $(\rho_n)_n$ d'états, et $(X_n)_n, (Y_n)_n$ d'observables, alors on peut espérer que la quantité $\rho_n(\mathbb{1}_E(X_n)\mathbb{1}_F(Y_n)\mathbb{1}_E(X_n))$ converge vers une quantité de la forme $\rho(\mathbb{1}_E(X)\mathbb{1}_F(Y)\mathbb{1}_E(X))$, auquel cas on peut à nouveau penser que $(X_n, Y_n)_n$ et $(\rho_n)_n$ fournissent une expérience approchée de (X, Y) et ρ .

Des quantités comme (6) étant difficilement manipulables, il est naturel de se demander s'il peut suffire de les considérer dans le cas où l'on remplace $\mathbb{1}_E, \mathbb{1}_F$ par d'autres fonctions plus pratiques. Dans le cas “classique” où l'on considère une unique suite de variables X_n , le théorème de continuité de Lévy–Cramér dit que si

$$\rho_n(e^{i\alpha X_n}) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \rho(e^{i\alpha X})$$

2. Bizarrement, la littérature ne précise jamais le sens de l'impossibilité de définir des lois jointes et évoque parfois l'impossibilité d'une loi jointe à ρ fixé (ce qui n'a pas de sens), voir [106] pour une discussion de ce point.

3. C'est pourquoi nous ne parlons pas de “mesurer X et vérifier si le résultat est dans E ”, mais de “mesurer si X est dans E ”

pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, alors $\rho_n(f(X_n)) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \rho(f(X))$ pour toute fonction f continue bornée. On peut alors étendre cette convergence à toute fonction f mesurable bornée dont l'ensemble des points de discontinuité a une mesure nulle pour la probabilité μ_X^ρ , donc à certaines fonctions indicatrices (voir par exemple le théorème 29.2 de [22]). L'article [P9] cherche à obtenir un résultat de ce type, partant des *fonctions pseudo-caractéristiques* qui seraient ici les fonctionnelles du type obtenues en considérant la moyenne dans l'état ρ_n des produits d'opérateurs du type $e^{i\alpha_1 X_n}$ et $e^{i\alpha_2 Y_n}$.

Pour énoncer nos résultats rigoureusement, supposons que l'on ait pour tout $t \in \mathbb{R} \cup \{ \}$:

1. une algèbre de von Neumann \mathfrak{M}_t agissant sur un espace de Hilbert \mathcal{H}_t ;
2. un état ρ_t sur \mathfrak{M}_t ;
3. une famille $\tilde{A}_t^{(1)}, \dots, \tilde{A}_t^{(p)}$ d'opérateurs autoadjoints sur \mathcal{H}_t affiliés à \mathfrak{M}_t .

(L'ajout de l'indice vide " $t =$ " signifie simplement que nous avons également une algèbre de von Neumann \mathfrak{M} agissant sur \mathcal{H} et munie d'un état ρ , etc.).

Le lecteur qui ne connaît pas les termes ci-dessus pourra remplacer ces points 1,2,3. par les suivants, à condition d'accepter un peu de souplesse dans l'application de nos résultats dans la section 3 :

1. une algèbre $\mathcal{B}(\mathcal{H}_t)$;
2. une matrice densité $\rho_t \in \mathcal{S}(\mathcal{H}_t)$;
3. une famille d'opérateurs autoadjoints (non bornés a priori) $\tilde{A}_t^{(1)}, \dots, \tilde{A}_t^{(p)}$.

Définissons ce qui sera notre hypothèse usuelle dans la suite :

(CFP) Pour tout m dans \mathbb{N}^* , tous $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ dans \mathbb{R} , tous j_1, \dots, j_m dans $\{1, \dots, p\}$, on a

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \rho_t(e^{i\alpha_1 \tilde{A}_t^{(j_1)}} \dots e^{i\alpha_m \tilde{A}_t^{(j_m)}}) = \rho(e^{i\alpha_1 \tilde{A}^{(j_1)}} \dots e^{i\alpha_m \tilde{A}^{(j_m)}}).$$

Cette hypothèse **(CFP)** signifie donc que toute moyenne dans ρ_t de produits d'opérateurs $e^{\alpha_k \tilde{A}_t^{(k)}}$ (permutations et répétitions étant autorisées) converge quand $t \rightarrow \infty$ vers la moyenne dans ρ du même produit d'opérateurs $e^{\alpha_k \tilde{A}^{(k)}}$.

On a alors le théorème suivant, où pour f une fonction borélienne, on note $\mathcal{D}(f)$ l'ensemble de ses points de discontinuité.

THÉORÈME 1.1 ([P9]). *Sous l'hypothèse **(CFP)**, on a pour tout $m \in \mathbb{N}^*$ et toutes fonctions continues bornées f_1, \dots, f_m*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \rho_t(f_1(\tilde{A}_t^{(1)}) \dots f_m(\tilde{A}_t^{(m)})) = \rho(f_1(\tilde{A}^{(1)}) \dots f_m(\tilde{A}^{(m)})), \quad (7)$$

De plus, on peut étendre la convergence (7) à une classe de fonctions discontinues : il existe des familles S_1, \dots, S_m de probabilités telles que (7) est vraie pour toutes fonctions f_1, \dots, f_m mesurables bornées dès que pour tout $j = 1, \dots, m$ on a $\mu_j(\mathcal{D}(f_j)) = 0$ pour tout $\mu_j \in S_j$.

Remarque 1.2. Si les variables $\tilde{A}_t^{(1)}, \dots, \tilde{A}_t^{(p)}$ commutent, il suffirait de choisir $S_j = \{\mu_{\tilde{A}^{(j)}}^\rho\}$ pour tout j . En général, on ne peut choisir les S_j ni de manière unique, ni de manière indépendante pour les différents j (mais des choix possibles et semi-explicites sont fournis par la preuve du résultat) et ceci est illustré par des exemples dans la section 4 de [P9]. La preuve et ces exemples montrent bien que ce phénomène est dû au fait que, par exemple, le support de la loi de $e^{+i\alpha_2 \tilde{A}^{(2)}} f_1(\tilde{A}^{(1)}) e^{-i\alpha_2 \tilde{A}^{(2)}}$ dans l'état ρ dépend en général de α_2 : l'unitaire $e^{+i\alpha_2 \tilde{A}^{(2)}}$ peut "rendre visible par ρ un sous-espace spectral de $\tilde{A}^{(1)}$ qui ne l'était pas quand $\alpha_2 = 0$ ".

L'apparition de ces familles S_j fait qu'il est a priori difficile de savoir quelles discontinuités sont autorisées pour les fonctions f_j ; heureusement la situation est plus simple dès que l'état ρ est fidèle.

PROPOSITION 1.3 ([P9]). *Si ρ est fidèle, alors sous l'hypothèse (CFP), on a (7) pour toutes fonctions f_1, \dots, f_m boréliennes bornées telles que $\mu_{\tilde{A}^{(j)}}^\rho(\mathcal{D}(f_j)) = 0$ pour tout $j = 1, \dots, m$.*

Remarque 1.4. La preuve du théorème 1.1 se fait essentiellement par des applications répétées du théorème de Lévy–Cramér classique après une transformation de Fourier et des utilisations soigneuses de l'inégalité de Cauchy–Schwarz. Nous n'en dirons pas plus sur cette preuve technique. La proposition 1.3 vient du fait que si un état ρ est fidèle, alors les lois μ_A^ρ et $\mu_{UAU^*}^\rho$ sont mutuellement absolument continues lorsque U est unitaire. Remarquons par ailleurs que, comme dans le cas classique, on peut étendre ce résultat à des fonctions non bornées satisfaisant à des hypothèses de domination sous les mesures dans les S_j , hypothèses que nous n'énoncerons pas ici. Ceci sert dans l'extension de [89] que nous discutons dans la remarque 1.9 ci-dessous.

Remarque 1.5. Si la convergence des fonctions pseudo-caractéristiques a été largement étudiée (voir [1, 2, 66, 67, 97]), il semble avoir été généralement considéré que leur convergence était une indication suffisante de la pertinence de la “structure limite” donnée chez nous par les observables $\tilde{A}^{(1)}, \dots, \tilde{A}^{(p)}$ et l'état ρ de \mathfrak{M} . Les seuls cas dans lesquels l'implication opérationnelle de leur convergence a été étudiée sont à ma connaissance l'article de Cushen et Hudson [39] qui ne considère que des paires d'opérateurs P_t, Q_t satisfaisant une relation de commutation canonique $[P_t, Q_t] = i \text{Id}$, de sorte que toutes nos fonctions pseudo-caractéristiques se réduisent par la relation de commutation de Weyl à une fonction de Wigner; et l'article de Kuperberg [89] qui suppose que l'état ρ est tracial (c'est-à-dire que $\rho(AB) = \rho(BA)$ pour tous A, B) et utilise cette hypothèse dans le passage des fonctions pseudo-caractéristiques à des fonctions plus générales. Remarquons par ailleurs que Kuperberg souligne en dernière page de [89] l'absence d'une “analytic theory of non-commutative characteristic functions” qui est précisément ce que nous avons développé ici.

Pour reprendre notre motivation initiale, donnée au début de ce chapitre : il suffirait pour obtenir une convergence satisfaisante des mesures séquentielles des $\tilde{\Phi}_{1,t}, \dots, \tilde{\Phi}_{\ell,t}$, de montrer la convergence de leurs fonctions pseudo-caractéristiques.

2. THÉORÈME DE LA LIMITE CENTRALE – QUANTIQUE OU NON

Après avoir montré dans la section précédente que l'on pouvait obtenir un résultat de convergence à partir de fonctions pseudo-caractéristiques, nous allons maintenant montrer que, lorsque les $\tilde{A}_t^{(i)}$ sont de la forme

$$\tilde{A}_t^{(i)} = \frac{1}{\sqrt{t}} \int_0^t \tau^s(A^{(i)} - \rho(A^{(i)})) ds \quad \text{ou} \quad \tilde{A}_t^{(i)} = \frac{1}{\sqrt{t}} \sum_{s=0}^t \tau^s(A^{(i)} - \rho(A^{(i)}))$$

(suivant que l'on travaille en temps discret ou continu), où chaque $A^{(i)}$ est une observable de $\mathcal{B}(\mathcal{H})$, $(\tau^t)_t$ est un groupe d'automorphismes de $\mathcal{O} = \mathcal{B}(\mathcal{H})$ et ρ un état τ -invariant, alors sous des hypothèses d'ergodicité sur τ , la convergence des fonctions pseudo-caractéristiques de $\tilde{A}^{(1)}, \dots, \tilde{A}^{(p)}$ associées aux états $\rho_t \equiv \rho$ peut se réduire à la convergence de fonctions caractéristiques $\rho(e^{i\alpha \tilde{B}_t})$ pour \tilde{B}_t associée à B , combinaison linéaire quelconque des $A^{(1)}, \dots, A^{(p)}$.

Commençons par quelques définitions, en supposant comme ci-dessus que l'on a un état τ -invariant ρ . On dira qu'un espace vectoriel autoadjoint \mathcal{A} est *TLC-admissible* si pour tous A, B dans \mathcal{A} , $t \mapsto |\rho((A - \rho(A))\tau^t(B - \rho(B)))|$ est intégrable. Lorsque cette condition est vérifiée, on pose

$$L(A, B) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \rho((A - \rho(A))\tau^t(B - \rho(B))) dt. \quad (8)$$

Remarquons tout de suite que si $t \mapsto |\rho((A - \rho(A))\tau^t(B - \rho(B)))|$ est intégrable, alors

$$\rho(\tilde{A}_t \tilde{B}_t) \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} 2L(A, B),$$

de sorte qu'il est clair que la fonctionnelle bilinéaire L joue un rôle dans la structure limite. Cette structure limite sera décrite comme une algèbre de Weyl : pour cela remarquons que

$$\iota(A, B) := \frac{1}{2i} \int_{-\infty}^{\infty} \omega([\tau^t(A), B]) dt = 2 \operatorname{Im} L(A, B) \quad (9)$$

définit une forme bilinéaire symplectique (i.e. $\iota(A, B) = -\iota(B, A)$ pour tous A et B). On note alors $\mathcal{W}(\mathcal{A})$ la C^* -algèbre engendrée par les unitaires $W(A)$, A autoadjoint dans \mathcal{A} , vérifiant les relations

$$W(A)W(B) = e^{-i\iota(A, B)/2}W(A+B), \quad (10)$$

(voir [109] pour plus d'informations sur cette C^* -algèbre dite "algèbre CCR"). Remarquons que l'on peut définir de manière unique (grâce au théorème de Stone) des opérateurs autoadjoints $\varphi(A)$ par la relation $W(\alpha A) = e^{i\alpha\varphi(A)}$. Si pour $n \in \mathbb{N}^*$ on note \mathcal{P}_n l'ensemble des permutations π de $\{1, \dots, 2n\}$ telles que pour $j = 1, \dots, n$ on a $\pi(2j-1) < \min(\pi(2j), \pi(2j+1))$, alors les relations

$$\omega_L(\varphi(A)\varphi(B)) = 2L(A, B),$$

et

$$\omega_L(\varphi(A_1) \cdots \varphi(A_n)) = \begin{cases} \sum_{\pi \in \mathcal{P}_{n/2}} \prod_{j=1}^{n/2} \omega_L(\varphi(A_{\pi(2j-1)})\varphi(A_{\pi(2j)})) & \text{si } n \text{ est pair;} \\ 0 & \text{si } n \text{ est impair.} \end{cases} \quad (11)$$

définissent un état ω_L sur $\mathcal{W}(\mathcal{A})$ qui est dit *quasi-libre* (et vérifie $\omega_L(W(A)) = e^{-L(A, A)}$). L'algèbre $\mathcal{W}(\mathcal{A})$ munie de l'état ω_L est appelée l'algèbre de fluctuation par [66, 67, 97] dans des cadres décrits plus bas dans cette section.

Remarque 1.6. Dans le cas où $L(A, B) \in \mathbb{R}$, on a $\iota(A, B) = 0$. Par conséquent, si $L(A, B)$ est réel pour tous A, B de \mathcal{A} , la relation (10) montre que l'algèbre $\mathcal{W}(\mathcal{A})$ est commutative. Des opérateurs $\varphi(A^{(1)}), \dots, \varphi(A^{(p)})$, où les $A^{(j)}$ sont dans \mathcal{A} , admettent alors une loi jointe et on montre facilement à partir des relations (2) et (11) que c'est celle d'un vecteur gaussien de matrice de covariance $(L(A^{(i)}, A^{(j)}))_{i,j}$.

Le résultat principal de cette section, qui est prouvé dans [P8, P10], est le suivant. Précisons avant de l'énoncer que le système est dit ergodique si pour tous A, B, C dans \mathcal{O} on a

$$\frac{1}{t} \int_0^t \rho(A\tau^s(B)C) ds \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} \rho(AC)\rho(B)$$

(cette définition étend celle des systèmes dynamiques classiques), et qu'un sous-ensemble \mathcal{A} de \mathcal{O} est L^1 -asymptotiquement abélien si pour tous A, B dans \mathcal{A} , $t \mapsto \|[A, \tau^t(B)]\|$ est intégrable. L'ergodicité est une propriété typiquement difficile à prouver, mais il existe des critères pour les modèles usuels. L'abélianité asymptotique L^1 est également difficile à prouver (et implique d'ailleurs l'existence d'une forme de scattering, ce qui en fait en pratique une propriété ergodique) mais la propriété est connue pour des systèmes fermioniques (voir [4, 24, 25]). Enfin, nous ne définirons pas la propriété de modularité d'un état ρ et nous contentons de dire qu'elle est prouvée pour les états qui nous intéressent dans la suite (dans l'application en (14) et dans le théorème 1.11).

THÉORÈME 1.7. *Si $(\mathcal{O}, \rho, \tau)$ est ergodique, que ρ est modulaire, et que \mathcal{A} est un espace vectoriel autoadjooint TLC-admissible et L^1 -asymptotiquement abélien tel que pour tout $A \in \mathcal{A}$,*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \rho(e^{i\tilde{A}^{(t)}}) = \omega_L(W(A)), \quad (12)$$

alors pour tout $m \in \mathbb{N}^*$, tous $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ de \mathbb{R} , tous $A^{(1)}, \dots, A^{(m)}$ de \mathcal{A} ,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \rho(e^{i\alpha_1 \tilde{A}_t^{(1)}} \dots e^{i\alpha_m \tilde{A}_t^{(m)}}) = \omega_L(e^{i\alpha_1 \varphi(A^{(1)})} \dots e^{i\alpha_m \varphi(A^{(m)})}). \quad (13)$$

Remarque 1.8. Le théorème montre que sous ses hypothèses, il suffit de montrer un théorème de la limite centrale "classique" pour obtenir une convergence de fonctions pseudo-caractéristiques, associées à une algèbre de Weyl (donc d'essence bosonique). Remarquons que si nous soulignons la nature classique de la propriété (12), cela ne signifie en aucun cas que la structure quantique en est absente, puisqu'elle intervient dans la fonctionnelle $\rho(e^{i\tilde{A}^{(t)}})$.

Les théorèmes 1.1 et 1.7 ont une application simple aux fluctuations en espace (et non en temps) d'un système de spins. Pour définir ce cadre, supposons que \mathfrak{N} est une algèbre de von Neumann munie d'un état normal η (on pourra prendre plus simplement $\mathfrak{N} = \mathcal{B}(\mathcal{H})$ et η un état donné par une matrice densité). On considère alors l'algèbre de von Neumann produit

$$\mathfrak{M} = \bigotimes_{t \in \mathbb{N}^*}^{(\eta)} \mathfrak{N}$$

(qui est le produit infini stabilisé par η , i.e. construit en passant à la représentation GNS de \mathfrak{N} associée à η , voir la section 2.7.2 de [29]), que l'on munit de l'état produit noté ρ . On identifie alors $A \in \mathfrak{N}$ à $A \otimes \text{Id} \otimes \dots \in \mathfrak{M}$ et on note τ le décalage à droite sur \mathfrak{M} . On définit comme au début de cette section

$$\tilde{A}^{(t)} = \frac{1}{\sqrt{t}} \sum_{s=1}^t (\tau^s(A) - \eta(A))$$

pour $t \in \mathbb{N}^*$. On a alors avec les notations ci-dessus

$$L(A, B) = \eta(AB) - \eta(A)\eta(B) \quad \iota(A, B) = \eta([A, B]).$$

Les $\tau^s(A)$ formant une famille commutative, ils ont une loi jointe sous ρ , qui est une loi produit. Le théorème de la limite centrale classique implique alors (12). Le résultat principal de [P10] est obtenu par une application directe des théorèmes 1.1 et 1.7 : pour toutes fonctions boréliennes bornées f_1, \dots, f_p et tous $A^{(1)}, \dots, A^{(p)}$, on a

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \rho(f_1(\tilde{A}_1^{(t)}) \dots f_p(\tilde{A}_p^{(t)})) = \omega_L(f_1(\varphi(A^{(1)})) \dots f_m(\varphi(A^{(m)}))), \quad (14)$$

si pour tout $j \in \{1, \dots, m\}$ l'ensemble des points de discontinuité $\mathcal{D}(f_j)$ de f_j a une mesure de Lebesgue nulle, et que l'on suppose de plus si $\eta(A_j^2) - \eta(A_j)^2 = 0$ que f_j est continue en zéro.

Remarque 1.9. Ce résultat était déjà connu sous l'hypothèse que les f_j sont continues bornées (voir [66]). Notre apport ici est donc essentiellement l'extension aux fonctions discontinues grâce à [P9]. On peut par ailleurs facilement étendre (14) pour obtenir la convergence de tout polynôme autoadjoint en les $\tilde{A}_j^{(t)}$. Remarquons que Kuperberg prouve dans [89] que tout polynôme autoadjoint en les $\tilde{A}_j^{(t)}$ converge en loi vers son analogue en les composantes d'un vecteur gaussien de matrice de covariance $(L(A^{(i)}, A^{(j)}))_{i,j}$, sous l'hypothèse que η est tracial (auquel cas $L(A, B) \in \mathbb{R}$ pour tous A, B), et conjecture (voir la section 4 de [89]) que l'hypothèse de tracialité est superflue. Notre résultat, même après l'extension aux fonctions non bornées que nous évoquons dans la remarque 1.4, ne prouve pas à proprement parler la conjecture, car les polynômes en des gaussiennes ne sont pas en général déterminées par leurs moments (voir [73]), de sorte qu'une caractérisation par les polynômes ne suffit pas à prouver la convergence en loi.

On va maintenant appliquer les résultats des sections 1 et 2 à un système physique.

3. THÉORÈME DE LA LIMITE CENTRALE POUR LES SYSTÈMES FERMIONIQUES

Dans cette section, nous allons travailler sur une C^* -algèbre $\mathcal{O} = \text{CAR}(\mathfrak{h})$, autrement dit une C^* -algèbre engendrée par des opérateurs $\psi(f)$, $f \in \mathfrak{h}$, vérifiant les relations dites d'anticommutation canonique⁴ :

$$\psi(f)\psi(g) + \psi(g)\psi(f) = \text{Re}\langle f, g \rangle \text{Id}.$$

Notons que tous les $\psi(f)$ sont bornés, donc on pourra sans mal s'imaginer travailler sur une algèbre $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ tout entière (qui serait liée à la représentation Araki-Wyss de l'algèbre CAR, voir [30]). Des exemples de tels \mathfrak{h} pour lesquels les hypothèses à venir peuvent être vérifiées sont donnés à la fin de la section 1.2 de [P8].

On notera \mathcal{O}_e la C^* -algèbre avec unité engendrée par les opérateurs de la forme $\psi(f)\psi(g)$, $f, g \in \mathfrak{h}$. Remarquons pour des raisons d'invariance de jauge, les observables physiques du système doivent appartenir à \mathcal{O}_e . Pour \mathfrak{g} un sous-espace de \mathfrak{h} , on note $\mathcal{A}(\mathfrak{g})$, $\mathcal{A}_e(\mathfrak{g})$ les $*$ -algèbres (et non C^* -algèbres) avec unité engendrées respectivement par les $\psi(f)$ et par les $\psi(f)\psi(g)$. Si \mathfrak{g} est dense dans \mathfrak{h} , alors $\mathcal{A}(\mathfrak{g})$ (respectivement $\mathcal{A}_e(\mathfrak{g})$) est dense en norme dans \mathcal{O} (respectivement \mathcal{O}_e).

On fixe à partir de maintenant un opérateur autoadjoint (non nécessairement borné) h_0 sur \mathfrak{h} et on définit un groupe d'automorphismes $(\tau_0^t)_t$ de \mathcal{O} par $\tau_0^t(\psi(f)) = \psi(e^{ith_0} f)$; un automorphisme de ce type est dit *de Bogoliubov*. Ce τ_0 va représenter pour nous la dynamique libre, i.e. non couplée. Pour définir la dynamique couplée, on note δ_0 le générateur de τ_0 , de sorte que $\tau_0^t = e^{t\delta_0}$ (voir la section 3.2.4 de [29]). Soit alors $V \in \mathcal{A}_e(\mathfrak{g})$, qui peut donc s'écrire

$$V = \sum_{k=1}^{K_V} \prod_{j=1}^{n_k} \psi(f_{k_j})\psi(g_{k_j}). \quad (15)$$

On note $\bar{n}_V := \max(n_1, \dots, n_{K_V})$ et $\mathcal{F}(V) = \{f_{k_j}, g_{k_j}, j = 1, \dots, n_k, k = 1, \dots, K_V\}$. On définit une dynamique τ_λ pour $\lambda \in \mathbb{R}$ de module assez petit (voir ci-dessous) par

$$\tau_\lambda^t = e^{t\delta} \quad \text{où} \quad \delta = \delta_0 + i\lambda[V, \cdot].$$

4. Nous notons ici $\psi(f)$ au lieu de $\varphi(f)$ les opérateurs de champ fermioniques pour éviter toute confusion avec les opérateurs bosoniques φ de l'algèbre de fluctuation.

Des conditions assurant que ceci définit bien une dynamique fortement continue sur \mathcal{O} sont données dans la suite.

Le résultat ci-dessous peut être démontré suivant les techniques de [4, 24, 25] (voir [81] pour une preuve) lorsque $\bar{n}_V > 1$ et de [P7] lorsque $\bar{n}_V = 1$.

PROPOSITION 1.10. *Supposons qu'il existe un sous-espace vectoriel \mathfrak{g} dense dans \mathfrak{h} tel que $t \mapsto \langle f, e^{ith_0} g \rangle$ est intégrable pour tous $f, g \in \mathfrak{g}$. Posons alors $\ell_V = \int_{\mathbb{R}} \sup_{f, g \in \mathcal{F}(V)} |\langle f, e^{ith_0} g \rangle| dt$ et*

$$\lambda_V := \frac{1}{2\bar{n}_V K_V \ell_V} \frac{(2\bar{n}_V - 2)^{2\bar{n}_V - 2}}{(2\bar{n}_V - 1)^{2\bar{n}_V - 1}} \quad \text{si } \bar{n}_V > 1, \quad \lambda_V := \frac{1}{2K_V \ell_V} \quad \text{si } \bar{n}_V = 1. \quad (16)$$

Alors pour tous $A \in \mathcal{A}_e(\mathfrak{g})$ et $B \in \mathcal{A}(\mathfrak{g})$, on a

$$\sup_{|\lambda| \leq \lambda_V} \int_{\mathbb{R}} \|\tau_\lambda^t(A), B\| dt < \infty.$$

De plus, pour $|\lambda| \leq \lambda_V$, la limite suivante existe pour tout $A \in \mathcal{O}$:

$$\gamma_\lambda^+(A) := \lim_{t \rightarrow \infty} \tau_0^{-t} \circ \tau_\lambda^t(A)$$

et définit un automorphisme γ_λ^+ de \mathcal{O} appelé morphisme de Møller.

On peut dans ce cadre (voir [P7] dans le cas $\bar{n}_V = 1$ et [81] dans le cas $\bar{n}_V > 1$), montrer sous l'hypothèse d'invariance par renversement du temps les formules de Kubo et la réciprocity d'Onsager. Pour parler de notre théorème de la limite centrale, il nous faut décrire notre état initial. Soit donc T un opérateur autoadjoint sur \mathfrak{h} satisfaisant $0 \leq T \leq I$ et $[T, e^{ith_0}] = 0$ pour tout t . Soit ρ_0 l'état quasi-libre sur \mathcal{O} de densité T , c'est-à-dire que si l'on note $\epsilon(\pi)$ la signature d'une permutation $\pi \in \mathcal{P}_n$ (voir page 34), alors ρ_0 est l'unique état tel que

$$\rho_0(\psi(f_1)\psi(f_2)) = \frac{1}{2} \langle f_1, f_2 \rangle - i \operatorname{Im} \langle f_1, T f_2 \rangle,$$

et

$$\rho_0(\psi(f_1) \cdots \psi(f_n)) = \begin{cases} \sum_{\pi \in \mathcal{P}_{n/2}} \epsilon(\pi) \prod_{j=1}^{n/2} \rho_0(\psi(f_{\pi(2j-1)}) \psi(f_{\pi(2j)})) & \text{si } n \text{ est pair;} \\ 0 & \text{si } n \text{ est impair.} \end{cases}$$

Nous voyons l'état ρ_0 comme l'état initial (avant interaction) de notre système. Le système dynamique quantique $(\mathcal{O}, \tau_0, \rho_0)$ est ergodique (voir l'exemple 5.2.21 de [30]); la proposition 1.10 montre que le NESS au sens de Ruelle (voir [15]) $\rho_\lambda^+ := \rho_0 \circ \gamma_\lambda^+$, est τ_λ -invariant et que le système $(\mathcal{O}, \tau_\lambda, \rho_\lambda^+)$ est également ergodique pour $|\lambda| \leq \lambda_V$. Cet état vérifie en particulier $\lim_{t \rightarrow \infty} \rho_0 \circ \tau_\lambda^t = \rho_\lambda^+$. Dans la suite, nous supposons que $\ker T = \ker(I - T) = \{0\}$, et cette hypothèse assure que les états ρ_0 et ρ_λ^+ sont modulaires (voir le théorème 43.6 de [46]).

On considère à partir de maintenant la forme bilinéaire L définie par (8) avec $\rho = \rho_\lambda^+$ et $\tau^t = \tau_\lambda^t$, et l'algèbre $\mathcal{W}(\mathcal{A}_e(f))$ associée à L , munie de l'état ω_L et composée d'opérateurs $\varphi(A)$ pour $A \in \mathcal{A}_e(f)$. Tous ces objets sont définis en section 2. Le résultat principal de [P8] est le suivant.

THÉORÈME I.II. Supposons qu'il existe un sous-espace vectoriel \mathfrak{g} comme dans la proposition 1.10, et un sous-espace vectoriel \mathfrak{f} de \mathfrak{g} tel que $t \mapsto \langle f, e^{ith_0} T g \rangle$ est intégrable pour tous $f, g \in \mathfrak{f}$. Alors pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ avec $|\lambda| \leq 2^{-8(\bar{n}_V - 1)} \lambda_V$, tout $m \in \mathbb{N}^*$ et tous $A_1, \dots, A_m \in \mathcal{A}_e(\mathfrak{f})$, on a

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \rho_\lambda^+ (f_1(\tilde{A}_t^{(1)}) \dots f_m(\tilde{A}_t^{(m)})) = \omega_L (f_1(\varphi(A^{(1)})) \dots f_m(\varphi(A^{(m)}))) \quad (17)$$

pour toutes fonctions boréliennes bornées f_1, \dots, f_p telles que pour tout $j \in \{1, \dots, m\}$ l'ensemble des points de discontinuité de f_j a une mesure de Lebesgue nulle, et que l'on suppose de plus si $L(A^{(j)}, A^{(j)}) = 0$ que f_j est continue en zéro.

Remarque 1.12. Si T est de la forme $F(h_0)$ avec $F \in L^1$ de transformée de Fourier également L^1 , alors on peut choisir $\mathfrak{f} = \mathfrak{g}$. Cette remarque est utile dans l'application aux réservoirs fermioniques discutée ci-dessous.

Discutons la preuve du théorème 1.II. D'après les théorèmes 1.I, et 1.7, il suffit de montrer que pour tout $A \in \mathcal{A}_e(\mathfrak{f})$ on a

$$\rho_\lambda^+ (e^{i\alpha \tilde{A}_t}) \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} e^{-\frac{1}{2} \alpha^2 L(A, A)}$$

pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$. La preuve est très différente suivant que $\bar{n}_V > 1$ ou $\bar{n}_V = 1$. Le premier cas est traité dans [P8]; la preuve est beaucoup trop longue pour être détaillée ici et nous nous contentons d'en donner quelques idées ci-dessous. Le deuxième cas, beaucoup plus simple, est annoncé dans [P8] comme traité dans un article à venir qui n'a jamais été écrit, et qui nous sert ici d'introduction au cas $\bar{n}_V > 1$.

Commençons donc par traiter le cas $\bar{n}_V = 1$; la grande spécificité de ce cas est qu'alors $(\tau_\lambda^t)_t$ est encore une dynamique de Bogoliubov, i.e. il existe h_λ tel que $\tau_\lambda^t(a(f)) = a(e^{ith_\lambda} f)$, où h_λ est une perturbation de rang fini de h_0 . Par conséquent, le théorème de Kato-Rosenblum (théorème XI.8 dans [H2]) prouve l'existence de $W^\pm = \lim_{t \rightarrow \infty} e^{+ith_0} e^{-ith_\lambda}$. Cela implique que ρ_λ^+ est encore un état quasi-libre, de densité $T^+ = W_-^* T W_-$. Si l'on considère $A \in \mathcal{A}_e(\mathfrak{f})$, il peut s'écrire sous la forme d'une combinaison linéaire de produits $\varphi(f_1) \dots \varphi(f_{2\ell})$. Si l'on développe \tilde{A}_t^p dans $\sum_{p \in \mathbb{N}} \frac{i^p \alpha^p}{p!} \rho_\lambda^+ (\tilde{A}_t^p)$, on a des termes de la forme $\rho_\lambda^+ (\tilde{A}_t^{(1)} \dots \tilde{A}_t^{(p)})$, qui s'écrivent

$$t^{-p/2} \int_{[0, t]^p} \rho_\lambda^+ \left(\tau_\lambda^{s_1} (A^{(1)} - \rho_\lambda^+ (A^{(1)})) \dots \tau_\lambda^{s_p} (A^{(p)} - \rho_\lambda^+ (A^{(p)})) \right) ds_1 \dots ds_p, \quad (18)$$

où chaque $\tau_\lambda^{s_k} (A^{(k)})$ est de la forme $\varphi(e^{is_k h_\lambda} f_1^{(k)}) \dots \varphi(e^{is_k h_\lambda} f_{2\ell_k}^{(k)})$ (il y a pour chaque p un nombre exponentiel en p de tels termes, que le α^p peut absorber). Si maintenant on utilise la propriété quasi-libre de ρ_λ^+ , ceci est non nul uniquement pour p pair, et se développe alors en une somme indexée par des appariements $\pi \in \mathcal{P}_{2\ell}$ où $2\ell = 2\ell_1 + \dots + 2\ell_p$, sur des points indexés par (j, k) où $k = 1, \dots, p$ et $j = 1, \dots, 2\ell_k$. Si l'on considère alors le pseudographe obtenu en identifiant tous les points associés au même k , et que l'on note $c(\pi)$ le nombre de composantes connexes de ce pseudographe, on peut voir d'abord que le "centrage" par présence des $\rho_\lambda^+ (A^{(k)})$ dans (18) se traduit exactement par l'interdiction des π dont le pseudographe a un point isolé; ensuite, par un changement de variable, que le terme associé à π dans le développement de (18) peut se majorer en $C^{2\ell} t^{c(\pi) - p/2}$. Par conséquent, dans la limite $t \rightarrow \infty$, seuls les termes correspondants aux π avec $c(\pi) = p/2$ survivent, et une resommation de ces termes montre que

$$\rho_\lambda^+ (\tilde{A}_t^p) \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} \begin{cases} \frac{p!}{(p/2)!} L(A, A)^{p/2} & \text{si } p \text{ est pair,} \\ 0 & \text{si } p \text{ est impair,} \end{cases} \quad (19)$$

On obtient facilement des bornes uniformes en $C^p p!$ pour $\rho_\lambda^+(\tilde{A}_t^p)$, ce qui permet de conclure que $\rho_\lambda^+(e^{i\alpha\tilde{A}_t}) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} e^{-\alpha^2 L(A,A)}$.

Remarque 1.13. Une preuve similaire de ce cas $\bar{n}_V = 1$ est donnée dans un cadre différent dans [47], article que nous avons découvert après que [P8] eut été accepté pour publication.

Dans le cas $\bar{n}_V > 1$, on commence par écrire

$$\begin{aligned} & \rho_\lambda^+ \left(\tau_\lambda^{s_1} (A^{(1)} - \rho_\lambda^+(A^{(1)})) \dots \tau_\lambda^{s_p} (A^{(p)} - \rho_\lambda^+(A^{(p)})) \right) \\ &= \rho_0 \left(\tau_0^{s_1} (\gamma_\lambda^+(A^{(1)}) - \rho_0 \circ \gamma_\lambda^+(A^{(1)})) \dots \tau_0^{s_p} (\gamma_\lambda^+(A^{(p)}) - \rho_0 \circ \gamma_\lambda^+(A^{(p)})) \right) \end{aligned}$$

puis on peut écrire chaque $\gamma_+(A^{(k)})$ grâce à un développement de Dyson. Ce développement s'écrit comme série d'intégrales itérées de commutateurs. Chaque commutateur peut s'écrire à son tour (voir [81] ou [24]) comme une série indexée par des arbres avec un nombre de sommets égal à l'ordre du commutateur, chaque terme de la série étant un monôme en des opérateurs de champ, monôme dont le degré croît linéairement en l'ordre du commutateur. On peut alors tenter d'appliquer la même technique que précédemment. Pour chaque choix des k paires d'ordres et arbres, on peut essentiellement appliquer (19), mais on n'a plus de borne uniforme permettant d'appliquer le théorème de convergence dominée. Le gros du travail dans [P8] est de montrer que

$$\int_{[0,t]^p} \left| \rho_0 \left(\tau_0^{s_1} (A^{(1)} - \rho_0 \circ (A^{(1)})) \dots \tau_0^{s_p} (A^{(p)} - \rho_0 \circ (A^{(p)})) \right) \right| ds_1 \dots ds_p, \quad (20)$$

où les $A^{(k)}$ sont de la forme $\varphi(f_1^{(k)}) \dots \varphi(f_{2\ell_k}^{(k)})$ (avec $\|f_m^{(k)}\| \leq 1$ pour normaliser) admet une borne en $C_p t^{p/2} D^{\sum \ell_k}$, où D est une constante, les C_p sont uniformes en ℓ_1, \dots, ℓ_p et tels que $\sum \alpha^p C_p / p!$ a un rayon de convergence non nul. Or,

- si l'on majore (20) directement par une inégalité $|\rho_0(A)| \leq \|A\|$, l'intégrale fait que l'on a une borne $t^p D^{\sum \ell_k}$, de sorte que la dépendance en t est mauvaise;
- si l'on développe (20) grâce à la propriété quasi-libre, chaque terme se majore comme dans le cas $\bar{n}_V = 1$ en $t^{p/2} D^{\sum \ell_k}$ mais le nombre de termes est de l'ordre de $(2 \sum \ell_k)!$, de sorte que la dépendance en $\sum \ell_k$ est mauvaise.

L'idée est donc de développer (20) grâce à la propriété quasi-libre mais de resommer afin de pouvoir contrôler la croissance du nombre de termes grâce à des inégalités $|\rho_0(A)| \leq \|A\|$. Nous n'en dirons pas plus ici et renvoie le lecteur à [P8].

4. FLUCTUATION-DISSIPATION POUR LES SYSTÈMES FERMIONIQUES

Concluons donc l'application du programme ci-dessus à la question du théorème de fluctuation-dissipation. Le théorème 1.11 montre que sous certaines hypothèses, l'algèbre d'opérateurs pertinente pour décrire la limite des fluctuations d'observables d'un système fermionique (plus précisément, d'observables éléments de $\mathcal{A}_e(f)$) est l'algèbre de Weyl $\mathcal{W}(\mathcal{A}_e(f))$ sur $\mathcal{A}_e(f)$, pour la forme symplectique $\iota(A, B) = 2 \operatorname{Im} L(A, B)$. La section 1.2 de [30] donne une liste d'exemples de systèmes ouverts fermioniques pour lesquels les hypothèses du théorème 1.11 sont vérifiées. On peut alors se demander dans quel cas les observables de fluctuation $\varphi(A)$ définissent des lois jointes.

Il est clair à partir de la relation (10) définissant $\mathcal{W}(\mathcal{A}_e(f))$ que cette algèbre est commutative si et seulement si $\iota \equiv 0$ sur $\mathcal{A}_e(f)$. Une conséquence directe du théorème de Bratteli-Kishimoto-Robinson (voir la proposition 5.4.20 de [30]) est la suivante :

PROPOSITION 1.14 ([P8]). *Supposons que $\iota \equiv 0$ sur $\mathcal{A}_e(f)$, que \mathfrak{f} est dense dans \mathfrak{h} et L^1 -asymptotiquement abélien pour τ_0 , et que ρ_0 est un facteur, alors ρ est un état KMS.*

Nous ne définirons pas ici mathématiquement ce qu'est un état KMS : il nous suffit de dire que, quand le système fermionique est constitué de ℓ bains, initialement à l'équilibre thermique aux températures inverses $\beta_1, \dots, \beta_\ell$, alors l'état global ρ est KMS si et seulement si $\beta_1 = \dots = \beta_\ell$. Autrement dit, sous les hypothèses de la proposition, l'algèbre de fluctuation est commutative si et seulement si le système d'origine est à l'équilibre thermique. Or, le théorème de fluctuation-dissipation concerne justement les fluctuations à l'équilibre, donc quand $\beta_1 = \dots = \beta_\ell$. Le théorème 1.11 montre que pour tous i, j , et pour tous boréliens E, F (en supposant si $L(\Phi_i, \Phi_j) = 0$ que 0 n'est pas au bord de E) :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \rho(\mathbb{1}_E(\tilde{\Phi}_{i,t}) \mathbb{1}_F(\tilde{\Phi}_{j,t}) \mathbb{1}_E(\tilde{\Phi}_{i,t})) = \mathbb{P}(N_i \in E, N_j \in F)$$

où (N_1, \dots, N_ℓ) est un vecteur gaussien centré de matrice de covariance $(2L(\Phi_i, \Phi_j))_{i,j=1}^\ell$. Tout mesure séquentielle des fluctuations d'énergie de deux réservoirs est donc donnée asymptotiquement par la loi d'un couple de variables aléatoires gaussiennes, dont la covariance est bien $2L$, où L est la matrice des coefficients de transport de Kubo donnés par (2). Ceci semble donc compléter la preuve de la réponse linéaire pour les systèmes fermioniques en interaction locale.

Remarque 1.15. On peut se demander pourquoi ce programme n'a pas été poursuivi, par exemple pour des systèmes bosoniques. Une première réponse est technique : les resommations utilisées dans la preuve "diagrammatique" sont très spécifiques au cas fermionique. Une deuxième réponse bien plus importante est que notre choix d'opérateurs de fluctuations $\tilde{\Phi}_{i,t}$ est dicté par la relation

$$\tau^t(H_i) - H_i = \int_0^t \tau^s(\Phi_i) ds$$

où les H_i sont les hamiltoniens de la dynamique libre de \mathcal{R}_i ; autrement dit, nous nous sommes intéressés aux fluctuations de variations $\tau^t(H_i) - H_i$. Or, comme nous allons le montrer dans le chapitre suivant, ces opérateurs n'ont pas de sens physique satisfaisant et ont le mauvais goût de ne pas vérifier certaines propriétés de symétrie physiquement essentielles. La découverte d'une autre interprétation des fluctuations, physiquement plus satisfaisante, a réorienté notre programme. Cette interprétation est présentée dans le chapitre suivant.

CHAPITRE 2

MESURES À DEUX TEMPS ET FORMULATIONS STATISTIQUES DE LA THERMODYNAMIQUE

Dans ce chapitre, nous discutons les résultats de [P11] et [P21], et mettons en place une partie de la problématique de [P22]. Notons que [P11], s'il a été publié comme notes de conférences, a été le premier à faire le lien entre mesures à deux temps et opérateurs modulaires relatifs, définissant ainsi une méthode efficace pour considérer les limites (thermodynamiques et à grand temps) des statistiques de mesures à deux temps. La technique consistant alors, en général, en une application de procédés déjà connus, nous n'avons pas jugé utile de faire de l'exposition de ce programme une publication en revue.

I. INSUFFISANCES DE LA QUANTIFICATION NAÏVE

Nous avons jusqu'à maintenant, si A était une observable représentant une certaine quantité physique, modélisé les variations de cette quantité par l'observable $\tau^t(A) - A$. En particulier, dans le cadre d'un système ouvert hors équilibre, nous avons modélisé la variation de l'énergie du réservoir \mathcal{R}_j entre les temps 0 et t par l'observable $\tau^t(H_j) - H_j$. Il y a là deux problèmes cependant. Le premier concerne le sens opérationnel de cette observable : on ne sait pas définir de procédé expérimental permettant d'en effectuer la mesure. Ensuite, quand on applique cette approche à l'observable d'entropie (voir ci-dessous), les lois obtenues ne satisfont pas la *relation de fluctuation*, qui est une identité a priori fondamentale vérifiée par les systèmes classiques. Dans le cas classique, cette relation a d'abord été observée dans des simulations numériques dans [55], une première explication théorique a été donnée dans [57] et [64], et les premières observations expérimentales ont été décrites dans [123] (nous renvoyons le lecteur à [114] pour un compte-rendu historique des relations de fluctuation).

Pour décrire cette relation, considérons d'abord le cas classique; afin d'éviter un changement de notation, nous considérons \mathcal{O} une C^* -algèbre commutative, $(\tau^t)_t$ un groupe d'automorphismes qui est un flot hamiltonien $\tau^t : f \mapsto f \circ e^{t\mathcal{L}}$, et ρ un état qui est maintenant l'intégration par une mesure de probabilité, dont on suppose qu'elle admet une densité par rapport à une mesure de référence \mathcal{L} -invariante (en pratique, cette mesure de référence est la mesure de Liouville de l'espace des phases). On définit alors pour $t \in \mathbb{R}$ une variable aléatoire Σ_t par $\frac{d\rho_{-t}}{d\rho} = e^{-t\Sigma_t}$. La variable Σ_t représente donc l'information relative par unité de temps de ρ par rapport à ρ_{-t} (voir [35]), et vérifie la relation $S(\rho_t|\rho) = t\rho(\Sigma_t)$. Cette identité (ainsi que celle qui concerne l'entropie relative de Rényi voir (3) ci-dessous) justifie de voir Σ_t comme la variable de production d'entropie. On suppose de plus que le système est invariant par un renversement du temps, c'est-à-dire qu'il existe une involution ϑ sur l'espace d'état, telle que $\{f \circ \vartheta, g \circ \vartheta\} = -\{f, g\}$, qui vérifie $e^{t\mathcal{L}} \circ \vartheta = \vartheta \circ e^{-t\mathcal{L}}$ et $\rho \circ \vartheta = \rho$. On va s'intéresser aux distributions \mathbb{P}_t de $+\Sigma_t$ et $\widehat{\mathbb{P}}_t$ de

$-\Sigma_t$, dans les deux cas par rapport à l'état de référence ρ . On montre facilement que l'on a la relation $\Sigma_t \circ e^{-t\mathcal{L}} = \Sigma_{-t} = -\Sigma_t \circ \vartheta$. Alors pour toute fonction f continue bornée, par des manipulations élémentaires on a

$$\rho(f(-\Sigma_t)) = \rho_t(f(-\Sigma_t) \circ e^{-t\mathcal{L}}) = \rho_t(f(\Sigma_t) \circ \vartheta) = \rho_{-t}(f(\Sigma_t)) = \rho(f(\Sigma_t) e^{-t\Sigma_t}). \quad (1)$$

Par conséquent, \mathbb{P}_t et $\widehat{\mathbb{P}}_t$ vérifient la relation universelle

$$\frac{d\widehat{\mathbb{P}}_t}{d\mathbb{P}_t}(\varsigma) = e^{-t\varsigma} \quad (2)$$

qui montre qu'une baisse de l'entropie d'une valeur ς est pénalisée (au sens probabiliste du terme) d'un facteur $e^{-t\varsigma}$ par rapport à une hausse de la même valeur. Ceci dit en particulier que des trajectoires donnant lieu à une diminution de l'entropie ont une probabilité non nulle même si extrêmement faible (ceci, y compris la relation (2) a été vérifié expérimentalement, voir [123]).

Remarquons enfin qu'il suffit de vérifier l'identité (1) ci-dessus dans le cas $f(s) = e^{\alpha s}$, de sorte que (2) est équivalente à l'invariance de $\alpha \mapsto \int e^{-\alpha x} d\mathbb{P}_t(x)$ par $\alpha \rightarrow 1 - \alpha$. Il est immédiat que dans le cas où l'on a invariance par renversement du temps, l'entropie relative de Rényi s'écrit

$$S_\alpha(\rho_t|\rho) = \log \rho(e^{-t\alpha\Sigma_t}). \quad (3)$$

Par conséquent, la relation (2) est équivalente à

$$S_\alpha(\rho_t|\rho) = S_{1-\alpha}(\rho_t|\rho). \quad (4)$$

Revenons maintenant au cadre quantique : supposons \mathcal{H} un espace de Hilbert de dimension finie, et \mathcal{O} est $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ muni d'un état ρ fidèle et d'une dynamique $\tau^t(X) = e^{+itH} X e^{-itH}$. Si l'on définit une observable Σ_t par $\tau^t(\log \rho) - \log \rho = -t\Sigma_t$, on a encore une fois¹

$$t\rho(\Sigma_t) = S(\rho_t|\rho) \quad (5)$$

(où l'entropie relative de deux états σ et τ est définie essentiellement² par $S(\sigma|\tau) = \text{tr}(\sigma(\log \sigma - \log \tau))$) et une identité similaire pour l'entropie relative de Rényi, voir ci-dessous. Une entropie relative étant toujours positive, on a $\rho(\Sigma_t) \geq 0$, ce qui est la formulation usuelle du deuxième principe de la thermodynamique. De plus, dans le cas où ρ est un produit d'états de Gibbs, i.e. est proportionnel à $\exp -\sum_j \beta_j H_j$, les H_j étant des observables qui commutent entre elles (ce sera le cas quand ρ décrira l'état découplé de plusieurs réservoirs, chacun étant à l'équilibre thermique), alors on a immédiatement $\Sigma_t = -\frac{1}{t} \sum_j \beta_j (\tau^t(H_j) - H_j)$; or dans une interprétation "à la Clausius" de l'entropie, $\sum_j \beta_j (\tau^t(H_j) - H_j)$ devrait représenter la variation totale d'entropie des réservoirs, si l'on assimile comme on l'a fait jusqu'ici la variation d'énergie de \mathcal{R}_j à $\tau^t(H_j) - H_j$. On s'attend donc à ce que les lois dans l'état ρ de $+\Sigma_t$ et $-\Sigma_t$ vérifient des relations identiques à celles que nous avons observées dans le cas classique.

Voyons donc si c'est le cas. On montre facilement que $\tau^{-t}(\Sigma_t) = \Sigma_{-t} = -\vartheta(\Sigma_t)$. Encore une fois, pour toute fonction f continue bornée,

$$\rho(f(-\Sigma_t)) = \rho_t(\tau^{-t}(f(-\Sigma_t))) = \rho_t(\vartheta(f(\Sigma_t))) = \rho_{-t}(f(\Sigma_t));$$

1. On fera particulièrement attention, dans ce paragraphe, au fait que si l'état ρ a pour matrice densité ϱ , alors $\rho_t := \rho \circ \tau^t$ a pour matrice densité $\tau^{-t}(\varrho)$.

2. Si l'on suppose par exemple σ et τ fidèles; ceci n'est pas ici une limitation sérieuse.

on peut encore écrire

$$\rho_{-t}(f(\Sigma_t)) = \rho(f(\Sigma_t)) e^{\log \tau^t(\rho)} e^{-\log \rho} = \rho(f(\Sigma_t)) e^{\log \rho - t \Sigma_t} e^{-\log \rho}$$

mais ceci n'est pas a priori égal à $\rho(f(\Sigma_t)) e^{-t \Sigma_t}$. Plus précisément, si cette relation était vraie pour $f \equiv 1$, alors on aurait $\rho(e^{-t \Sigma_t}) = 1$, donc

$$1 = \text{tr}(e^{\log \rho} e^{-t \Sigma_t}) \geq \text{tr}(e^{\log \rho - t \Sigma_t}) = \rho_t(\text{Id}) = 1$$

où l'inégalité vient d'une application directe de l'inégalité de Golden–Thompson (voir par exemple IX.3.7 de [21]). Or, on ne peut avoir égalité que si les opérateurs concernés, ici $\log \rho$ et $-t \Sigma_t$, commutent (voir la proposition II.7.13 de [105]), ce qui équivaut à ce que ρ et H commutent. Par conséquent, la relation $\frac{d\mathbb{P}_t}{d\mathbb{P}_t}(\varsigma) = e^{-t\varsigma}$ ne peut être vraie que si $\rho_t \equiv \rho$ pour tout t , ce qui limite fortement l'intérêt du modèle considéré. De plus, toute interprétation en termes de trajectoire est a priori exclue dans le domaine quantique, puisque la notion même de trajectoire est problématique dans le cadre quantique (voir [113]).

Il faut donc une autre approche pour espérer retrouver des symétries universelles comme (1). Remarquons que dans le cas classique (1) est équivalente à la symétrie (4) de l'entropie relative de Rényi. L'entropie relative de Rényi non commutative est définie essentiellement³ par $S_\alpha(\rho_t|\rho) = \log \text{tr}(\rho_t^\alpha \rho^{1-\alpha})$; on dira ici que le système défini par l'espace \mathcal{H} , l'état ρ et le hamiltonien H est *invariant par renversement du temps* (IRT) s'il existe une involution antilinéaire ϑ de $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ telle que $\rho(\vartheta(A)) = \rho(A^*)$ pour tout $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$, et $\vartheta(H) = H$.

Sous cette hypothèse IRT, on a en utilisant l'antilinéarité de ϑ puis l'invariance de la trace par τ^t :

$$\text{tr}(\rho_t^\alpha \rho^{1-\alpha}) = \text{tr}(\vartheta(\rho^{1-\alpha} \rho_t^\alpha)) = \text{tr}(\rho^{1-\alpha} \rho_{-t}^\alpha) = \text{tr}(\rho_t^{1-\alpha} \rho^\alpha).$$

La fonctionnelle $S_\alpha(\rho_t|\rho)$ vérifie donc la symétrie par rapport à $\alpha \mapsto 1 - \alpha$ si le système est IRT. On ne sait en revanche pas l'interpréter cette symétrie de manière "opérationnelle". C'est ce que nous allons discuter dans la prochaine section.

2. OPÉRATEUR MODULAIRE RELATIF ET MESURES À DEUX TEMPS

Aux débuts des années 2000, deux prépublications ont proposé des fonctionnelles qui vérifient des relations du type $e(\alpha) = e(1 - \alpha)$ et qui sont reliées à des mesures projectives. La première que nous allons aborder est due à Matsui et Tasaki [120]. Pour la détailler, nous commençons par définir, dans le cas où $\mathcal{O} = \mathcal{B}(\mathcal{H})$ avec $\dim \mathcal{H} < \infty$, sa *représentation standard* : sur l'espace de Hilbert $\mathcal{K} := \mathcal{B}(\mathcal{H})$ muni du produit scalaire de Hilbert–Schmidt $\langle A, B \rangle_{\mathcal{K}} := \text{tr}(A^* B)$, on définit pour ν un état de \mathcal{O} le vecteur $\Omega_\nu = \nu^{1/2}$ de \mathcal{K} , et si μ et ν sont deux états fidèles, un opérateur autoadjooint $\Delta_{\mu|\nu}$ sur \mathcal{K} par

$$\Delta_{\mu|\nu}(X) = \mu X \nu^{-1}.$$

Matsui et Tasaki proposent de considérer la transformée de Laplace de la loi de l'opérateur $\log \Delta_{\rho_t|\rho}$ dans l'état pur $|\Omega_{\rho_t}\rangle\langle\Omega_{\rho_t}|$. Cette loi \mathbb{P}_t vérifie alors bien l'invariance de $\alpha \mapsto \int e^{-\alpha x} d\mathbb{P}_t(x)$ par $\alpha \mapsto 1 - \alpha$: ceci revient à une identité déjà observée, car par un calcul direct

$$\langle \Omega_{\rho_t}, e^{-\alpha \log \Delta_{\rho_t|\rho}} \Omega_{\rho_t} \rangle = \exp S_{1-\alpha}(\rho_t|\rho).$$

3. Encore une fois, cette expression est rigoureuse si l'on suppose les deux états fidèles.

Si la proposition de Tasaki et Matsui reliait bien la symétrie voulue à la loi d'un opérateur autoadjoint, celui-ci n'était pas une observable au sens où il ne provenait pas de l'algèbre des observables initiale : l'opérateur $\Delta_{\rho_t|\rho}$ n'appartient en général pas à $\pi(\mathcal{O})$ (ni même à l'algèbre de von Neumann engendrée $\pi(\mathcal{O})''$). Le sens physique de la symétrie n'est donc pas clair ; en revanche cette proposition avait l'avantage de s'étendre immédiatement à toute algèbre de von Neumann (l'article [120] est rédigé dans ce cadre général).

La deuxième proposition dont nous allons parler est celle de Kurchan, dans la prépublication [90] (qui n'a jamais été publiée). Elle est liée à ce que nous appelons depuis la *statistique des mesures à deux temps*⁴ Puisqu'elle va nous servir à plusieurs reprises dans la suite, nous allons considérer un cadre plus général que celui de Kurchan (i.e. pour d'autres quantités observées que l'entropie) : nous revenons à l'algèbre $\mathcal{O} = \mathcal{B}(\mathcal{H})$ munie de l'évolution unitaire définie par le hamiltonien H , et considérons une observable A . On peut effectuer l'expérience suivante :

- on mesure A au temps 0, ce qui donne un résultat aléatoire a_1 et modifie l'état du système suivant le postulat de projection (1) ;
- on laisse ensuite le système évoluer pendant un temps t ;
- on mesure à nouveau A au temps t , ce qui donne un résultat aléatoire a_2 .

La statistique de la mesure à deux temps de A entre les instants 0 et t est définie comme la loi de $\varsigma = (a_2 - a_1)/t$. Elle a donc un sens opérationnel parfaitement défini, mais elle fait appel de manière essentielle à la dimension finie du système.

Remarque 2.1. On pourrait mesurer deux observables différentes avant et après l'interaction, mais nous nous limitons à des situations où l'on mesure deux fois la même observable.

On peut expliciter la loi de ς : pour cela, écrivons la décomposition spectrale $A = \sum_{a \in \text{sp } A} a \pi_a$ de A . Suivant les règles de Born, une mesure de A dans l'état initial ρ donne un résultat a_1 avec probabilité $\text{tr}(\rho \pi_{a_1})$, après quoi le système est dans l'état $\pi_{a_1} \rho \pi_{a_1} / \text{tr}(\rho \pi_{a_1})$. On peut également écrire ces quantités sous la forme $\text{tr}(\tilde{\rho}_A \pi_{a_1})$ et $\tilde{\rho}_A \pi_{a_1} / \text{tr}(\tilde{\rho}_A \pi_{a_1})$, où $\tilde{\rho}_A$ est l'état *a priori* relatif à A , défini comme

$$\tilde{\rho}_A = \sum_{a \in \text{sp } A} \pi_a \rho \pi_a. \quad (6)$$

Dans de nombreuses situations (en particulier celle considérée par Kurchan, voir ci-dessous), ρ et A commutent entre eux et on aura donc $\rho = \tilde{\rho}_A$. Après cette première mesure, le système évolue pendant un temps t et son état devient donc $e^{-itH} \tilde{\rho}_A \pi_{a_1} e^{+itH} / \text{tr}(\tilde{\rho}_A \pi_{a_1})$. La deuxième mesure de A , au temps t , donne a_2 avec, conditionnellement au premier résultat a_1 , la probabilité

$$\text{tr} \left(e^{-itH} \tilde{\rho}_A \pi_{a_1} e^{+itH} \pi_{a_2} \right) / \text{tr}(\tilde{\rho}_A \pi_{a_1}).$$

La probabilité d'obtenir a_1 puis a_2 dans ces deux mesures est donc

$$\text{tr} \left(e^{-itH} \tilde{\rho}_A \pi_{a_1} e^{+itH} \pi_{a_2} \right).$$

La statistique de la mesure à deux temps de A est la loi de $\phi = (a_2 - a_1)/t$, qui s'écrit donc

$$\mathbb{P}_{A,t}(\phi) = \sum_{a_2 - a_1 = t\phi} \text{tr} \left(e^{-itH} \tilde{\rho}_A \pi_{a_1} e^{+itH} \pi_{a_2} \right).$$

4. Celle-ci est encore appelée pour raisons historiques la "full counting statistics" car sa première utilisation, par Lesovik et Levitov (dans [93]) considérait des nombres d'électrons traversant un composant.

Cette expression de $\mathbb{P}_{A,t}$ semble peu pratique à manipuler. La magie opère quand on considère la fonction génératrice $\chi_{A,t}(\alpha) = \int e^{-\alpha t \phi} d\mathbb{P}_{A,t}(\phi)$: on voit immédiatement que

$$\chi_{A,t}(\alpha) = \text{tr} \left(e^{-itH} \tilde{\rho}_A e^{+\alpha A} e^{+itH} e^{-\alpha A} \right). \quad (7)$$

Cette construction s'étend immédiatement au cas où l'on mesure plusieurs observables A_1, \dots, A_ℓ : si celles-ci commutent entre elles, on peut les mesurer simultanément et alors on obtient une probabilité $\mathbb{P}_{\mathbf{A},t}$ sur \mathbb{R}^ℓ , vérifiant (7) avec $\alpha \in \mathbb{R}^\ell$ et $\alpha \cdot \mathbf{A} := \sum_{j=1}^\ell \alpha_j A_j$ remplaçant αA .

Remarque 2.2. Relevons tout de suite une conséquence immédiate de (7) :

$$\begin{aligned} -\frac{\partial \chi_{A,t}}{\partial \alpha} \Big|_{\alpha=0} &= \int \phi d\mathbb{P}_{A,t}(\phi) = \tilde{\rho}_A(\tau^t(A) - A), \\ \frac{\partial^2 \chi_{A,t}}{\partial \alpha^2} \Big|_{\alpha=0} &= \int \phi^2 d\mathbb{P}_{A,t}(\phi) = \tilde{\rho}_A((\tau_t(A) - A)^2), \end{aligned} \quad (8)$$

qui montre que les deux premiers moments de $\mathbb{P}_{A,t}$ sont les mêmes que ceux de la loi de $\tau^t(A) - A$ dans l'état ρ . Ceci contribue à expliquer pourquoi tant d'études "hors équilibre" ont été faite au niveau de ces deux moments, et pourquoi le formalisme par mesure à deux temps à mis tant d'années à émerger.

Revenons à la proposition de Kurchan dans [90] : celui-ci considère le cas $A = -\log \rho$. Alors $\tilde{\rho}_A = \rho$, et la fonctionnelle $e_t := \log \chi_{A,t}$ s'écrit

$$e_t(\alpha) = \log \text{tr} \left(e^{-itH} \rho^{1-\alpha} e^{+itH} \rho^{+\alpha} \right) = \log \text{tr} \left(\rho^{\alpha/2} e^{-itH} \rho^{1-\alpha} e^{+itH} \rho^{\alpha/2} \right). \quad (9)$$

On remarque donc que cette dernière expression donne

$$e_t(\alpha) = \log \text{tr} \left(\rho_t^{1-\alpha} \rho^\alpha \right) = S_{1-\alpha}(\rho_t | \rho).$$

Par conséquent, la fonctionnelle proposée par Tasaki et Matsui dans [120], et celle proposée par Kurchan dans [90], sont essentiellement les mêmes. Les mesures à deux temps permettent donc d'avoir accès à la loi de quantités qui ne sont pas des observables au sens mathématique du terme. On peut de manière équivalente définir une probabilité \mathbb{P}_t comme la loi de la mesure à deux temps de $A = -\log \rho$ ou comme la loi de $\frac{1}{t} \log \Delta_{\rho_t | \rho}$ dans l'état pur $|\Omega_{\rho_t}\rangle \langle \Omega_{\rho_t}|$, et alors \mathbb{P}_t vérifie la propriété (2). Cette observation a été faite pour la première fois dans [P11], et permet d'étendre dans un cadre plus général la construction des mesures à deux temps, voir la section suivante.

Remarque 2.3. Il est utile à ce point de discuter des différences entre l'approche par mesure à deux temps et celle par mesures séquentielles, adoptée au chapitre précédent. Une différence évidente tient en ce que la statistique $\mathbb{P}_{A,t}$ des mesures à deux temps de A est la loi d'une variation $a_2 - a_1$. On pourrait alors croire qu'elle est simplement une marginale des statistiques de mesures séquentielles, de A puis de son évoluée $e^{+itH} A e^{-itH}$. Rappelons que la probabilité d'obtenir deux mesures a_1 puis a_2 est

$$\text{tr} \left(e^{-itH} \pi_{a_1} \rho \pi_{a_1} e^{+itH} \pi_{a_2} \right)$$

qui est bien l'expression de la probabilité d'une mesure séquentielle (a_1, a_2) de A puis de $e^{+itH} A e^{-itH}$ (voir (1.6)). Cependant, sommer cette dernière expression sur les $a_1 \in E$ ne donne pas en général la probabilité d'une mesure séquentielle, dans E puis égale à b (ce sera le cas si ρ commute avec A : remarquons qu'à ce titre l'introduction de $\tilde{\rho}_A$ ci-dessus a tendance à obscurcir ce point). Le protocole de définition des mesures à deux temps ne suppose donc pas en général que l'on a accès à toutes les "questions" concernant A lors de la première mesure, mais bien que l'on fait une mesure de la valeur de l'observable A . C'est ce qui rend délicate une définition opérationnelle des mesures à deux temps au-delà du cas fini.

Remarque 2.4. L'article [P11] définit en fait dans le cadre de $\mathcal{O} = \mathcal{B}(\mathcal{H})$, $\dim \mathcal{H} < \infty$, toute une famille de fonctionnelles : pour tout $p \geq 1$, on pose

$$e_{p,t}(\alpha) = \log \operatorname{tr} \left(\left(\rho^{(1-\alpha)/p} \rho_t^{2\alpha/p} \rho^{(1-\alpha)/p} \right)^{p/2} \right),$$

de sorte que la fonctionnelle e_t ci-dessus est $e_t = e_{2,t}$. Puisque $\log \rho_t = \log \rho + t\Sigma_{-t}$, la formule de Lie–Trotter montre

$$\lim_{p \rightarrow \infty} e_{p,t}(\alpha) = \log \operatorname{tr} (e^{\log \rho + \alpha t \Sigma_{-t}}) =: e_{\infty,t}(\alpha).$$

L'inégalité d'Araki–Lieb–Thirring (inégalité (IX.13) dans [21]) montre que $p \mapsto e_{p,t}(\alpha)$ est une fonction continue décroissante. On montre facilement que $\alpha \mapsto e_{p,t}(\alpha)$ est convexe, analytique réelle, et vérifie sous l'hypothèse d'invariance par renversement du temps la symétrie

$$e_{p,t}(1 - \alpha) = e_{p,t}(\alpha) \text{ pour } \alpha \in \mathbb{R}.$$

Ces fonctionnelles $e_{p,t}(\alpha)$ ont été redécouvertes et étudiées sous le nom de (α, z) -entropies par Aude-naert et Datta ([10]) et les fonctions $\alpha \mapsto e_{2\alpha,t}(\alpha)$ (qui ne vérifient pas la symétrie par $\alpha \mapsto 1 - \alpha$) sont les “sandwiched Rényi entropies” définies par la suite dans [103, 124], qui ont des applications pour les réciproques fortes en tests d'hypothèses quantiques, voir [75, 101, 102]. Les fonctionnelles $e_{p,t}$ pour $p \neq 2$ n'ayant pas à notre connaissance d'interprétation opérationnelle (hors, éventuellement, de l'interprétation peu immédiate donnée par ces réciproques fortes), nous n'en parlerons plus dans ce document.

3. FORMULATION STATISTIQUE DU DEUXIÈME PRINCIPE

La section précédente a donné dans le cadre de $\mathcal{O} = \mathcal{B}(\mathcal{H})$ avec $\dim \mathcal{H} < \infty$ une probabilité \mathbb{P}_t concernant le taux de variation de l'entropie entre 0 et t . Cependant, ce qui nous intéresse est le régime $t \rightarrow \infty$, et de nombreux arguments montrent qu'il ne se passe essentiellement rien si \mathcal{H} reste de dimension finie (on peut par exemple montrer que $S(\rho_t | \rho) \xrightarrow[t \rightarrow 0]{} 0$ si H a un spectre discret, voir la remarque 5.1 de [P11]), ce qui montre que tout NESS ρ_+ est normal – ce qui est analogue à l'absolue continuité – par rapport à ρ . Par conséquent, avant de considérer la limite $t \rightarrow \infty$, il faut prendre la *limite thermodynamique* du système, pour en faire un système “infini”.

Une première approche est de considérer dès le départ une algèbre d'opérateurs décrivant ce système infini. C'est possible, et comme nous l'avons écrit, l'un des intérêts du lien avec la définition de Matsui et Tasaki de la statistique des mesures à deux temps est qu'elle s'étendra dans ce cadre, voir la remarque 2.9. On peut cependant éviter d'introduire le formalisme algébrique en modélisant le système infini comme approché (en un sens qui dépendra des modèles) par une suite $(\mathcal{H}^{(N)}, \rho^{(N)})_N$ d'espaces finis chacun muni d'un état, et en supposant que la suite des fonctions $e_t^{(N)}$ associées à $(\mathcal{H}^{(N)}, \rho^{(N)})$ par (9) converge en un sens suffisant : on supposera que pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$e_t(\alpha) := \lim_{N \rightarrow \infty} e_t^{(N)}(\alpha) \text{ existe pour } |\alpha| < \alpha_0. \quad (10)$$

Dans ce cas, il existe pour tout t une probabilité \mathbb{P}_t sur \mathbb{R} qui est limite au sens des moments exponentiels de la suite des $\mathbb{P}_t^{(N)}$ associé à $(\mathcal{H}^{(N)}, \rho^{(N)})$. On a en particulier par (8) et (10)

$$\int \varsigma \, d\mathbb{P}_t(\varsigma) = \lim_{N \rightarrow \infty} \rho^{(N)}(\Sigma_t^{(N)}) = \lim_{N \rightarrow \infty} S(\rho_t^{(N)} | S^{(N)}) \quad (11)$$

qui est donc une quantité positive. On verra \mathbb{P}_t comme la loi du taux de variation de l'entropie entre 0 et t : la relation (11), qui est une expression du deuxième principe de la thermodynamique, nous dit que la variation d'entropie *moyenne* est positive. Si maintenant on suppose que le système est invariant par renversement du temps (au sens où tous les systèmes $\mathcal{H}^{(N)}, \rho^{(N)}, H^{(N)}$ le sont), la symétrie $e_t^{(N)}(\alpha) = e_t^{(N)}(1 - \alpha)$ implique que la convergence (10) a lieu sur un ouvert contenant $[0, 1]$, et que l'on a encore

$$e_t(\alpha) = e_t(1 - \alpha) \quad (12)$$

sur cet ouvert. Cette symétrie est appelée “symétrie de Evans–Searles” (en référence à [57]), et implique la relation

$$\frac{d\widehat{\mathbb{P}}_t}{d\mathbb{P}_t}(s) = e^{-ts} \quad (13)$$

qui exprime les probabilités relatives d'une hausse de l'entropie, ou d'une baisse de la même valeur, sur $[0, t]$. Ce résultat sur la loi \mathbb{P}_t est plus fort que la positivité de la moyenne : il implique que $\int_{\mathbb{R}} e^{-ts} d\mathbb{P}_t = \int_{\mathbb{R}} d\mathbb{P}_t = 1$ (relation analogue à l'identité de Jarzynski) ce qui par l'inégalité de Jensen implique à son tour $\int_{\mathbb{R}} s d\mathbb{P}_t \geq 0$. Nous voyons la relation (13) comme une expression statistique du deuxième principe, qui s'applique à des trajectoires individuelles et non à des moyennes sur des grands nombres de réalisations. Un avantage supplémentaire des relations de fluctuation est qu'elles donnent des égalités (par exemple $\int_{\mathbb{R}} e^{-ts} d\mathbb{P}_t = 1$) là où les formulations en moyenne donnent des inégalités (comme $\int_{\mathbb{R}} s d\mathbb{P}_t \geq 0$).

Remarque 2.5. On pourra à juste titre objecter que dans la limite $N \rightarrow \infty$, notre procédé expérimental exige de mesurer une quantité non locale (entropie ou, plus bas, énergie d'un réservoir infini), ce qui ne semble plus réalisable en pratique. Des procédés expérimentaux basés sur l'observation d'un seul spin auxiliaire couplé au système et permettant d'accéder à e_t ont été proposés dans [33, 50, 98] et réalisés dans [15].

Il reste a priori, pour tirer des informations d'ordre thermodynamique de nos fonctionnelles, à considérer la limite $t \rightarrow \infty$. Définissons sans préjuger pour l'instant de son domaine de définition :

$$e_+(\alpha) := \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} e_t(\alpha). \quad (14)$$

On peut donner les résultats suivants :

PROPOSITION 2.6 ([PII]). *Supposons que (14) soit vraie pour tout α dans un intervalle ouvert \mathcal{I} et que la fonction limite e_+ soit dérivable sur \mathcal{I} . Alors :*

1. *si \mathcal{I} est un voisinage de l'origine, ς converge exponentiellement vers $\langle \sigma \rangle_+ := -e'_+(0) \geq 0$;*
2. *s'il existe un voisinage complexe \mathcal{V} de l'origine tel que $\sup_{t>1} \sup_{\alpha \in \mathcal{V}} \frac{1}{t} |\log e_t(\alpha)| < \infty$, alors on a la convergence en distribution*

$$\sqrt{t}(\varsigma - \langle \sigma \rangle_+) \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} \mathcal{N}(0, e''_+(0));$$

3. *si l'on suppose que \mathcal{I} contient $[0, 1]$ (on suppose alors \mathcal{I} symétrique par rapport à $1/2$ pour simplifier les notations), et que le système est invariant par renversement du temps, alors*

$$e_+(\alpha) = e_+(1 - \alpha) \text{ pour tout } \alpha \in \mathcal{I}, \quad (15)$$

et avec $S := \sup_{\alpha \in \mathcal{I}} e'_+(\alpha)$, on a que

$$I(\varsigma) := - \inf_{\alpha \in \mathcal{I}} (\alpha \varsigma + e_+(\alpha))$$

est positive, convexe, différentiable sur $] - S, +S[$, s'annule uniquement en $\langle \sigma \rangle_+$, et vérifie

$$I(-s) = s + I(s). \quad (16)$$

Enfin, ς vérifie un principe de grandes déviations local : par exemple, pour tout ouvert J de l'intervalle $] - S, +S[$:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \log \mathbb{P}_t(J) = - \inf_{s \in J} I(s). \quad (17)$$

Ce résultat découle directement du théorème de Gärtner-Ellis (voir les théorèmes 2.3.6 de [45] et les théorèmes II.6.3–II.6.4 de [52]), du théorème de Bryc (voir [32]) et des symétries à temps fini (12).

Remarque 2.7. La relation (16) satisfaite par la fonction de taux I est héritée de la symétrie (12). Remarquons cependant que le principe de grande déviations (17) ne nous apprend rien, puisqu'il est une conséquence de la relation à temps fini (13), qui est exacte. Les deux autres points sont des conséquences de l'hypothèse d'existence de e_+ , sans lien avec les relations de symétrie. Nous n'avons énoncé cette proposition 2.6 que pour y faire référence plus loin.

Remarque 2.8. La symétrie $e_+(\alpha) = e_+(1 - \alpha)$ n'est pas a priori la même que la symétrie Gallavotti–Coben (voir [64]). Cette dernière s'exprime elle aussi par une relation de symétrie $e_{GC}(\alpha) = e_{GC}(1 - \alpha)$ pour une certaine fonctionnelle e_{GC} . La différence entre e_+ et e_{GC} concerne l'état de référence : la première considère l'état initial ρ , tandis que la seconde considère l'état permanent ρ_+ . Cependant, dans tous les modèles non triviaux pour lesquels nous avons pu calculer les deux fonctionnelles, elles se sont avérées égales.

Remarque 2.9. Notre approche de la limite thermodynamique via l'existence de limite des fonctionnelles $e_t^{(N)}$ a l'inconvénient qu'elle nous prive de toute formule qui s'exprime en fonction des éléments du “vrai” système dynamique. Nous allons donc discuter l'autre approche, qui utilise la définition de Matsui et Tasaki de e_t . Celle-ci utilise la théorie de Tomita–Takesaki, qui montre que toute algèbre de von Neumann \mathcal{O} admet une représentation standard $\pi : \mathcal{O} \rightarrow \mathcal{B}(\mathcal{K})$ (voir la section 2.5.4 de [29]), unique à conjugaison unitaire près, telle qu'il existe des opérateurs autoadjoints $\Delta_{\rho_t|\rho}$ sur \mathcal{K} qui ont un certain nombre de propriétés remarquables, et des vecteurs Ω_η pour tout état η , tels que $\langle \Omega_\eta, \pi(X)\Omega_\eta \rangle_{\mathcal{K}} = \eta(X)$. On peut alors définir la fonctionnelle

$$e_t(\alpha) := \log \langle \Omega_\rho, \Delta_{\rho_t|\rho}^\alpha \Omega_\rho \rangle_{\mathcal{K}}$$

et la probabilité \mathbb{P}_t comme la loi de $-\frac{1}{t} \log \Delta_{\rho_t|\rho}$ dans l'état pur $|\Omega_\rho\rangle\langle\Omega_\rho|$. De plus, dans de nombreuses situations où le système physique considéré \mathcal{O} peut être approché par des systèmes finis $\mathcal{O}^{(N)}$, on peut montrer que les fonctionnelles associées $e_t^{(N)}(\alpha)$ convergent pour tous t et α de \mathbb{R} , vers ce e_t . Pour des systèmes de spin ou des systèmes fermioniques, ceci se fait par des techniques standard développées dans les années 70 (voir par exemple [30], ainsi que les sections 6.5 à 6.7 de [P11]). Dans ce cas, on peut montrer par exemple que

$$\langle \sigma \rangle_+ = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} S(\rho_t|\rho) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t \rho(\sigma_s) ds$$

où σ est une certaine observable dite de *flux d'entropie* qui, lorsque le système est constitué de plusieurs réservoirs, initialement découplés et à l'équilibre thermique, vérifie $\sigma = \sum_i \beta_i \Phi_i$ où Φ_i est l'observable de flux sortant de \mathcal{R}_i , mentionnée au début du chapitre 1.

Discutons maintenant des méthodes de preuve de la convergence (14), et des propriétés de e_+ . On peut dans certains cas comme les systèmes fermioniques quasi-libres ou la chaîne de spin XY (qui peut se ramener au cas quasi-libre par la transformation de Jordan–Wigner), obtenir des formules explicites pour $e_t^{(N)}(\alpha)$ à partir de formules de trace, et par conséquent suivre notre programme de ne discuter la limite thermodynamique menant à e_t , puis la limite à grand temps menant à e_+ , qu’au niveau de ces fonctionnelles. L’expression finale de e_+ s’exprime alors en termes de l’opérateur de scattering à une particule : voir les sections 6.6 et 6.7 de [P11]. Il semble généralement nécessaire pour effectuer ces passages à la limite en dehors de ces cas exceptionnels, de se baser sur les outils spectraux déjà développés pour traiter les systèmes étendus; on a donc intérêt à partir de l’expression de e_t obtenue dans le cadre algébrique de la remarque 2.9. On peut ainsi traiter le cas spin-fermion en se basant sur le fait que e_t peut s’exprimer en termes des L^p -Liouvilliens de Araki-Masuda ([6]), ces L^p -Liouvilliens L_p étant définis comme générateurs de groupes e^{-itL_p} qui implémentent la dynamique τ^t et sont constitués d’isométries d’un espace L^p non-commutatif. On a en effet (c’est encore une fois immédiat à montrer dans le cas où $\mathcal{O} = \mathcal{B}(\mathcal{H})$ avec $\dim \mathcal{H} < \infty$),

$$e_t(\alpha) = \log \langle \Omega_\rho, e^{-itL_{\frac{1}{\alpha}}} \Omega_\rho \rangle_{\mathcal{K}}.$$

L’avantage de cette écriture est que le $L^{\frac{1}{\alpha}}$ -Liouvilien de la dynamique libre est simple et que celui de la dynamique couplée, qui est notre $L_{\frac{1}{\alpha}}$, peut s’écrire comme une perturbation de ce dernier. On peut alors utiliser des techniques de déformation complexe pour montrer que $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} e_t(\alpha)$ s’exprime à partir de la résonance de $L_{\frac{1}{\alpha}}$. On renvoie aux sections 5.5 et 6.5 de [P11], qui se basent sur [80].

Remarque 2.10. On a donc montré qu’une définition par les mesures à deux temps des variations de l’entropie mène à une formulation statistique du deuxième principe de la thermodynamique : cette variation d’entropie peut être négative, mais avec une probabilité qui, comparée à la probabilité d’une variation positive de la même valeur, est plus faible d’un facteur exponentiel en cette valeur (encore une fois, ceci a été observé expérimentalement, voir [123]). Cette comparaison des probabilités de hausse et de baisse de l’entropie est précisément traduite par la relation de symétrie $e_+(\alpha) = e_+(1 - \alpha)$ des fonctions génératrices.

4. FORMULATION STATISTIQUE DU PREMIER PRINCIPE

Il est naturel de se demander alors si le premier principe de la thermodynamique peut avoir dans le cadre quantique une formulation statistique grâce aux mesures à deux temps, puis s’il peut s’exprimer lui aussi par une relation de symétrie de fonctions génératrices.

L’article [P12] répond à la première question. Pour mettre en place la question de la mesure à deux temps de l’énergie d’un système, considérons encore une fois $\mathcal{O} = \mathcal{B}(\mathcal{H})$ avec $\dim \mathcal{H} < \infty$, supposons que le système est muni d’une dynamique “libre” dictée par un hamiltonien H_0 et d’un état initial ρ invariant par la dynamique libre, et qu’au temps $t = 0$ une force “extérieure” est activée, de sorte que le nouvel hamiltonien est $H = H_0 + V$. On s’intéresse à la loi du taux de variation de H_0 entre les instants 0 et t , définie comme la statistique de la mesure à deux temps de H_0 . On notera $t\phi_0$ cette variable aléatoire et \mathbb{P}_t la probabilité associée (qui devrait être notée $\mathbb{P}_{H_0, t}$ suivant les notations de la section 2). Les deux premiers moments de cette loi sont, par la remarque 2.2,

$$\rho(\tau^t(H_0) - H_0) \quad \text{et} \quad \rho((\tau^t(H_0) - H_0)^2)$$

et puisque $H_0 + V$ est une quantité conservée, $\tau^t(H_0) - H_0 = \tau^t(V) - V$ donc

$$|\mathbb{E}_t(\phi_0)| \leq \frac{2}{t} \|V\| \quad \mathbb{E}_t((\phi_0 - \mathbb{E}_t(\phi_0))^2) \leq \frac{2}{t^2} \|V\|^2 \quad (18)$$

de sorte que si, lors de la limite thermodynamique, le couplage V reste uniformément borné, alors les deux premiers moments de $t\phi_0$ sont uniformément bornés en temps. Il est généralement considéré dans la littérature (voir par exemple la section III.B.3 de [54]) que sous une telle hypothèse sur les couplages, tous les moments de ϕ_0 devraient tendre vers zéro, et même qu'il devrait exister des moments exponentiels uniformément bornés pour $t\phi_0$. L'article [P12] a identifié des conditions sous lesquelles c'est le cas; l'article [20] a par la suite montré que ces conditions étaient nécessaires. Notons donc $\xi_t(\theta) = \mathbb{E}_t(e^{-\theta t\phi_0})$, qui est donnée d'après (7) par

$$\xi_t(\theta) = \text{tr}(e^{-itH} \rho e^{+\theta H_0} e^{+itH} e^{-\theta H_0});$$

on montre facilement (voir [P12]) par des inégalités de trace que si l'on définit

$$S_{H_0}(\theta_0) = \sup_{|\theta| \leq |\theta_0|} \|e^{+\frac{1}{2}\theta H_0} V e^{-\frac{1}{2}\theta H_0}\|, \quad (19)$$

alors

$$e^{-2|\theta|S_{H_0}(\theta)} \leq \xi_t(\theta) \leq e^{+2|\theta|S_{H_0}(\theta)}. \quad (20)$$

Cet encadrement a une conséquence élémentaire, que nous formulons encore une fois en supposant que le système final est décrit par l'intermédiaire d'une suite $(\mathcal{H}^{(N)}, \rho^{(N)}, H_0^{(N)})_N$ d'espaces finis, chacun muni d'un état et d'un hamiltonien libre $H_0^{(N)}$. Nous notons avec un exposant (N) tous les objets associés au N -ième système fini. Le résultat principal de [P12] est :

THÉORÈME 2.II ([P12]). *S'il existe θ tel que*

$$S_{H_0}(\theta) = \sup_N S_{H_0}^{(N)}(\theta) < \infty, \quad (21)$$

on a

$$\sup_N \mathbb{E}_t(e^{\theta t\phi_0^{(N)}}) \leq 2e^{2\theta S_{H_0}(\theta)}. \quad (22)$$

En particulier, si l'on peut définir une variable aléatoire ϕ_0 limite quand $N \rightarrow \infty$ (par exemple si l'on a convergence $\lim_{N \rightarrow \infty} \xi_t^{(N)}(\theta) =: \xi_t(\theta)$ pour θ dans un voisinage de zéro), alors cette variable aléatoire ϕ_0 a des moments exponentiels : $\mathbb{E}_t(e^{\theta t\phi_0}) \leq 2e^{2\theta S_{H_0}(\theta)}$ pour $|\theta|$ assez petit. Si la preuve ci-dessus est mathématiquement élémentaire, elle a identifié une condition optimale : l'article [20] donne des exemples dans lesquels (21) est nécessaire pour avoir $\mathbb{E}_t(e^{\theta t\phi_0}) < \infty$ (ainsi que des exemples dans lesquels $t\phi_0$ n'admet pas de moments d'ordre supérieur à 4). Ce phénomène peut sembler étonnant : il est lié au fait que même un V borné peut induire des transitions entre des niveaux d'énergie de H_0 très éloignés : dans une approximation "Fermi golden rule", les transitions entre niveaux d'énergie E et E' de H_0 de vecteurs propres respectifs $\Psi_E, \Psi_{E'}$ induites par l'interaction ont des taux $T(E, E') = |\langle \Psi_{E'}, V \Psi_E \rangle|^2$. La borne (19) implique donc que les transitions vers des hauts niveaux d'énergie ont des probabilités qui décroissent exponentiellement. Pour cette raison, nous voyons une condition comme $S(\alpha_0, \theta_0) < \infty$ comme une condition ultraviolette (ce qui est confirmé par l'étude d'exemples dans [20]).

Passons maintenant à la question d'exprimer le premier principe au travers d'une symétrie de fonction génératrice. Une proposition dans ce sens a été faite par Andrieux, Gaspard, Monnai et Tasaki dans [5]. Cet article présente cependant une faille mathématique, et l'article [P21] se proposait de la combler; nous avons cependant dû introduire une hypothèse supplémentaire, et les exemples issus de [20] montrent qu'elle est nécessaire. Dans [P21], on suppose que le système est constitué de différents réservoirs, et on va s'intéresser à la variation d'énergie détaillée, c'est-à-dire à la variation dans chaque réservoir.

Une fois de plus, nous commençons dans un cadre de dimension finie. On suppose donc, pour \mathcal{H} de dimension finie, qu'on a une famille $\mathbf{E} = (H_1, \dots, H_\ell)$ d'opérateurs de $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ qui commutent entre eux, et V une autre observable. On verra chaque H_j comme le hamiltonien libre d'un j -ième réservoir \mathcal{R}_j et V comme un opérateur de couplage, de sorte que $H_0 = H_1 + \dots + H_\ell$ est le hamiltonien libre du système complet, et $H = H_0 + V$ le hamiltonien avec interactions. On notera ρ l'état initial du système, dont on supposera en général (voir la remarque 2.17) que c'est un état multi-thermique, i.e. de la forme :

$$\rho_\beta = Z^{-1} e^{-\sum_j \beta_j H_j} = Z^{-1} e^{-\beta \cdot \mathbf{E}} \text{ avec } Z = \text{tr}(e^{-\sum_j \beta_j H_j}) = \text{tr}(e^{-\beta \cdot \mathbf{E}}),$$

où $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_\ell)$ est un ℓ -uplet de températures inverses. À chaque fois que nous supposerons que l'état initial ρ est un état multi-thermique, nous le noterons ρ_β ; dans ce cas, l'état ρ commute avec \mathbf{E} .

Puisque les H_j commutent entre eux, il est possible de faire une mesure simultanée des composantes de \mathbf{E} . La statistique des mesures à deux temps définit alors une variable aléatoire ϕ à valeurs dans \mathbb{R}^ℓ , de loi $\mathbb{P}_{\mathbf{E},t}$, dont la fonction génératrice $\chi_t(\alpha) = \int e^{-\alpha \cdot \phi} d\mathbb{P}_{\mathbf{E},t}(\phi)$ est donnée d'après (7) par

$$\chi_t(\alpha) = \text{tr} \left(e^{-itH} \tilde{\rho} e^{+\alpha \cdot \mathbf{E}} e^{+itH} e^{-\alpha \cdot \mathbf{E}} \right).$$

Si l'on pose $H_0 = H_1 + \dots + H_\ell$, alors on a avec les notations précédentes $\xi_t(\alpha) = \chi_t(\alpha \mathbf{1})$.

Remarque 2.12. De la même manière que lors de nos étude des variations d'entropie en section 2, on peut donner en termes d'objets modulaires des définitions de χ_t et de ξ_t valables pour un système infini, et on peut prouver dans différents modèles que ces définitions sont bien les limites thermodynamiques des fonctionnelles associées aux modèles confinés.

On va s'intéresser ici au lien entre $\chi_t(\alpha)$ et $\chi_t(\alpha + \theta \mathbf{1})$; on rappelle que $(\alpha + \theta \mathbf{1}) \cdot \mathbf{E}$ est égal à $\alpha \cdot \mathbf{E} + \theta H_0$, ce qui explique que le lien en question puisse exprimer une forme de conservation de l'énergie. Encore une fois on peut obtenir des informations pertinentes pour les systèmes confinés par des inégalités de trace. On a pour commencer (proposition 2.6 de [P21]) :

$$e^{-2|t|S(\|\alpha\|)} \leq \chi_t(\alpha) \leq e^{+2|t|S(\|\alpha\|)} \quad (23)$$

où $\|\alpha\| := \max |\alpha_j|$ et où pour $\alpha_0 \in \mathbb{R}$ on pose

$$S(\alpha_0) := \sup_{\|\alpha\| \leq \alpha_0} \|V_\alpha\| \quad \text{pour} \quad V_\alpha := e^{+\frac{1}{2}\alpha \cdot \mathbf{E}} V e^{-\frac{1}{2}\alpha \cdot \mathbf{E}}. \quad (24)$$

En comparaison de l'inégalité (20) pour la fonction génératrice des moments de ϕ_0 , l'inégalité (23) ne montre pas de borne uniforme pour les moments exponentiels de ϕ (remarquer le t dans l'exponentielle). On peut montrer de plus suivant une preuve encore une fois élémentaire conceptuellement, mais plus délicate (proposition 2.7 de [P21]) que si l'état initial est l'état multi-thermique ρ_β , alors

$$\chi_t(\alpha) e^{-|\theta| 3S_\beta(\theta, \|\alpha\|)} \leq \chi_t(\alpha + \theta \mathbf{1}) \leq \chi_t(\alpha) e^{+|\theta| 3S_\beta(\theta, \|\alpha\|)} \quad (25)$$

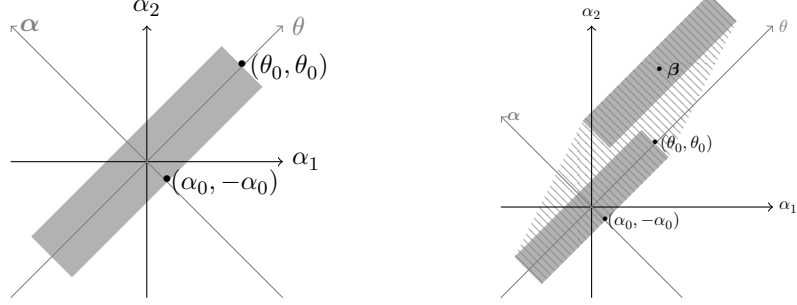
où pour $\theta_0 \in \mathbb{R}$ et $\alpha_0 \in \mathbb{R}_+$,

$$S_\beta(\alpha_0, \theta_0) = \sup_{|\theta| \leq \theta_0} \sup_{\alpha \in \mathcal{B}(\alpha_0)} \|V_{\alpha + \theta \mathbf{1}}\| + \sup_{|\theta| \leq \theta_0} \sup_{\alpha \in \mathcal{B}(\alpha_0)} \|V_{\beta + \alpha + \theta \mathbf{1}}\| \quad (26)$$

où

$$\mathcal{B}(\alpha_0) := \{\alpha \in \mathbb{R}^\ell : \alpha \cdot \mathbf{1} = 0, \|\alpha\| < \alpha_0\}.$$

Pour être plus visuel, dans le cas $\ell = 2$, les quantités $S(\alpha_0, \theta_0)$ et $S_\beta(\alpha_0, \theta_0)$ donnent des bornes uniformes en norme sur les déformations V_α pour α dans, respectivement, la zone grise représentée ci-dessous à gauche, et l'union des deux zones grises représentées à droite (et par convexité, dans la zone hachurée).



Supposons à nouveau que le système physique qui nous intéresse est décrit comme une suite d'espaces finis $(\mathcal{H}^{(N)}, \rho^{(N)}, \mathbf{E}^{(N)}, V^{(N)})_N$, chacun muni d'un état, d'un ℓ -uplet $\mathbf{E}^{(N)} = (H_1^{(N)}, \dots, H_\ell^{(N)})$, et d'un couplage $V^{(N)}$. Nous notons encore une fois avec un indice (N) tous les objets associés au N -ième système fini. Nous supposons dans la suite que pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$\chi_t(\alpha) := \lim_{N \rightarrow \infty} \chi_t^{(N)}(\alpha) \text{ existe pour } \|\alpha\| < \alpha_0. \quad (27)$$

Dans ce cas, il existe pour tout t une probabilité $\mathbb{P}_{\mathbf{E}, t}$ sur \mathbb{R} qui est limite, au sens des moments exponentiels, de la suite des $\mathbb{P}_{\mathbf{E}^{(N)}, t}^{(N)}$ associé à $(\mathcal{H}^{(N)}, \rho^{(N)}, \mathbf{E}^{(N)}, V^{(N)})$.

Remarque 2.13. Lorsque le système est multi-thermique, on a $-\log \rho = \sum_i \beta_i H_i + \text{constante}$. La variable aléatoire ς de la section 3 s'écrit donc $\varsigma = \sum_i \beta_i \phi_i$ et en particulier peut s'exprimer dans l'espace de probabilité de cette section. Nous utiliserons donc la même notation \mathbb{P}_t pour les mesures de probabilités des deux sections. De plus, avec les notations de la section précédente, $e_t(\alpha) = \chi_t(\alpha\beta)$, et sous l'hypothèse d'invariance par renversement du temps, la symétrie $e_t(\alpha) = e_t(1 - \alpha)$ a un analogue :

$$\chi_t(\alpha) = \chi_t(\beta - \alpha). \quad (28)$$

Une conséquence immédiate de (25) est le résultat suivant :

THÉORÈME 2.14 ([P21]). *Supposons que $\sup_N S_\beta^{(N)}(\alpha_0, \theta_0) < \infty$. Alors la fonctionnelle définie par $\bar{\chi}_+(\alpha) = \limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \log \chi_t(\alpha)$ vérifie*

$$\bar{\chi}_+(\alpha) = \bar{\chi}_+(\alpha + \theta \mathbf{1}) \quad (29)$$

pour $\|\alpha\| \leq \alpha_0$ et $|\theta| \leq \theta_0$. En particulier, $\chi_+(\theta \mathbf{1}) = 0$ pour $|\theta| \leq \theta_0$.

Remarque 2.15. La symétrie (29) a été proposée par Andrieux, Gaspard, Monnai et Tasaki dans [5] et nous l'appellerons donc symétrie AGMT. Cet article utilise cependant l'hypothèse $\sup_N S_\beta^{(N)}(\alpha_0, \theta_0) < \infty$ en affirmant que c'est une conséquence de $\sup_N \|V^{(N)}\| < \infty$, ce qui est en général faux.

Remarque 2.16. La relation de fluctuation (15) découlait directement de la relation à temps fini (12). L'invariance par translation (29), elle, n'est vraie que dans la limite $t \rightarrow \infty$.

Pour $\mathbf{s} \in \mathbb{R}^\ell$, on définit

$$\bar{I}(\mathbf{s}) = \sup_{\boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{R}^\ell} (\boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{s} - \bar{\chi}_+(\boldsymbol{\alpha})) \in [0, +\infty].$$

Si $\sup_N S_\beta^{(N)}(\alpha_0, \theta_0) < \infty$, on a immédiatement par (29)

$$\bar{I}(\mathbf{s}) \geq \theta_0 \sum_i s_i = \theta_0 |\mathbf{s} \cdot \mathbf{1}|. \quad (30)$$

En particulier, si pour tout $\theta_0 \geq 0$ il existe α_0 pour lequel $S_\beta(\alpha_0, \theta_0) < \infty$, alors $\bar{I}(\mathbf{s}) = +\infty$ à moins que $\mathbf{s} \in \Sigma$. Si $\sup_N S_\beta^{(N)}(\alpha_0, \theta_0) < \infty$ et que le système est invariant par renversement du temps, alors

$$\bar{I}(\mathbf{s}) = \bar{I}(-\mathbf{s}) - \beta \cdot \mathbf{s}. \quad (31)$$

Remarque 2.17. On peut également prouver une relation AGMT

$$\bar{\chi}_+(\boldsymbol{\alpha}) = \bar{\chi}_+(\boldsymbol{\alpha} + \theta \mathbf{1})$$

pour $\|\boldsymbol{\alpha}\| < \alpha_0$ et pour tout θ , pour un système non nécessairement multi-thermique si l'on a la borne uniforme $\sup_N S^{(N)}(\alpha_0, \theta_0) < \infty$ pour un certain α_0 et pour tout θ_0 , mais nous n'avons pas d'exemple non trivial dans lequel une telle hypothèse peut être prouvée.

Pour énoncer les autres conséquences de l'invariance (29), supposons que la quantité $\chi_+(\boldsymbol{\alpha}) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \log \chi_t(\boldsymbol{\alpha})$ existe à chaque fois que nous l'invoquons ci-dessous. Alors les théorèmes 3.14, 3.15 et 3.16 de [P21] montrent :

THÉORÈME 2.18 ([P21]). *Supposons que le système est multi-thermique aux températures inverses β et que $\sup S_\beta^{(N)}(\alpha_0, \theta_0) < \infty$ pour α_0 et θ_0 non nuls. Alors :*

1. Si χ_+ est différentiable en 0, la variable ϕ converge exponentiellement vers le vecteur $\langle \Phi \rangle_+$ de \mathbb{R}^ℓ de composantes

$$\langle \Phi_j \rangle_+ = - \left. \frac{\partial \chi_+}{\partial \alpha_j} \right|_{\alpha_j=0}$$

pour $j = 1, \dots, \ell$, et ce vecteur vérifie $\sum_j \langle \Phi_j \rangle_+ = 0$.

2. S'il existe un voisinage complexe \mathcal{V} de l'origine tel que $\sup_{t>1} \sup_{\boldsymbol{\alpha} \in \mathcal{V}} \frac{1}{t} |\log \chi_t(\boldsymbol{\alpha})| < \infty$, alors on a la convergence en distribution

$$\sqrt{t}(\phi - \langle \Phi \rangle_+) \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} \mathcal{N}(0, \mathbf{D}) \quad (32)$$

où

$$D_{i,j} = \left. \frac{\partial^2 \chi_+}{\partial \alpha_i \partial \alpha_j} \right|_{\boldsymbol{\alpha}=\mathbf{0}} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \left(\frac{\partial^2 \chi_t}{\partial \alpha_i \partial \alpha_j} - \frac{\partial \chi_t}{\partial \alpha_i} \frac{\partial \chi_t}{\partial \alpha_j} \right) \Big|_{\boldsymbol{\alpha}=\mathbf{0}}. \quad (33)$$

La matrice de covariance \mathbf{D} est dégénérée puisque $\sum_{i,j} D_{i,j} = 0$ par (18).

3. Si $\chi_+(\boldsymbol{\alpha})$ existe dans $[-\infty, +\infty]$ pour tout $\boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{R}^\ell$, alors pour tout borélien \mathbf{B} de \mathbb{R}^ℓ ,

$$- \inf_{\mathbf{s} \in \text{int}(\mathbf{B}) \cap \mathcal{F}} I(\mathbf{s}) \leq \liminf_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \log \mathbb{P}_t(\mathbf{B}) \leq \limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \log \mathbb{P}_t(\mathbf{B}) \leq - \inf_{\mathbf{s} \in \text{fer}(\mathbf{B})} I(\mathbf{s}) \quad (34)$$

où \mathcal{F} , l'ensemble des points exposés⁵ de I , est égal à \mathbb{R}^ℓ si χ_+ est supposée partout finie et dérivable. De plus, $I(\mathbf{s}) \geq \theta_0 |\mathbf{s} \cdot \mathbf{1}|$ et si le système est invariant par renversement du temps, $I(\mathbf{s}) = I(-\mathbf{s}) - \beta \cdot \mathbf{s}$.

5. Voir la définition 2.3.3 de [45].

Remarque 2.19. Encore une fois, dans de nombreuses situations où le système physique considéré \mathcal{O} peut être approché par des systèmes confinés $\mathcal{O}^{(N)}$, on peut montrer non seulement que les fonctionnelles associées $e_t^{(N)}(\alpha)$ convergent pour tous t et α de \mathbb{R} , mais aussi que $\langle \Phi_j \rangle_+ = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t \rho \circ \tau^s(\Phi_j) ds$, qui est égal à $\rho_+(\Phi_j)$ quand le NESS ρ_+ existe et est unique, et

$$D_{i,j} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t \int_0^t \rho_\beta \left(\tau^{s_1}(\Phi_i - \rho_\beta(\Phi_i)) \tau^{s_2}(\Phi_j - \rho_\beta(\Phi_j)) \right) ds_1 ds_2,$$

où Φ_i est l'observable de flux sortant de \mathcal{R}_i , mentionnée au début du chapitre 1. Par conséquent, contrairement à ce que l'on a observé au chapitre 1, la définition des variations de chaleur par mesure à deux temps permet de décrire la loi asymptotique des fluctuations jointes de ces variations même hors équilibre. Cette loi asymptotique est gaussienne, et ses covariances s'expriment comme une corrélation qui dans les situations d'équilibre (i.e. lorsque β est de la forme $\beta_{\text{eq}} = (\beta_0, \dots, \beta_0)$) sont les coefficients de transport de Kubo (sur cette identité, voir la proposition 5.8 de [PII]).

Discutons rapidement l'application à des modèles explicites : les hypothèses de borne uniforme comme $\sup_N S^{(N)}(\alpha_0, \theta_0) < \infty$ ou $\sup_N S_\beta^{(N)}(\alpha_0, \theta_0) < \infty$ sont en général assurées par des "hypothèses ultraviolettes" : par exemple, dans un modèle de type spin-fermion comme en section 1.3, l'hypothèse pertinente sera que les facteurs de forme f_k et g_k apparaissant dans le terme de couplage V sont dans le domaine de $e^{\alpha h_0}$ pour α dans un voisinage réel de l'origine. Avec ce type d'hypothèse, on sait en général montrer que $\sup_N S^{(N)}(\alpha_0, \theta_0) < \infty$ soit pour tous α_0 et θ_0 , soit pour α_0 et θ_0 suffisamment petits. Dans ce deuxième cas, on obtient $\sup_N S_\beta^{(N)}(\alpha'_0, \theta'_0) < \infty$ pour β suffisamment petit (et des α'_0, θ'_0 inférieurs à α_0, β_0), donc notre résultat est souvent "à haute température". Prouver que χ_+ existe est un problème similaire à celui que nous avons rencontré en section 3 concernant e_+ , et nous renvoyons à la discussion à la fin de cette section.

Remarque 2.20. Le point 2. du théorème 2.18 est précisément le type de résultat que visait le chapitre 1. Il décrit bien une loi jointe, et ce sans difficulté conceptuelle. Dans un modèle du type spin-fermion, on peut appliquer à la fois les résultats du chapitre 1 et ceux de ce chapitre ; on obtient alors que dans les situations d'équilibre $\beta = (\beta_0, \dots, \beta_0)$, les deux définitions des variations d'entropie (naïve et par mesures à deux temps) ont des fluctuations gaussiennes, et leurs covariances sont alors les mêmes (ce qui était attendu à cause de la relation (8)).

5. APPLICATION : LA RÉPONSE LINÉAIRE

Il est connu que dans le cadre classique, les relations de fluctuation permettent de retrouver la théorie de la réponse linéaire, ce qui permet de les voir comme la bonne extension de cette théorie dans les situations éloignées de l'équilibre. Nous allons prouver ce résultat à partir des deux symétries : les relations de fluctuation (15) et la symétrie par translation (29). Supposons donc que l'on considère un système paramétré par $\beta \in]\beta_0 - \delta, \beta_0 + \delta[^\ell$, satisfaisant (27) et $\sup_N S_\beta^{(N)}(\alpha_0, \theta_0) < \infty$ pour tous ces β . Si l'on suppose que les quantités $\chi_+(\beta, \alpha)$ correspondantes existent et sont C^1 en β et C^2 en α au voisinage de $\beta_{\text{eq}} = (\beta_0, \dots, \beta_0)$ et $(0, \dots, 0)$ respectivement, alors les coefficients de transport s'écrivent

$$L_{i,j} = \left. \frac{\partial \langle \Phi_j \rangle_\beta}{\partial \beta_i} \right|_{\beta_{\text{eq}} = \mathbf{0}}.$$

Les symétries ES (28) et AGMT (29) montrent que

$$\chi_+(\beta, \alpha) = \chi_+(\beta, \alpha + \beta_{\text{eq}}) = \chi_+(\beta_{\text{eq}} + \zeta, (\beta - \beta_{\text{eq}}) - \alpha). \quad (35)$$

En dérivant deux fois cette identité on obtient

$$-\frac{\partial^2 \chi_+(\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\alpha})}{\partial \beta_j \partial \alpha_k} \Big|_{\boldsymbol{\alpha}=\mathbf{0}, \boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{\beta}_{\text{eq}}} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \chi_+(\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\alpha})}{\partial \alpha_j \partial \alpha_k} \Big|_{\boldsymbol{\alpha}=\mathbf{0}, \boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{\beta}_{\text{eq}}}.$$

Or d'après (8) le premier terme est $L_{i,j}$ et d'après (33) le deuxième est $D_{i,j}$. On a donc

$$2L_{i,j} = D_{i,j}(\boldsymbol{\beta}_{\text{eq}}),$$

et en particulier $L_{i,j} = L_{j,i}$. On a donc prouvé la formule de Kubo et la relation de réciprocity d'Onsager.

Remarque 2.21. On a utilisé une symétrie $\chi_+(\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\alpha}) = \chi_+(\boldsymbol{\beta}_{\text{eq}} + \boldsymbol{\zeta}, (\boldsymbol{\beta} - \boldsymbol{\beta}_{\text{eq}}) - \boldsymbol{\alpha})$ qui est analogue à la “generalized Evans-Searles symmetry” (GES) de [P11]. Celle-ci n'avait été cependant été montrée que pour la fonctionnelle e_∞ , qui n'avait pas d'interprétation opérationnelle (cf. section 2.4).

Remarque 2.22. Les deux symétries observées, la symétrie ES (15) et la symétrie AGMT (29), ne sont sans doute pas exploitées à leur juste valeur. Comme nous l'avons écrit, (15) découle de la symétrie à temps fini (12) et les informations supplémentaires apportées par e_+ dans la proposition 2.6 proviennent exclusivement de l'hypothèse d'existence de e_+ , et non de la symétrie dont il est évident qu'elle survit au passage en temps infini. D'un autre côté, (29) n'est vraie qu'en temps infini mais l'information utile du théorème 2.18 se réduit essentiellement à celle du théorème 2.11, qui concerne l'énergie totale et n'utilise pas (29). On a vu que (15) et (29) entraînent à elles deux la formule de Kubo et la relation de réciprocity d'Onsager, mais ceci n'exploite qu'une infime partie de l'information qu'elles contiennent. Nous pensons qu'il est possible d'en tirer d'autres conséquences de ces deux symétries, par exemple des contraintes sur la fonction de taux de \boldsymbol{E} qui incorporeraient à la fois la première et la deuxième loi.

Remarque 2.23. On a donc pu montrer, dans ce chapitre, des résultats concernant les fluctuations des variations d'entropie et d'énergie, totale ou détaillée réservoir par réservoir, donnant ainsi dans le cadre quantique des formulations statistiques des premier et deuxième principe qui vont au-delà des propriétés des moyennes. On peut alors se demander si l'on peut appliquer le même programme à d'autres principes physiques. Un candidat naturel a été le principe de Landauer pour des systèmes dits d'interaction répétées. C'est la question que nous allons aborder dans le chapitre 4.

CHAPITRE 3

MESURES RÉPÉTÉES D'UN SYSTÈME : LES MESURES ET LE SYSTÈME

Dans cette section, nous allons discuter les propriétés des résultats de mesure et de l'état aléatoire du système \mathcal{S} dans le cadre de mesures répétées (remarquons que nous ne nous intéresserons pas à l'état induit sur la chaîne d'environnements $\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2, \dots$, ce qui est le sujet des articles [59, 60]). Nous allons commencer par préciser le formalisme introduit en section 0.3. Ce formalisme concerne des évolutions à temps discret; des extensions à temps continu seront introduites dans les sections 4 et 5.

On considère un espace de Hilbert séparable \mathcal{H} , et on suppose son état initial représenté par une matrice densité ρ . On suppose donnée une famille $(\Phi_i)_{i \in V}$ d'applications complètement positives (voir l'annexe A) telles que $\Phi := \sum_{i \in V} \Phi_i$ préserve la trace. Une telle famille est appelée un *instrument* (voir [44, 76]), et une application complètement positive et préservant la trace, comme Φ , est appelée un *canal quantique*. Remarquons qu'un exemple d'instrument est donné par (2) en section 0.3.

On définit une probabilité sur V^n par

$$\mathbb{P}_\rho(i_1, \dots, i_n) = \text{tr}(\Phi_{i_n} \circ \dots \circ \Phi_{i_1}(\rho)). \quad (1)$$

Le fait que $\Phi^*(\text{Id}) = \text{Id}$ montre que cette définition est cohérente avec la définition sur V^{n+1} , de sorte que (par le théorème d'extension de Kolmogorov), la prescription (1) définit une probabilité sur $V^{\mathbb{N}}$. On notera alors, sur $\Omega = V^{\mathbb{N}}$ muni de sa σ -algèbre produit, les variables aléatoires

$$m_n(\omega) = i_n \quad \rho_n(\omega) = \frac{\Phi_{i_n} \circ \dots \circ \Phi_{i_1}(\rho)}{\text{tr}(\Phi_{i_n} \circ \dots \circ \Phi_{i_1}(\rho))} \quad (2)$$

si $\omega = (i_1, i_2, \dots)$. La suite $(m_n)_n$ ne forme pas en général une chaîne de Markov, mais la suite $(\rho_n)_n$ en est une. On a l'identité immédiate

$$\mathbb{E}_\rho(\rho_n) = \Phi^n(\rho). \quad (3)$$

Le processus $(\rho_n)_n$ est appelé *trajectoire quantique*; les trajectoires quantiques ont été introduites (avec paramètre de temps continu, comme discuté dans les sections 4 et 5) comme modèle pour la "projection du paquet d'ondes" (1) par Diosi et Gisin dans [49] et [65] respectivement, et comme outil de simulation numérique dans [40] par Dalibard, Castin et Mølmer.

Remarque 3.1. Deux propriétés remarquables sont immédiates :

- si $\Phi(\rho) = \rho$, alors \mathbb{P}_ρ est invariante par le décalage à gauche,
- si de plus Φ admet ce ρ comme unique état invariant, alors \mathbb{P}_ρ est ergodique.

Ces deux observations sont dues à Fannes, Nachtergaele et Werner dans [59], et permettent d'exploiter la théorie des processus ergodiques, à condition de supposer que l'état initial ρ est Φ -invariant.

Les deux résultats fondamentaux concernant les mesures répétées sont dus à Kümmerer et Maassen. Le premier est le théorème ergodique pour les états issu de [87], mais ici donné dans sa version de dimension infinie signalée par Lim dans [94].

THÉORÈME 3.2. *Supposons que le canal Φ admet un unique état invariant ρ_{inv} . Alors quel que soit l'état ρ , on a \mathbb{P}_ρ -presque-sûrement la convergence faible*

$$\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \rho_k \rightarrow \rho_{\text{inv}}$$

(au sens où on a la convergence de ces fonctionnelles évaluées en n 'importe quel $X \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$).

Le deuxième résultat fondamental est le théorème de purification (voir [88]). Celui-ci concerne des instruments parfaits, au sens où chaque Φ_i est de la forme $\Phi_i(\eta) = L_i \eta L_i^*$, comme c'est le cas lorsque la mesure indirecte est à deux temps et concerne une observable non dégénérée, voir l'exemple 3.36. Dans ce cas, il est clair que si ρ_n est pur, alors ρ_{n+1} sera pur; plus précisément, si $\rho_n = |x_n\rangle\langle x_n|$, alors $\rho_{n+1} = |x_{n+1}\rangle\langle x_{n+1}|$ où

$$\mathbb{P}(x_{n+1} = \frac{L_i x_n}{\|L_i x_n\|} \mid x_n) = \|L_i x_n\|^2. \quad (4)$$

Par conséquent, l'évolution préserve la pureté des états. Le théorème de purification de Kümmerer et Maassen donne une condition sous laquelle ρ_n est asymptotiquement pur quel que soit l'état initial ρ :

THÉORÈME 3.3. *Supposons que l'instrument $(\Phi_i)_{i \in V}$ considéré est parfait et associé à des opérateurs $(L_i)_{i \in I}$ qui ont la propriété que tout projecteur orthogonal π tel que $\pi L_{i_1}^* \dots L_{i_n}^* L_{i_n} \dots L_{i_1} \pi \propto \pi$ pour tous (i_1, \dots, i_n) et tout n de I et \mathbb{N}^* est de rang 0 ou 1. Alors quel que soit l'état initial ρ , on a \mathbb{P}_ρ -presque-sûrement $\text{tr}(\rho_n^2) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 1$.*

Ici $X \propto Y$ signifie qu'il existe $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que $X = \lambda Y$ ou $\lambda X = Y$. Puisque les seuls états η vérifiant $\text{tr}(\eta^2) = 1$ sont les états purs, $\lim_{n \rightarrow \infty} \text{tr}(\rho_n^2) = 1$ signifie que la suite $(\rho_n)_n$ est approchée asymptotiquement par une suite d'états purs. On peut voir que l'hypothèse du théorème 3.3 signifie qu'il n'existe pas de sous-espace de dimension supérieure à 2 sur lequel tous les $L_{i_n} \dots L_{i_1}$ sont proportionnels à des unitaires. Sans cette hypothèse, un état initial ρ de rang supérieur à 2 mais à support dans un tel espace induira une suite $(\rho_n)_n$ de rang constant, donc cette hypothèse est clairement nécessaire à la purification. La même remarque montre que si $\dim \mathcal{H} = 2$ alors l'hypothèse du théorème 3.3 est vérifiée à moins que tous les L_i ne soient proportionnels à des unitaires.

I. MESURES RÉPÉTÉES D'UN SYSTÈME : LES MESURES

Dans cette section, nous allons généraliser le cadre des mesures répétées décrit ci-dessus, en permettant à l'instrument $(\Phi_i)_{i \in V}$ considéré au temps $n + 1$ de dépendre des mesures m_1, \dots, m_n déjà effectuées. Ceci permettra de traduire les situations dans lesquelles, par exemple, les paramètres ξ, U, M de la mesure indirecte telle que décrite dans la section 0.3 sont choisis en fonction des mesures précédentes. Cela semble en particulier utile pour étudier le contrôle des états du système par rétroaction à partir des mesures indirectes. Pour cela, nous allons intégrer le résultat de mesure à l'espace d'état, et supposons donc

que l'espace de Hilbert considéré s'écrit $\mathcal{H} = \bigoplus_{i \in V} \mathfrak{h}_i$ où V est un ensemble discret représentant l'information retenue des mesures passées (par exemple, $V = \text{sp } M$ si l'on ne retient que la dernière mesure, ou $V = \mathbb{N}^{\text{sp } M}$ si l'on retient les nombres d'occurrences de chaque résultat possible).

On va simplifier la notation en notant $x \otimes |i\rangle$ un vecteur $x \in \mathfrak{h}_i$, de sorte que \mathcal{H} s'écrit $\bigoplus \mathfrak{h}_i \otimes |i\rangle$. On interprète alors souvent la coordonnée i comme la position d'une particule sur l'ensemble V , et la coordonnée dans \mathfrak{h}_i comme un degré de liberté interne de la particule quand elle est en i . On suppose qu'on a une famille $(\phi_{i,j})_{i,j \in V}$ d'applications complètement positives de $\mathcal{I}_1(\mathfrak{h}_j)$ dans $\mathcal{I}_1(\mathfrak{h}_i)$ telles que pour tout $j \in V$, $\sum_{i \in V} \text{tr}_{\mathfrak{h}_i}(\phi_{i,j}(\eta)) = \text{tr}_{\mathfrak{h}_j}(\eta)$ pour tout $\eta \in \mathcal{I}_1(\mathfrak{h}_j)$. On peut alors définir un instrument $(\Phi_{i,j})_{i,j \in V}$ par

$$\Phi_{i,j} \left(\sum_{k,l} \rho_{k,l} \otimes |k\rangle\langle l| \right) = \phi_{i,j}(\rho_{j,j}) \otimes |i\rangle\langle i|. \quad (5)$$

L'application complètement positive $\Phi_{i,j}$ traduit alors à la fois la probabilité et l'effet sur les degrés de liberté internes de la transition $j \rightsquigarrow i$.

Puisque l'expression (5) ne dépend que des termes bloc-diagonaux $\rho_{j,j}$ et produit un opérateur bloc-diagonal, on supposera à partir de maintenant que tous les états sont de la forme $\rho = \sum_{i \in V} \rho_i \otimes |i\rangle\langle i|$ (ce sera le cas après une application d'un $\Phi_{i,j}$); autrement il suffit de remplacer ρ par sa partie bloc-diagonale dans toutes les expressions.

On définit comme en (1) une probabilité sur $\Omega = V^{\mathbb{N}}$ par

$$\mathbb{P}_\rho(i_1, \dots, i_n) = \text{tr}(\phi_{i_n, i_{n-1}} \circ \dots \circ \phi_{i_2, i_1}(\rho_{i_1})) \quad (6)$$

et comme en (2) les variables aléatoires

$$v_n(\omega) = i_n \quad \varrho_n(\omega) = \frac{\phi_{i_n, i_{n-1}} \circ \dots \circ \phi_{i_2, i_1}(\rho_{i_1})}{\text{tr}(\phi_{i_n, i_{n-1}} \circ \dots \circ \phi_{i_2, i_1}(\rho_{i_1}))} \quad (7)$$

si $\omega = (i_1, i_2, \dots)$. Notons que le ρ_n de (2) serait $\varrho_n \otimes |v_n\rangle\langle v_n|$: nous utilisons une notation différente pour souligner que ϱ_n est un état de \mathfrak{h}_{v_n} et non de \mathcal{H} . À présent ni $(v_n)_n$, ni $(\varrho_n)_n$ ne sont des chaînes de Markov en général, mais la suite des couples $(v_n, \varrho_n)_n$ en est une.

Remarque 3.4. Il est clair que ce modèle étend celui des chaînes de Markov classiques : précisément, si l'on a une matrice de transition $\Pi = (\Pi_{i,j})_{i,j \in V}$ (où $\Pi_{i,j}$ est la probabilité de passer en j quand on est en i), alors avec $\mathfrak{h}_i \equiv \mathbb{C}$ et $\phi_{i,j} = \Pi_{j,i}$, tout état diagonal $\sum_{i \in V} p_i \otimes |i\rangle\langle i|$ est envoyé sur un état $\sum_{i \in V} q_i \otimes |i\rangle\langle i|$, avec $q = p\Pi$. Nous appellerons ce cadre une "réalisation minimale" de la chaîne de Markov.

Le cas où chaque $\phi_{i,j}$ est pur, i.e. de la forme $\rho \mapsto L_{i,j} \rho L_{i,j}^*$ (où $L_{i,j}$ est un opérateur de \mathfrak{h}_j dans \mathfrak{h}_i) est appelé "marche quantique ouverte" (MQO). L'étude des marches quantiques ouvertes a été amorcé dans [7] où elles sont présentées comme une nouvelle version quantique des chaînes de Markov, et a donné lieu à une littérature conséquente. Pour cette raison, les articles [P13, P15, P17] sont écrits pour des $\phi_{i,j}$ purs, et le cas de $\phi_{i,j}$ généraux y est appelé "marche quantique ouverte étendue". Tous les résultats de ces articles s'étendent immédiatement au cas de transitions $\phi_{i,j}$ non pures.

Remarque 3.5. Malgré leur nom, les marches quantiques ouvertes sont très différentes des marches quantiques unitaires très étudiées, à l'origine dans le cadre de l'algorithmique quantique (voir [84]) : en particulier, le fait que l'on mesure la "position" à chaque pas fait que, contrairement au cas des marches unitaires, il n'y a pas dans les marches ouvertes d'interférence entre les différentes trajectoires possibles (voir [P23]).

Remarque 3.6. Outre l'utilisation pour le contrôle de systèmes quantiques, l'application la plus naturelle des marches quantiques ouvertes (étendues, et à temps continu – voir la section 4) peut venir du fait qu'on les obtient par limite de couplage faible (à la Davies [43]) à partir d'un système dont le hamiltonien est dégénéré (ici aussi, voir [P23]).

L'idée des articles [P13, P15, P17] était d'étudier les propriétés des marches quantiques par analogie avec les chaînes de Markov. Or comme dans le cas classique, les propriétés d'ergodicité de la probabilité \mathbb{P}_ρ sont liées à celles de l'application Φ , qui dépendent en particulier de son spectre périphérique. L'outil standard pour étudier ce dernier est le théorème "de Perron–Frobenius" pour les canaux quantiques, prouvé initialement dans [56] et étendu (partiellement) au cas de dimension infinie dans [53, 68]. Nous rappelons ces résultats dans l'annexe A; ils dépendent essentiellement de la propriété d'irréductibilité de Φ . Un canal quantique sur \mathcal{H} est dit *irréductible* (au sens de Davies, [42]) s'il n'existe aucune projection non triviale π de \mathcal{H} telle que $\Phi(\pi\mathcal{I}_1(\mathcal{H})\pi) \subset \pi\mathcal{I}_1(\mathcal{H})\pi$. Il est facile de montrer que si un canal quantique admet un unique état invariant et que celui-ci est fidèle, alors le canal est irréductible; l'annexe A rappelle que si le canal est irréductible, alors 1 est valeur propre de multiplicité au plus 1, et qu'un vecteur propre éventuel associé est strictement positif. En particulier, un canal irréductible admet au plus un état invariant, qui est alors fidèle.

Une application du théorème de Kümmerer–Maassen aux marches quantiques ouvertes donne donc les résultats suivants : si $\Phi = \sum_{i,j} \Phi_{i,j}$ est irréductible et admet un état invariant ρ_{inv} (qui sera automatiquement fidèle), alors celui-ci est de la forme $\rho_{\text{inv}} = \sum_{i \in V} \rho_{\text{inv}}(i) \otimes |i\rangle\langle i|$, et pour tout état initial ρ , tout i de V , la fréquence empirique en i définie par $N_{i,n} := \text{card}\{k \leq n \mid v_k = i\}$, vérifie

$$\begin{aligned} \frac{N_{i,n}}{n} &\xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \text{tr}(\rho_{\text{inv}}(i)) \quad \mathbb{P}_\rho\text{-presque-sûrement,} \\ \frac{1}{N_{i,n}} \sum_{k=0}^{n-1} \rho_k \mathbb{1}_{v_k=i} &\xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \frac{\rho_{\text{inv}}(i)}{\text{tr}(\rho_{\text{inv}}(i))} \quad \mathbb{P}_\rho\text{-presque-sûrement.} \end{aligned} \tag{8}$$

L'article [P15] caractérise "en termes de chemins" l'irréductibilité de Φ . Pour cela, on définit pour i, j de V un chemin de i à j comme une suite i_0, \dots, i_ℓ en V où $\ell \geq 1$, tel que $i_0 = i$ et $i_\ell = j$; un tel chemin est dit de longueur ℓ . On note $\mathcal{P}(i, j)$ (respectivement $\mathcal{P}_\ell(i, j)$) l'ensemble des chemins de i à j de longueur quelconque (respectivement de longueur ℓ). Un chemin de i à i est appelé une boucle. Pour $\pi = (i_0, \dots, i_\ell)$ dans $\mathcal{P}(i, j)$ on note L_π l'opérateur de \mathfrak{h}_i dans \mathfrak{h}_j défini par

$$L_\pi = L_{i_\ell, i_{\ell-1}} \cdots L_{i_1, i_0} = L_{j, i_{\ell-1}} \cdots L_{i_1, i}. \tag{9}$$

On a alors :

PROPOSITION 3.7 ([P15]). *Le canal quantique Φ est irréductible si et seulement si, pour tous i et j de V , on a l'une des conditions équivalentes*

- pour tout x de $\mathfrak{h}_i \setminus \{0\}$, l'ensemble $\{L_\pi x \mid \pi \in \mathcal{P}(i, j)\}$ est total dans \mathfrak{h}_j ,
- pour tout x de $\mathfrak{h}_i \setminus \{0\}$ et y de $\mathfrak{h}_j \setminus \{0\}$, il existe un chemin π de $\mathcal{P}(i, j)$ tel que $\langle y, L_\pi x \rangle \neq 0$.

Remarque 3.8. Une chaîne de Markov est irréductible si, sur le graphe induit par les transitions de probabilité non nulle, tout point est accessible depuis tout point. La proposition 3.7 étend ce résultat en ajoutant à la notion d'accessibilité celle des degrés de liberté interne. Il se réduit au critère usuel si la marche quantique ouverte considérée est une dilatation minimale d'une chaîne de Markov (ce n'est plus le cas si l'on considère des dilatations non minimales comme dans [7]). Remarquons cependant que l'irréductibilité de Φ n'est pas la même chose que l'irréductibilité de $(v_n)_n$ comme chaîne de Markov, et que cette dernière notion n'est en fait pas bien définie, voir la remarque 3.4i.

Aussi visuel qu'il puisse être, le critère donné par la proposition 3.7 n'est en général pas d'un usage facile : voir l'exemple 3.9 ci-dessous.

Exemple 3.9. Appelons marche quantique ouverte simple sur $V = \{1, \dots, d\}$ (respectivement $V = \mathbb{Z}$) la marche quantique ouverte avec $\mathfrak{h}_i \equiv \mathbb{C}^2$ pour tout i et $L_{i,i+1} = L_-, L_{i+1,i} = L_+$ pour tout i (où $i + 1$ est compris modulo d si $V = \{1, \dots, d\}$), et L_-, L_+ sont deux opérateurs sur \mathfrak{h} qui vérifient $L_-^* L_- + L_+^* L_+ = \text{Id}_{\mathbb{C}^2}$. On peut montrer alors par une preuve longue et ennuyeuse que :

- la MQO simple sur $\{1, \dots, d\}$ est irréductible si et seulement si l'ensemble des $L_\pi, \pi \in \mathcal{P}(0, 0)$, n'a pas de vecteur propre commun;
- la MQO simple sur \mathbb{Z} est irréductible à moins qu'il n'existe un vecteur propre commun à $L_+ L_-, L_- L_+$, et L_- ; ou un vecteur propre commun à $L_+ L_-, L_- L_+$, et L_+ ; ou qu'il n'existe deux vecteurs linéairement indépendants e_0 et e_1 tels que $L_+ e_0, L_- e_0 \in \mathbb{C} e_1$ et $L_+ e_1, L_- e_1 \in \mathbb{C} e_0$.

Remarque 3.10. La proposition 3.7 peut s'adapter au cas d'une MQO étendue, i.e. au cas où les transitions de j à i sont représentées par une application complètement positive $\Phi_{i,j}$. En effet, ce $\Phi_{i,j}$ admet une décomposition dite de Kraus $\Phi_{i,j}(\eta) = \sum_{K_i} L_{i,j}^{(k)} \eta L_{i,j}^{(k)*}$ (voir par exemple [110]). La proposition 3.7 reste vraie si le chemin π est choisi non plus sur le graphe de sommets V mais sur le multigraphe dont les différentes arêtes de j à i correspondent aux différents $L_{i,j}^{(k)}, k \in K_i$, l'opérateur L_π étant défini en conséquence comme un produit d'opérateurs $L_{i,j}^{(k)}$.

Le théorème de Perron–Frobenius a permis de s'assurer que 1 est valeur propre de multiplicité au plus 1; comme pour les matrices de transition, la notion de période permet de préciser la forme du spectre périphérique et, dans le cas apériodique avec $\dim \mathcal{H} < \infty$, de montrer que Φ^n converge quand $n \rightarrow \infty$. La notion de période donnée dans [56, 68] se réduit dans le cas des marches quantiques ouvertes à la définition suivante (qui étend encore une fois la définition classique) :

DÉFINITION 3.11 ([P15]). *La période de Φ est le plus grand $d \in \mathbb{N}$ pour lequel il existe pour chaque $i \in V$ une résolution de l'identité¹ $p_i(0), \dots, p_i(d-1)$ de \mathfrak{h}_i telle que pour tous $k = 0, \dots, d-1$, on a*

$$p_i(k) L_{i,j} = L_{i,j} p_j(k-1) \quad (10)$$

(où $k-1$ est à comprendre modulo d).

L'apériodicité permet d'obtenir un résultat de convergence en loi dans le cas $\dim \mathcal{H} < \infty$:

PROPOSITION 3.12 ([P15]). *Si la marche quantique ouverte est irréductible et apériodique sur \mathcal{H} de dimension finie, alors pour tout état initial ρ et tout i de V ,*

$$\mathbb{P}(X_n = i) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \text{tr}(\rho_{\text{inv}}(i)).$$

Encore une fois, déterminer en général la période d'une marche quantique ouverte est difficile. Comme dans le cas classique, on peut cependant obtenir une condition suffisante simple d'apériodicité :

PROPOSITION 3.13 ([P15]). *S'il existe i de V tel que pour tout x de \mathfrak{h}_i ,*

$$\text{pgcd}\{\ell \geq 1, \exists \pi \in \mathcal{P}_\ell(i, i) \text{ tel que } \langle x, L_\pi x \rangle \neq 0\} = 1,$$

alors la marche quantique ouverte est apériodique.

1. Une résolution de l'identité est une famille de projecteurs orthogonaux dont la somme vaut l'identité.

Exemple 3.14. En excluant les cas triviaux où $L_+ = 0$ ou $L_- = 0$:

- la MQO simple sur $\{1, \dots, d\}$ avec d impair a pour période 1 ;
- la MQO simple sur $\{1, \dots, d\}$ avec d pair, ou sur \mathbb{Z} , a pour période 2 ou 4.

Dans le deuxième cas, la période est 4 uniquement s'il existe une base orthonormée de \mathbb{C}^2 dans laquelle L_+ est diagonale et L_- antidiagonale (ou réciproquement).

Remarque 3.15. Encore une fois, la définition 3.II et la proposition 3.I3 restent vraies pour des marches quantiques ouvertes étendues, à condition de considérer des chemins sur un multigraphe.

L'hypothèse d'irréductibilité et le théorème de Perron–Frobenius permettent facilement de montrer loi des grands nombres, théorème de la limite centrale et principe de grande déviation d'un seul coup. Nous donnons la preuve dans le cas d'une MQO sur un graphe V fini, puis énonçons un résultat similaire dans le cas d'une MQO homogène sur un réseau. Supposons donc $V = \{1, \dots, d\}$ et notons N_n le d -uplet $(N_{1,n}, \dots, N_{d,n})$. Alors pour tout $\alpha \in \mathbb{R}^d$ on a

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_\rho(\exp(\langle \alpha, N_n \rangle_{\mathbb{C}^d})) &= \sum_{i_1, \dots, i_n} \exp((\alpha_{i_1} + \dots + \alpha_{i_n})) \operatorname{tr}(\phi_{i_n, i_{n-1}} \circ \dots \circ \phi_{i_2, i_1}(\rho_{i_1})) \\ &= \operatorname{tr}(\Phi^{(\alpha)} \circ \dots \circ \Phi^{(\alpha)}(e^{\alpha_1} \rho_{i_1} \otimes |i_1\rangle\langle i_1|)) \end{aligned}$$

où

$$\Phi^{(\alpha)} = \sum_{i,j \in V} e^{\alpha_i} \Phi_{i,j}.$$

Par le critère de la proposition 3.7, l'opérateur $\Phi^{(\alpha)}$ reste irréductible si Φ l'est, donc son rayon spectral $\lambda^{(\alpha)}$ est une valeur propre simple, de vecteur propre associé strictement positif. On peut alors montrer en utilisant la structure périodique de la définition 3.II (ou la proposition 4.9, voir la remarque 4.II) que

$$\frac{1}{n} \log \mathbb{E}_\rho(\exp(\langle \alpha, N_n \rangle_{\mathbb{C}^d})) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \log \lambda^{(\alpha)}. \quad (\text{II})$$

De plus, par la théorie de perturbation des valeurs propres en dimension finie (voir le premier chapitre de [83]), $\lambda^{(\alpha)}$ est localement analytique en α au voisinage de tout $\alpha \in \mathbb{R}$. Par conséquent, $\alpha \mapsto \lambda^{(\alpha)}$ est infiniment dérivable sur \mathbb{R} . On obtient donc immédiatement une loi des grands nombres et un principe de grande déviations pour $(v_n)_n$. De plus, un effort supplémentaire permet de montrer que le terme de gauche dans (II) est uniformément borné en n pour u dans un voisinage complexe de l'origine. On peut alors appliquer le théorème de Bryc multidimensionnel (voir l'annexe A.4 de [PII]) pour obtenir un théorème de la limite centrale. Les moyenne et variance limite peuvent s'exprimer en fonction de λ , et de là on obtient des expressions plus explicites. On peut ensuite étendre facilement ce résultat au cas où Φ a un unique état invariant non fidèle. On obtient le résultat suivant :

PROPOSITION 3.I6 ([PI3]). *Soit Φ une marche quantique ouverte sur $V = \{1, \dots, d\}$, qui admet un unique état invariant ρ_{inv} . Définissons $m = (m_1, \dots, m_d) \in \mathbb{R}^d$ et C une matrice symétrique $d \times d$ par*

$$m_i = \operatorname{tr}(\rho_{\text{inv}}(i)), \quad \langle u, Cu \rangle = \lambda_u'' - (\lambda_u')^2$$

où λ_u' et λ_u'' sont les dérivées au sens de Gâteaux en 0, dans la direction u . On a alors

$$\frac{N_n}{n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} m \quad \mathbb{P}_\rho\text{-presque-sûrement}, \quad \frac{N_n - m}{\sqrt{n}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \mathcal{N}(0, C) \quad \text{en distribution},$$

et N_n vérifie un principe de grande déviations pour la bonne fonction de taux

$$I(\nu) = \sup_{\alpha \in \mathbb{R}^d} (\langle \alpha, \nu \rangle - \log \lambda^{(\alpha)}).$$

On peut donner un énoncé similaire pour une marche quantique ouverte telle que :

- V est un réseau de \mathbb{R}^d engendré positivement par une famille S de p vecteurs s_1, \dots, s_p ,
- $\mathfrak{h}_i \equiv \mathfrak{h}$ pour \mathfrak{h} de dimension finie fixée,
- la marche est homogène au sens où $\Phi_{i,j}$ est égal à un certain Φ_s si $i - j = s$ pour un $s \in S$, et est nul autrement.

Dans ce cas on peut définir un canal quantique dit “auxiliaire” sur \mathfrak{h} par $\psi = \sum_{s \in S} \phi_s$. Une preuve identique à celle du théorème 3.16 montre que

PROPOSITION 3.17 ([P17]). *Supposons que dans le cas décrit ci-dessus, ψ admet un unique état invariant η_{inv} . Définissons un vecteur m de \mathbb{R}^d et C une matrice $d \times d$ réelle symétrique par*

$$m = \sum_{s \in S} s \operatorname{tr}(\phi_s(\eta_{\text{inv}})), \quad \langle u, Cu \rangle = \lambda_u'' - (\lambda_u')^2$$

On a alors

$$\frac{v_n}{n} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} m \quad \mathbb{P}_\rho\text{-presque-sûrement}, \quad \frac{v_n - m}{\sqrt{n}} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \mathcal{N}(0, C) \quad \text{en distribution},$$

et $(N_n)_n$ vérifie un principe de grande déviations pour la bonne fonction de taux

$$I(\nu) = \sup_{\alpha \in \mathbb{R}^d} (\langle \alpha, \nu \rangle - \lambda^{(\alpha)}).$$

La preuve est essentiellement identique à celle que nous avons donnée pour le théorème 3.16.

Remarque 3.18. Un théorème de la limite centrale pour $(v_n)_n$ ci-dessus avait déjà été donné pour $V = \mathbb{Z}^d$ dans [8]. La formule donnée pour la covariance prend une forme a priori différente, mais la remarque 5.15 de [P13] montre qu'elle coïncide avec la nôtre.

Remarque 3.19. Quand la MQO est une dilatation minimale d'une chaîne de Markov classique, l'application ψ est triviale (c'est la multiplication par la constante 1) mais l'application $\alpha \mapsto \psi^{(\alpha)}$ ne l'est pas. La technique de preuve ci-dessus est d'ailleurs standard dans le cadre classique (voir la section 3.1 de [45]).

Remarque 3.20. Les résultats concernant les décompositions d'un Φ général en MQO irréductibles décrits dans la section 6 de [P15] (et développés ensuite dans [P14]) permettent d'étendre ces résultats dans des cas où les canaux quantiques pertinents ont plusieurs états invariants.

Poursuivons l'étude des marches quantiques ouvertes en analogie avec celle des chaînes de Markov : l'une des premières questions abordées dans un traitement classique de ces dernières concerne la récurrence. Supposons donc un instant que $(v_n)_n$ est une chaîne de Markov classique sur un ensemble discret V . Pour tout i de V , on définit

$$T_i = \inf\{n \geq 1 \mid v_n = i\}, \quad N_i = \operatorname{card}\{n \geq 1 \mid v_n = i\}.$$

Les résultats classiques (voir par exemple [51] ou [104]) concernant les temps de retour ou de passage $(T_i)_{i \in V}$ et nombre de visites $(N_i)_{i \in V}$ montrent que pour tout i de V ,

$$\mathbb{P}_i(T_i < \infty) = 1 \Leftrightarrow \mathbb{E}_i(N_i) = \infty. \quad (12)$$

Cette équivalence permet donc de définir une notion de récurrence en partant, au choix, des quantités $\mathbb{P}_i(T_i < \infty)$ ou $\mathbb{E}_i(N_i)$. De plus, si la chaîne de Markov est irréductible,

$$\mathbb{P}_i(T_i < \infty) < 1 \text{ pour tout } i \in V, \text{ ou } \mathbb{P}_i(T_i < \infty) = 1 \text{ pour tout } i \in V, \quad (13)$$

$$\mathbb{E}_i(N_i) < \infty \text{ pour tout } i \in V, \text{ ou } \mathbb{E}_i(N_i) = \infty \text{ pour tout } i \in V. \quad (14)$$

De même, pour une chaîne de Markov irréductible,

$$\mathbb{E}_i(T_i) < \infty \text{ pour tout } i \in V, \text{ ou } \mathbb{E}_i(T_i) = \infty \text{ pour tout } i \in V. \quad (15)$$

Si de plus la chaîne de Markov admet une mesure de probabilité $(\rho_i)_{i \in V}$, invariante, alors

$$\mathbb{E}_i(T_i) = \rho_i^{-1} < \infty \text{ pour tout } i \in V. \quad (16)$$

L'article [P17] étudie en particulier les analogues des propriétés (12) à (16) pour les marches quantiques ouvertes. On va voir que ces propriétés ne sont pas toutes vérifiées. Pour énoncer nos résultats, on va noter $\mathbb{P}_{i,\varrho}$ la probabilité \mathbb{P}_ρ dans le cas où $\rho = \varrho \otimes |i\rangle\langle i|$ avec ϱ un état sur \mathfrak{h}_i (de même pour $\mathbb{E}_{i,\varrho}$).

On peut donner des résultats pour des MQO générales (voir [P17]) mais on obtient des alternatives intéressantes lorsque l'on fait sur la marche une hypothèse qui assure que la mémoire contenue dans les degrés de liberté interne est en un sens limitée. On dira qu'une marche quantique ouverte sur $\mathcal{H} = \bigoplus_{i \in V} \mathfrak{h}_i$ est *semifinie* si $\dim \mathfrak{h}_i < \infty$ pour tout $i \in V$.

Le premier résultat traite des analogues de (13) et (14) :

THÉORÈME 3.21 ([P17]). *Soit Φ une marche quantique ouverte irréductible et semifinie. On a alors une alternative entre les trois situations suivantes :*

1. *pour tous i, j de V et ϱ dans $\mathcal{S}(\mathfrak{h}_i)$, on a $\mathbb{E}_{i,\varrho}(N_j) = \infty$ et $\mathbb{P}_{i,\varrho}(T_j < \infty) = 1$;*
2. *pour tous i, j de V et ϱ dans $\mathcal{S}(\mathfrak{h}_i)$, on a $\mathbb{E}_{i,\varrho}(N_j) < \infty$ et $\mathbb{P}_{i,\varrho}(T_i < \infty) < 1$;*
3. *pour tous i, j de V et ϱ dans $\mathcal{S}(\mathfrak{h}_i)$, on a $\mathbb{E}_{i,\varrho}(N_j) < \infty$ mais il existe i dans V , ϱ, ϱ' dans $\mathcal{S}(\mathfrak{h}_i)$ (ϱ nécessairement non fidèle) tels que $\mathbb{P}_{i,\varrho}(T_i < \infty) = 1$ et $\mathbb{P}_{i,\varrho'}(T_i < \infty) < 1$.*

Remarque 3.22. La remarque 3.2 de [P17] donne des exemples des trois situations décrites ci-dessus et montre donc que (12) et (13) ne sont pas vérifiées pour les MQO. La situation 3. est évidemment spécifique à ce cas non-commutatif.

La preuve du théorème 3.21 fait appel à trois arguments différents. Tout d'abord, on montre qu'on peut construire pour tous i, j de V une contraction complètement positive $\mathfrak{P}_{i,j}$ de $\mathcal{L}_1(\mathfrak{h}_j)$ dans $\mathcal{L}_1(\mathfrak{h}_i)$ telle que

$$\mathbb{P}_{i,\varrho}(T_j < \infty) = \text{tr}(\mathfrak{P}_{j,i}(\varrho)), \quad \mathbb{E}_{i,\varrho}(N_j) = \sum_{k \geq 0} \text{tr}(\mathfrak{P}_{j,j}^k \circ \mathfrak{P}_{j,i}(\varrho)), \quad (17)$$

puis que $\mathbb{P}_{i,\varrho}(T_j < \infty) = 1$ si et seulement si $\mathfrak{P}_{i,j}^*(\text{Id}_{\mathfrak{h}_i})$ est de la forme $\begin{pmatrix} \text{Id} & 0 \\ 0 & * \end{pmatrix}$ dans la décomposition $\mathfrak{h}_i = \text{Ran } \varrho \oplus (\text{Ran } \varrho)^\perp$, ce qui explique l'importance des ϱ fidèles. Par ailleurs, on peut voir que pour tout j de V ,

$$D^N(j) = \left\{ x = \sum_{i \in V} v_i \otimes |i\rangle \text{ tel que } \sum_{i \in V} \sum_{\pi \in \mathcal{P}(i,j)} \|L_\pi \varphi_i\|^2 < \infty \right\} \quad (18)$$

est un espace vectoriel stable par tous les $L_{k,l} \otimes |k\rangle\langle l|$ pour k, l in V . Ceci signifie que le projecteur orthogonal π sur la fermeture de $D^N(j)$ vérifie $\Phi(\pi\mathcal{I}_1(\mathcal{H})\pi) \subset \pi\mathcal{I}_1(\mathcal{H})\pi$. Si Φ est irréductible, alors $\pi = 0$ ou $\text{Id}_{\mathcal{H}}$; or si $v_i \in D^N(j) \cap \mathfrak{h}_i$, on a $\mathbb{E}_{i,|v_i\rangle\langle v_i|}(N_j) < \infty$ et ceci permet de conclure (notons qu'il n'y a pas d'argument analogue concernant la probabilité $\mathbb{P}_{i,\varrho}(t_j < \infty)$). Enfin, le troisième argument consiste à montrer que si $\dim \mathfrak{h}_i < \infty$ et que Φ est irréductible, alors pour tout j de V on a $\inf_{\varrho \in \mathcal{S}(\mathfrak{h}_i)} \mathbb{P}_{i,\varrho}(t_j < \infty) > 0$, ce qui permet d'utiliser des arguments "à la Markov" pour montrer que $\mathbb{E}_{i,\varrho}(N_j) = \infty$ implique $\mathbb{E}_{i,\varrho}(N_{j'}) = \infty$ pour tout j' .

On a bien en revanche pour les marches quantiques ouvertes un résultat analogue à (15) :

THÉORÈME 3.23 ([P17]). *Soit Φ une marche quantique ouverte irréductible et semifinie. On a alors une alternative entre les deux situations suivantes :*

1. *pour tout i de V et ϱ de $\mathcal{S}(\mathfrak{h}_i)$, on a $\mathbb{E}_{i,\varrho}(T_i) < \infty$,*
2. *pour tout i de V et ϱ de $\mathcal{S}(\mathfrak{h}_i)$, on a $\mathbb{E}_{i,\varrho}(T_i) = \infty$.*

Ce résultat s'établit en remarquant que

$$D^T(j) = \left\{ \varphi = \sum_{i \in V} \varphi_i \otimes |i\rangle \text{ tel que } \sum_{i \in V} \sum_{\pi \in \mathcal{P}^{V \setminus \{j\}}(i,j)} \ell(\pi) \|L_\pi \varphi_i\|^2 < \infty \right\}$$

est stable par tous les $L_{k,l} \otimes |k\rangle\langle l|$ pour k, l in V et en utilisant un argument d'irréductibilité.

On peut enfin établir un résultat concernant les temps de retour analogue à (16). Pour l'énoncer, définissons pour $j \in V$ un temps de k -ième retour par récurrence sur $k \in \mathbb{N}$:

$$T_j^{(k)} = \inf\{n > T_j^{(k-1)} \mid v_n = j\}.$$

On a alors :

THÉORÈME 3.24 ([P17]). *Soit Φ une marche quantique ouverte irréductible et semifinie, admettant un état invariant $\rho_{\text{inv}} = \sum_{i \in V} \rho_{\text{inv}}(i) \otimes |i\rangle\langle i|$. Alors cette marche est dans la situation 1 du théorème 3.23, et pour tous i, j de V et ϱ dans $\mathcal{S}(\mathfrak{h}_i)$, la suite $(T_j^{(k)}/k)_k$ converge $\mathbb{P}_{i,\varrho}$ -presque-sûrement et dans $L^1(\mathbb{P}_{i,\varrho})$ vers*

$$\mathbb{E}_{j, \frac{\rho_{\text{inv}}(j)}{\text{tr } \rho_{\text{inv}}(j)}}(T_j) = (\text{tr } \rho_{\text{inv}}(j))^{-1}. \quad (19)$$

Discutons la preuve de ce théorème. Tout d'abord, (8) montre que $\frac{1}{N_{j,n}} \sum_{k=1}^{N_{j,n}} \rho_{t_j^{(k)}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{\rho_{\text{inv}}(j)}{\text{tr } (\rho_{\text{inv}}(j))}$, ce qui montre que l'on est dans la situation 1 du théorème 3.23 et que par conséquent l'opérateur $\mathfrak{P}_{j,j}$ est complètement positif, préserve la trace par (17) et a l'opérateur fidèle $\frac{\rho_{\text{inv}}(j)}{\text{tr } (\rho_{\text{inv}}(j))}$ pour invariant, donc est irréductible. Or, si l'on note $\mathcal{P}^{V \setminus \{j\}}(j, j)$ l'ensemble des boucles de j à j qui ne passent pas par j sauf en leurs extrémités, l'opérateur $\mathfrak{P}_{j,j}$ peut s'écrire $\mathfrak{P}_{j,j}(\varrho) = \sum_{\pi \in \mathcal{P}^{V \setminus \{j\}}(j,j)} L_\pi \varrho L_\pi^*$. La famille $\phi_\pi : \varrho \mapsto L_\pi \varrho L_\pi^*$ pour $\pi \in \mathcal{P}^{V \setminus \{j\}}(j, j)$ définit bien un instrument et la probabilité (6) sur $(\mathcal{P}^{V \setminus \{j\}}(j, j))^{\mathbb{N}}$ associée est donc ergodique par la remarque 3.1. On voit que $t_j^{(k)}$ s'identifie à la longueur totale des k premiers éléments de $\omega \in (\mathcal{P}^{V \setminus \{j\}}(j, j))^{\mathbb{N}}$; c'est donc est une fonctionnelle additive et on obtient le résultat final grâce au théorème ergodique de Birkhoff.

Le dernier sujet abordé par [P17] est celui du problème de Dirichlet. Cette question étant moins naturelle que les précédentes dans le contexte des mesures répétées, nous ne le décrivons pas ici : disons simplement que les résultats précédents permettent de construire des solutions à des problèmes du type $((\text{Id} - \Phi)(Z))_i = A_i$ pour i dans un domaine discret D , et $Z_j = B_j$ pour j sur le bord ∂D de D , où $(A_i)_{i \in D}$ et $(B_j)_{j \in \partial D}$ sont les données du problème.

Remarque 3.25. Encore une fois, les propositions 3.16 et 3.17, les théorèmes 3.21, 3.23 et 3.24 se généralisent immédiatement au cas des MQO étendues. Par ailleurs, les décompositions de Φ en MQO irréductibles de [P15] permettent d'obtenir des expressions pour les quantités comme $\mathbb{P}_{i,\varrho}(t_j < \infty)$ introduites ci-dessus, sans hypothèse d'irréductibilité. Nous ne détaillons pas ces expressions ici.

2. ENTROPIE DES STATISTIQUES DE MESURE RÉPÉTÉES

Cette section décrit les résultats obtenus dans les articles [P20]² et [P26]. L'objectif de l'article [P20] était de comprendre la production d'entropie des mesures indirectes, ce que l'on peut décrire moins formellement comme "l'apparition de la flèche du temps" : si l'on reçoit une liste (i_1, \dots, i_n) dont on sait qu'elle est une liste de résultats de mesure lue soit à l'endroit, soit à l'envers, pourra-t-on déterminer quel est le sens correct ?

On considère un instrument $\mathcal{I} = (\Phi_i, i \in V)$ sur un espace de Hilbert \mathcal{H} de dimension finie, et la mesure de probabilité \mathbb{P}_ρ sur $\Omega = V^{\mathbb{N}}$ définie par (1). Pour construire la mesure renversée, il nous faut faire l'hypothèse suivante :

(A) L'état initial ρ est Φ -invariant et fidèle : $\Phi(\rho) = \rho$ et ρ est définie positive.

On considère une involution θ de V . L'hypothèse **(A)** assure que

$$\widehat{\mathbb{P}}_\rho(i_1, \dots, i_n) = \mathbb{P}_\rho(\theta(i_n), \dots, \theta(i_1)) \quad (20)$$

définit via le théorème d'extension de Kolmogorov une probabilité sur $V^{\mathbb{N}}$ qui est invariante par translation à gauche, notée τ . Déterminer la flèche du temps comme nous l'évoquons ci-dessus revient à effectuer un test d'hypothèse entre \mathbb{P}_ρ et $\widehat{\mathbb{P}}_\rho$.

Remarque 3.26. Il existe (au moins) un instrument $\widehat{\mathcal{I}}$ tel que la statistique des mesures associées à $(\widehat{\mathcal{I}}, \widehat{\rho})$ est $\widehat{\mathbb{P}}_\rho$ avec $\widehat{\rho} = \rho$. Cet instrument a été identifié par Crooks, voir [36], et est défini par $\widehat{\mathcal{I}} = (\widehat{\Phi}_i, i \in I)$ où

$$\widehat{\Phi}_i(\eta) = \rho^{+1/2} \Phi_{\theta(i)}^*(\rho^{-1/2} \eta \rho^{-1/2}) \rho^{+1/2}. \quad (21)$$

On a encore que $\widehat{\Phi}(\widehat{\rho}) = \widehat{\rho}$ si $\widehat{\Phi} := \sum_{i \in I} \widehat{\Phi}_i$.

Pour simplifier les notations, nous noterons simplement \mathbb{P} et $\widehat{\mathbb{P}}$ ces deux mesures, et $\mathbb{P}_n, \widehat{\mathbb{P}}_n$ respectivement leurs marginales sur V^n . Pour pouvoir définir la variable aléatoire centrale à cette étude, nous faisons une hypothèse supplémentaire :

(B) Pour tout n on a $\text{supp } \mathbb{P}_n = \text{supp } \widehat{\mathbb{P}}_n$

(remarquons que $\text{supp } \mathbb{P}_n \neq \text{supp } \widehat{\mathbb{P}}_n$ implique $\text{supp } \mathbb{P}_{n+1} \neq \text{supp } \widehat{\mathbb{P}}_{n+1}$). On définit alors sans ambiguïté une variable aléatoire ς_n égale \mathbb{P} -presque-partout sur Ω à

$$\varsigma_n(\omega) = \log \frac{\mathbb{P}(i_1, \dots, i_n)}{\widehat{\mathbb{P}}(i_1, \dots, i_n)}. \quad (22)$$

2. Cet article a été écrit "dans l'interprétation de Heisenberg", autrement dit les ϕ_i de [P20] sont nos ϕ_i^* .

Cette variable est appelée la variable aléatoire d'information relative (voir [35]), ou log-vraisemblance. Elle a la propriété que

$$\mathbb{E}(\varsigma_n) = S(\mathbb{P}_n | \widehat{\mathbb{P}}_n) \quad \log \mathbb{E}(e^{-\alpha \varsigma_n}) = S_{1-\alpha}(\mathbb{P}_n | \widehat{\mathbb{P}}_n) = S_\alpha(\mathbb{P}_n | \widehat{\mathbb{P}}_n) \quad (23)$$

(ici et dans toute la suite, les espérances notées \mathbb{E} sont calculées par rapport à \mathbb{P}). On peut montrer les résultats suivants :

THÉORÈME 3.27 ([P20]). *Supposons vérifiées les hypothèses (A) et (B). Alors :*

1. *La limite*

$$\text{ep} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \mathbb{E}(\varsigma_n) \quad (24)$$

existe dans $[0, +\infty]$. Cette quantité est appelée le taux moyen de production d'entropie.

2. *La limite*

$$\sigma = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \varsigma_n \quad (25)$$

existe \mathbb{P} -presque-sûrement dans \mathbb{R} et vérifie $\sigma \circ \tau = \sigma$. Si de plus $\text{ep} < \infty$ alors la limite (25) a lieu au sens $L^1(\mathbb{P})$. La quantité $\sigma(\omega)$ est appelée la production d'entropie le long de la trajectoire $\omega \in \Omega$.

Le premier point de cette proposition découle facilement du lemme de Fekete sur les suites numériques sous-additives. Le second provient du théorème ergodique sous-additif de Kingman (que l'on peut voir comme une version presque-sûre du lemme de Fekete, voir le théorème 10.1 de [121]), et du théorème de Shannon–McMillan–Breiman (théorème 16.8.1 de [35]). La sous-additivité provient de l'inégalité simple suivante :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(i_1, \dots, i_{m+n}) &= \text{tr}(\Phi_{i_m} \circ \dots \circ \Phi_{i_1}(\rho) \Phi_{i_{m+1}}^* \circ \dots \circ \Phi_{i_{m+n}}^*(\text{Id})) \\ &\leq \text{tr}(\Phi_{i_m} \circ \dots \circ \Phi_{i_1}(\rho)) \text{tr}(\Phi_{i_{m+1}}^* \circ \dots \circ \Phi_{i_{m+n}}^*(\text{Id})) \\ &\leq \lambda_0^{-1} \mathbb{P}(i_1, \dots, i_m) \mathbb{P}(i_{m+1}, \dots, i_{m+n}) \end{aligned} \quad (26)$$

où $\lambda_0 = \min \text{sp } \rho$. On peut alors montrer que sous une hypothèse d'irréductibilité, l'annulation de ep caractérise l'égalité de la mesure \mathbb{P} et de la mesure renversée $\widehat{\mathbb{P}}$. On rappelle (voir remarque 3.1) que le système dynamique $(\Omega, \mathbb{P}, \tau)$ est ergodique si Φ est irréductible.

THÉORÈME 3.28 ([P20]). *Supposons le système dynamique $(\Omega, \mathbb{P}, \tau)$ ergodique. Alors $\sigma = \text{ep}$, et on a $\mathbb{P} = \widehat{\mathbb{P}}$ si et seulement si $\sigma = 0$ \mathbb{P} -presque-sûrement.*

Quand l'instrument \mathcal{I} est associé à une chaîne de Markov de matrice de transition $\Pi = (\Pi_{i,j})_{i,j \in V}$ comme dans la remarque 3.4, c'est-à-dire qu'on a $\mathcal{I} = (\Phi_{i,j}, i \in V)$ avec $\mathcal{H} = \mathbb{C}$ et $\phi_{i,j} = \Pi_{j,i}$, et que ρ est l'état diagonal de coefficients $(\rho_i, i \in V)$ supposé invariant par Π , alors le théorème ergodique de Birkhoff montre immédiatement que

$$\sigma = \sum_{i,j \in V} \rho_i \Pi_{i,j} \log \frac{\Pi_{i,j}}{\Pi_{j,i}} = \sum_{i,j \in V} \rho_i \Pi_{i,j} \log \frac{\rho_i \Pi_{i,j}}{\rho_j \Pi_{j,i}},$$

de sorte que $\sigma = 0$ si et seulement si la chaîne vérifie la relation de bilan détaillé $\rho_i \Pi_{i,j} = \rho_j \Pi_{j,i}$. Il est naturel de se demander s'il existe une caractérisation similaire dans le cas général; cette question est l'objet de l'article [P26]. Il existe dans la littérature plusieurs notions de bilan détaillé dans le cas quantique, qui

concernent le canal quantique Φ et non l'instrument $(\Phi_i, i \in V)$. Nous choisissons de dire qu'un canal quantique Φ vérifie le *bilan détaillé quantique* si, notant $\tilde{\Phi}$ le dual de Φ pour le produit scalaire $(\eta_1, \eta_2) \mapsto \text{tr}(\rho^{\frac{1}{2}} \eta_1^* \rho^{\frac{1}{2}} \eta_2)$, il existe une involution unitaire ou antiunitaire J telle que $J\rho = \rho J$ et $J\Phi(\eta)J = \tilde{\Phi}(J\eta J)$ pour tout η (on peut montrer que les autres notions usuelles de bilan détaillé quantique sont équivalentes entre elles, et entraînent celle-ci). Il est naturel d'étendre cette notion aux instruments, en disant que $(\Phi_i, i \in V)$ vérifie le bilan détaillé³ s'il existe un tel J et une involution θ de V tels que $\tilde{\Phi}_i = \Phi_{\theta(i)}$.

Il existe alors une notion de *complétude* d'un instrument $(\Phi_i, i \in V)$ qui revient à dire que, si l'on écrit chaque Φ_i sous la forme $\Phi_i(\rho) = \text{tr}_{\mathcal{H}_{\mathcal{E}}} (U(\rho \otimes \xi) U^* \Pi_i)$ avec Π_i un opérateur positif tel que $\sum_{i \in V} \Pi_i = \text{Id}_{\mathcal{H}_{\mathcal{E}}}$ (c'est toujours possible, voir le théorème 2.4 de [125]) et vérifiant la condition $\text{vect}(\Pi_i, i \in V) = \mathcal{B}(\mathcal{H}_{\mathcal{E}})$. Dans le cadre de mesures indirectes tel que présenté en section 0.3, cette hypothèse de complétude n'est pas vérifiée à moins que $\dim \mathcal{H}_{\mathcal{E}} = 1$. Il nous faudrait donc étendre le protocole de mesure en supposant qu'il existe non pas une observable de mesure M mais une famille M_j , $j \in V$ d'observables que l'on suppose encore une fois par facilité non dégénérée, de projecteurs spectraux $\pi_{i,j}$, $i = 1, \dots, \dim \mathcal{H}_{\mathcal{E}}$ et que l'on choisit à chaque itération du cycle évolution-mesure suivant une loi $(p_j)_{j \in J}$ quelle observable M_j sera mesurée, de sorte que l'on a un instrument donné par les $\Phi_{i,j}$ suivants :

$$\Phi_{i,j}(\rho) := p_j \text{tr}_{\mathcal{H}_{\mathcal{E}}} ((\text{Id}_{\mathcal{H}_{\mathcal{S}}} \otimes \pi_{i,j}) U(\rho \otimes \xi) U^* (\text{Id}_{\mathcal{H}_{\mathcal{S}}} \otimes \pi_{i,j})).$$

L'hypothèse de complétude revient alors à dire que $\text{vect}(\pi_{i,j}, i = 1, \dots, \dim \mathcal{H}_{\mathcal{E}}, j \in J) = \mathcal{B}(\mathcal{H}_{\mathcal{E}})$. Remarquons que cette notion est vérifiée trivialement par les dilatations minimales de chaînes de Markov, pour lesquelles $\dim \mathcal{H}_{\mathcal{E}} = 1$, voir la remarque 3.4.

Cette notion permet d'énoncer que les notions ci-dessus sont équivalentes :

THÉORÈME 3.29 ([P26]). *Supposons le canal quantique Φ irréductible; alors les points suivants sont équivalents :*

1. *le canal Φ vérifie le bilan détaillé pour J ;*
2. *il existe un instrument complet $(\Phi_i, i \in V)$ avec $\Phi = \sum_{i \in V} \Phi_i$, et une involution θ de V , tels que $(\Phi_i, i \in V)$ vérifie le bilan détaillé pour J et θ ;*
3. *il existe un instrument complet $(\Phi_i, i \in V)$ avec $\Phi = \sum_{i \in V} \Phi_i$, et une involution θ de V , tels que la production d'entropie e_p définie dans la proposition 3.27 est nulle.*

L'hypothèse de complétude permet de remonter de la probabilité \mathbb{P}_ρ induite par des instruments, comme en (i), à un état sur la chaîne d'environnements $\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2, \dots$ état qui est un *finitely correlated state* au sens de Fannes, Nachtergaele et Werner (voir [59, 60]). On bénéficie alors des résultats d'unicité qui existent dans le cadre de cette théorie (voir à nouveau [59, 60], ainsi que [74]). Ce théorème 3.29 montre que le bilan détaillé quantique pour Φ équivaut à l'existence d'un protocole de mesure indirecte complet au sens des informations qu'il fournit, qui induit une évolution moyenne décrite par Φ , et qui donne une production d'entropie e_p nulle.

Revenons à la question de discriminer entre \mathbb{P} et $\hat{\mathbb{P}}$; le théorème 3.27 permet de donner une première réponse. Dans les théorèmes 3.30 et 3.33, nous considérons la question du test d'hypothèse en construisant, pour chaque n , un "test", événement T_n dont l'observation nous mènerait à conclure que les données ont été échantillonnées par \mathbb{P} , et la non-observation qu'ils ont été échantillonnés par $\hat{\mathbb{P}}$. Dans ce cadre, $\mathbb{P}_n(T_n^c)$ est l'erreur "de conclure à tort à $\hat{\mathbb{P}}$ " et $\hat{\mathbb{P}}_n(T_n)$ l'erreur "de conclure à tort à \mathbb{P} ".

3. On aimerait parler alors de bilan détaillé détaillé.

THÉORÈME 3.30 ([P20]). *Supposons vérifiées les hypothèses (A) et (B), et soit $\epsilon \in]0, 1[$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$ on définit*

$$s_n(\epsilon) = \min \left(\widehat{\mathbb{P}}_n(T_n) \text{ pour } T_n \in \Omega_n \text{ avec } \mathbb{P}_n(T_n^c) \leq \epsilon \right).$$

Si le système dynamique $(\Omega, \mathbb{P}, \tau)$ est ergodique, alors

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log s_n(\epsilon) = -\text{ep}.$$

Ce résultat montre que le taux optimal de décroissance de $\widehat{\mathbb{P}}_n(T_n)$ si l'on contraint $\mathbb{P}_n(T_n^c)$ à rester inférieure à ϵ est ep (et on peut remplacer dans cette phrase “rester inférieure à ϵ ” par “tend vers zéro”). C'est une application standard du théorème 3.27, voir la section 3.4 de [45].

Pour être plus précis en termes de détermination de la flèche du temps, il nous faut introduire de nouvelles hypothèses. L'hypothèse ci-dessous n'est pas exactement celle qui est donnée dans [P20] mais on montre facilement qu'elle lui est équivalente (voir [18]).

(C) Il existe $C > 0$ et $\tau \geq 0$ tels que pour tous i_1, \dots, i_m et j_1, \dots, j_n il existe k_1, \dots, k_ℓ avec $\ell \leq \tau$, tels que

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(i_1, \dots, i_m, k_1, \dots, k_\ell, j_1, \dots, j_n) &\geq C \mathbb{P}(i_1, \dots, i_m) \mathbb{P}(j_1, \dots, j_n) \\ \widehat{\mathbb{P}}(i_1, \dots, i_m, k_1, \dots, k_\ell, j_1, \dots, j_n) &\geq C \widehat{\mathbb{P}}(i_1, \dots, i_m) \widehat{\mathbb{P}}(j_1, \dots, j_n). \end{aligned}$$

Remarque 3.31. On peut montrer (voir la proposition 2.8 de [62]) que si Φ est irréductible, alors la condition ci-dessus est vraie pour \mathbb{P} seul (et la même chose est vraie pour $\widehat{\mathbb{P}}$). Ceci suffit à étudier par exemple les entropies de Rényi de \mathbb{P} et de $\widehat{\mathbb{P}}$, mais nous nous intéressons ici aux propriétés relatives de \mathbb{P} et $\widehat{\mathbb{P}}$ et avons besoin de la condition (C) qui renforce la propriété générale en permettant un choix commun de k_1, \dots, k_ℓ pour \mathbb{P} et pour $\widehat{\mathbb{P}}$.

On va considérer également un renforcement de (C) qui consiste à imposer $\ell = 0$:

(D) Il existe $C > 0$ tel que pour tous i_1, \dots, i_m et j_1, \dots, j_n ,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(i_1, \dots, i_m, j_1, \dots, j_n) &\geq C \mathbb{P}(i_1, \dots, i_m) \mathbb{P}(j_1, \dots, j_n) \\ \widehat{\mathbb{P}}(i_1, \dots, i_m, j_1, \dots, j_n) &\geq C \widehat{\mathbb{P}}(i_1, \dots, i_m) \widehat{\mathbb{P}}(j_1, \dots, j_n). \end{aligned}$$

On peut alors prouver :

THÉORÈME 3.32 ([P20]). *Supposons vérifiées les hypothèses (A), (B) et (C). Alors :*

1. *Pour tout $\alpha \in]0, 1[$, la limite*

$$e(\alpha) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log \mathbb{E}(e^{-\alpha s_n}) \tag{27}$$

existe dans $] -\infty, +\infty[$. La fonction e est convexe, nulle en 0 et 1, et vérifie la symétrie

$$e(\alpha) = e(1 - \alpha), \quad \alpha \in \mathbb{R}. \tag{28}$$

Elle est dérivable sur $]0, 1[$ et admet des dérivées à droite en 0 et à gauche en 1, qui valent respectivement $-\text{ep}$ et $+\text{ep}$. La suite $(s_n)_n$ vérifie un principe de grandes déviations local sur $] -\text{ep}, +\text{ep}[$.

2. Si de plus **(D)** est vraie, alors e est finie et dérivable sur \mathbb{R} . La suite $(\varsigma_n)_n$ vérifie un principe de grandes déviations (global) pour la fonction de taux

$$I(s) = \sup_{\alpha \in \mathbb{R}} (\alpha s - e(-\alpha)), \quad s \in \mathbb{R},$$

qui vérifie la relation $I(-s) = I(s) + s$ pour tout $s \in \mathbb{R}$.

Ces résultats ont été renforcés par [38], où les auteurs montrent les hypothèses **(A)**, **(B)** et **(C)** suffisent à ce que quantité $e(\alpha)$ définie par (27) existe dans $] -\infty, +\infty[$ pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, et qu'un principe de grandes déviations soit vérifié. Leur approche des grandes déviations se fait par la théorie Ruelle–Lanford et non par le théorème de Gärtner–Ellis, comme dans [P20].

En termes de détermination de la flèche du temps, le théorème 3.32 a la conséquence suivante :

THÉORÈME 3.33 ([P20]). *Supposons vérifiées les hypothèses **(A)**, **(B)** et **(C)**. Alors :*

1. Si l'on définit l'erreur totale

$$c_n = \min_{T_n \in \Omega_n} (\widehat{\mathbb{P}}_n(T_n) + \mathbb{P}_n(T_n^c)),$$

dans le test d'hypothèses de \mathbb{P} contre $\widehat{\mathbb{P}}$, on a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = \min_{\alpha \in [0,1]} e(\alpha) = e(1/2). \quad (29)$$

2. Si l'on définit pour $s \geq 0$

$$h(s) = \inf \left\{ \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log \widehat{\mathbb{P}}_n(T_n), T_n \in \Omega_n \text{ tel que } \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log \widehat{\mathbb{P}}_n(T_n^c) < -s \right\},$$

le taux de décroissance optimal de $\widehat{\mathbb{P}}_n(T_n)$ sous la contrainte que $\widehat{\mathbb{P}}_n(T_n^c)$ décroît avec un taux s , alors

$$h(s) = \inf_{\alpha \in [0,1[} \frac{s\alpha + e(\alpha)}{1 - \alpha} \quad (30)$$

(et cette dernière quantité est nulle si $s > \text{ep}$).

Remarque 3.34. L'objectif de l'article [P20] était l'étude de l'apparition de la flèche du temps lors des mesures indirectes et c'est pourquoi, quand on parle de l'instrument $\widehat{\mathcal{I}}$ et de l'état $\widehat{\rho}$, on suppose toujours qu'ils induisent le renversement de \mathbb{P}_ρ . On peut cependant presque immédiatement étendre nos résultats afin de discuter le test d'hypothèse entre des probabilités \mathbb{P}_ρ et $\widehat{\mathbb{P}}_{\widehat{\rho}}$ induites par (\mathcal{I}, ρ) et $(\widehat{\mathcal{I}}, \widehat{\rho})$ respectivement, dans un cadre plus général. En effet, les théorèmes 3.27 et 3.30, et par conséquent les théorèmes 3.32 et 3.33, restent vrais si l'on remplace **(A)** par l'hypothèse que $\Phi(\rho) = \rho$ et $\widehat{\Phi}(\widehat{\rho}) = \widehat{\rho}$ avec ρ et $\widehat{\rho}$ fidèles, avec l'exception que (28) et la dernière identité “ $= e(1/2)$ ” de (29) ne sont plus vraies en général.

Nous devons dire un mot des preuves du théorème 3.32 (le théorème 3.33 est alors une application standard, voir la section 3.5 de [45]). Cette preuve utilise le cadre du formalisme thermodynamique non-additif. Elle consiste à montrer que $e(\alpha)$ s'écrit comme le supremum d'une certaine fonctionnelle sur l'ensemble des probabilités de $V^{\mathbb{N}}$ invariantes par le décalage à gauche θ ; ceci s'obtient en exploitant un principe variationnel, puis en montrant que le maximum est atteint, cela étant fait par des constructions utilisant le théorème de Kolmogorov–Sinai. On peut alors montrer en suivant la preuve du théorème 1.2

de [61] que les dérivées à droite et à gauche de $e(\alpha)$ s'écrivent comme les infimum et supremum d'une autre fonction sur l'ensemble des probabilités τ -invariantes sur lesquelles le supremum précédent est atteint. Tout ceci utilise uniquement le "découplage supérieur" prouvé en (26). On montre ensuite que ce dernier ensemble évoqué est un singleton en utilisant la propriété de "découplage inférieur" fournie par l'hypothèse (C).

Remarquons enfin que les théorèmes ci-dessus reposent sur des hypothèses ((B) et surtout (C) ou (D)) dont nous n'avons pas encore montré qu'elles étaient vérifiées par des modèles non triviaux. Aucun modèle n'a été traité dans [P20], les exemples étant renvoyés à l'article [18] (auquel je n'ai pas contribué). Ce dernier article propose de nombreux modèles servant d'exemple aux résultats de [P20] et [38], et de contre-exemple à d'éventuels énoncés plus forts. Je cite ici tout de même deux exemples : les chaînes de Markov classiques et les mesures à deux temps.

Exemple 3.35. On considère une chaîne de Markov sur $V = \{1, \dots, \ell\}$ de matrice de transition $\Pi = (\Pi_{i,j})$ et de probabilité invariante π . On peut construire (comme dans la remarque 3.4) un instrument tel que la probabilité \mathbb{P}_ρ associée par (1) est la loi de la chaîne de Markov ci-dessus, en posant $\Phi_i(\rho) = \sum_j \Pi_{j,i} \rho_{j,j} |i\rangle\langle i|$ pour tout $i \in V$. Alors si la chaîne est irréductible, (A) est vérifiée, et si l'involution θ vérifie $\Pi_{i,j} = 0 \Leftrightarrow \Pi_{\theta(j),\theta(i)} = 0$ alors (B) et (C) sont vérifiées. Remarquons cependant que l'on peut dans ce cas, par des techniques classiques semblables à ce qui a été fait en page 62, montrer que $e(\alpha)$ est défini et infiniment dérivable sur \mathbb{R} .

Exemple 3.36. On considère une situation de mesure indirecte à deux temps d'une observable M : ceci revient à ajouter à la procédure décrite en section 0.3 un préalable à l'étape 1, qui est de mesurer M avant interaction avec \mathcal{H}_S (qui est ici noté \mathcal{H}). Le résultat associé à cette nouvelle expérience est alors un couple (i, j) d'éléments de $\text{sp } M$, et l'instrument correspondant est $(\Phi_{i,j}, i, j \in \text{sp } M)$, avec

$$\Phi_{i,j}(\rho) = \text{tr}_{\mathcal{K}} (U(\rho \otimes \pi_i \xi \pi_i) U^* (\text{Id} \otimes \pi_j)).$$

L'article [17] montre que si ξ est définie positive, alors il existe ρ définie positive telle que $\Phi(\rho) = \rho$; si l'on considère un tel ρ comme état initial, alors l'hypothèse (A) est vérifiée. On dira que le système considéré est invariant par renversement du temps (IRT) s'il existe deux unitaires $W_{\mathcal{H}}$ et $W_{\mathcal{K}}$ de \mathcal{H} et \mathcal{K} respectivement, tels que $[M, W_{\mathcal{K}}] = 0$ et $(W_{\mathcal{H}} \otimes W_{\mathcal{K}})U(W_{\mathcal{H}} \otimes W_{\mathcal{K}}) = U^*$. On peut alors montrer (voir [18]) que si le système est IRT, et que l'on choisit l'involution $\theta(i, j) = (j, i)$, alors l'hypothèse (B) est vérifiée et que si de plus Φ est irréductible, alors l'hypothèse (C) est vérifiée également. On peut ensuite montrer que $e(\alpha)$ est défini et infiniment dérivable sur \mathbb{R} , encore une fois suivant les mêmes techniques qu'en page 62, et que $e(\alpha)$ est égal au logarithme du rayon spectral de

$$\Phi^{(\alpha)} = \sum_{i,i' \in \text{sp } M} \left(\frac{\text{tr}(\Pi_i \xi)}{\text{tr}(\Pi_{i'} \xi)} \right)^\alpha \Phi_{i,i'}. \quad (31)$$

On reprendra cet exemple au chapitre 4, où l'on considèrera des mesures répétées similaires à cet exemple, mais avec des paramètres dépendant du temps.

3. MESURES RÉPÉTÉES D'UN SYSTÈME : LE SYSTÈME

On va maintenant s'intéresser au comportement de l'état aléatoire ρ_n après n mesures indirectes, quand le nombre de mesures n tend vers l'infini, et plus précisément à une éventuelle convergence. Remarquons dès maintenant que le cas des chaînes de Markov (qui est un cas particulier de la présente situation,

voir la remarque 3.4) indique que l'on ne peut espérer qu'une convergence en loi. Par ailleurs, lorsque le théorème 3.3 s'applique, une convergence en loi éventuelle de $(\rho_n)_n$ ne peut se faire que vers un état pur. On va donc s'intéresser au processus $(x_n)_n$ induit sur les états purs (au sens de la relation (4)) que nous allons voir comme points de la sphère projective. Introduisons pour cela un peu de notation : pour $x \in \mathcal{H}$, on note \hat{x} sa classe correspondante dans l'espace projectif \mathcal{PH} . Pour L un opérateur sur \mathcal{H} , on note si $Lx \neq 0$ par $L \cdot \hat{x}$ la classe \widehat{Lx} . On va généraliser le cadre de notre étude en supposant donnée une mesure μ sur $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ (qui n'est pas finie en général), munie de sa σ -algèbre borélienne, et l'on suppose que μ vérifie

$$\int L^* L \, d\mu(L) = \text{Id}_{\mathcal{H}}. \quad (32)$$

On pose alors

$$\Phi(\rho) = \int L \rho L^* \, d\mu(L). \quad (33)$$

L'application Φ est complètement positive et (32) implique qu'elle préserve la trace. Le cas considéré précédemment d'instruments parfaits $(\Phi_i)_{i \in V}$ avec V fini, où $\Phi_i(\eta) = L_i \eta L_i^*$ pour tout $i \in V$ correspond au cas où μ a support fini, et où μ est la mesure image par $i \mapsto L_i$ de la loi sur les résultats de mesure i (auquel cas (32) est simplement la condition $\sum L_i^* L_i = \text{Id}_{\mathcal{H}}$); on gardera à l'esprit cet exemple.

On pourrait alors définir un processus stochastique sur $\Omega = \mathcal{B}(\mathcal{H})^{\mathbb{N}}$ (muni d'une probabilité définie ci-dessous) vérifiant une relation similaire à (2) en posant

$$\rho_n(\omega) = \frac{L_n \dots L_1 \rho L_1^* \dots L_n^*}{\text{tr}(L_n \dots L_1 \rho L_1^* \dots L_n^*)}$$

si $\omega = (L_1, L_2, \dots)$, et ce processus aurait la propriété que ρ_n est pur pour tout n si ρ l'est. Nous allons nous placer dans une situation où ce processus $(\rho_n)_n$ serait presque-sûrement asymptotiquement pur, et travaillons donc directement avec des états purs, représentés comme éléments de l'espace projectif \mathcal{PH} .

Définissons l'hypothèse analogue à celle du théorème 3.3 (on rappelle que $X \propto Y$ signifie que X et Y sont proportionnels, i.e. $X = cY$ ou $cX = Y$):

(Pur) Tout projecteur orthogonal π tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\pi L_1^* \dots L_n^* L_n \dots L_1 \pi \propto \pi$ pour $\mu^{\otimes n}$ -presque tout (L_1, \dots, L_n) , est de rang 0 ou 1.

Remarque 3.37. Quand $\dim \mathcal{H} = 2$, l'hypothèse **(Pur)** équivaut à dire que μ n'est pas à support dans les unitaires. En dimension supérieure, cette hypothèse essentielle est difficile à vérifier, même lorsque μ est une mesure à support fini. La remarque 3.42 montrera que ce n'est pas étonnant.

Nous allons considérer la chaîne de Markov $(\hat{x}_n)_n$ sur \mathcal{PH} associée à la matrice de transition

$$\Pi(\hat{x}, S) = \int_{\mathcal{B}(\mathcal{H})} \mathbf{1}_S(L \cdot \hat{x}) \|Lx\|^2 \, d\mu(L) \quad (34)$$

(où x est un représentant arbitraire de \hat{x}). Une première étape naturelle dans l'analyse du comportement asymptotique de la loi de \hat{x}_n est d'étudier le ou les probabilité(s) invariante(s) de Π . Remarquons que, \mathcal{PH} étant compact et le noyau Π étant Feller, le théorème de Markov-Kakutani montre qu'il existe au moins une probabilité invariante. Nous allons montrer que si l'hypothèse **(Pur)** est vraie et que Φ est irréductible, alors cette probabilité invariante est unique. Nous montrerons ensuite la convergence de $(\hat{x}_n)_n$ vers cette probabilité invariante, qui aura lieu à vitesse exponentielle pour la distance de Wasserstein d'ordre 1.

Remarque 3.38. Notre chaîne de Markov s'écrit sous la forme $L_n \dots L_1 \cdot \hat{x}_0$, où les opérateurs L_i sont aléatoires. Notre étude entre donc dans le cadre général des produits aléatoires de matrices. De tels produits ont été largement étudiés dans le cas où les L_i sont inversibles, indépendants et identiquement distribués, voir [26, 63, 72, 92]. L'article [71] s'intéresse cependant au cas où le choix de L_{n+1} conditionnellement à x_n se fait avec une probabilité proportionnelle à $\|L_{n+1}x_n\|^s$; notre noyau de transition (34) correspond donc au cas $s = 2$. Nous comparons nos hypothèses à celles de [71] dans la remarque 3.42 ci-dessous.

Pour énoncer notre théorème, définissons une métrique sur \mathcal{PH} par

$$\text{dist}(\hat{x}, \hat{y}) = \left(1 - \left| \frac{\langle x, y \rangle}{\|x\| \|y\|} \right|^2 \right)^{\frac{1}{2}}, \quad (35)$$

où x et y sont des représentants de module 1 de \hat{x} , \hat{y} . La distance de Wasserstein d'ordre 1 entre deux probabilités sur \mathcal{PH} peut alors être définie grâce à la dualité de Kantorovich–Rubinstein par

$$W_1(\sigma, \tau) = \sup_{f \in \text{Lip}_1(\mathcal{PH})} \left| \int_X f d\sigma - \int_X f d\tau \right|,$$

où $\text{Lip}_1(\mathcal{PH}) = \{f : \mathcal{PH} \rightarrow \mathbb{R} \text{ telle que } |f(x) - f(y)| \leq \text{dist}(x, y)\}$ est l'ensemble des fonctions lipschitziennes de constante égale à 1. Le résultat principal de [P24] est le suivant :

THÉORÈME 3.39 ([P24]). *Supposons que μ vérifie l'hypothèse (Pur) et que Φ admet un unique état invariant. Alors Π admet une unique probabilité invariante ν_{inv} et il existe $m \in \{1, \dots, \dim \mathcal{H}\}$, $C > 0$ et $0 < \lambda < 1$ tels que pour toute mesure de probabilité ν sur $(\mathcal{PH}, \mathcal{B})$,*

$$W_1\left(\frac{1}{m} \sum_{r=0}^{m-1} \nu \Pi^{mn+r}, \nu_{\text{inv}}\right) \leq C \lambda^n. \quad (36)$$

Remarque 3.40. La convergence en distance W_1 est équivalente à la convergence en loi par compacité de \mathcal{PH} . On ne peut en revanche pas obtenir en général de convergence en variation totale : supposons par exemple que μ est à support fini dans l'ensemble des opérateurs inversibles. Alors si ν_a est une mesure atomique et ν_b une mesure diffuse, la variation totale $\|\nu_a \Pi^n - \nu_b \Pi^n\|_{\text{VT}}$ vaut 1 pour tout n ; on ne peut donc avoir $\|\nu_a \Pi^n - \nu_{\text{inv}}\|_{\text{VT}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ et $\|\nu_b \Pi^n - \nu_{\text{inv}}\|_{\text{VT}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$.

Remarque 3.41. L'hypothèse “ Φ admet un unique état invariant” est vérifiée en particulier si Φ est irréductible, et une variation sur les résultats de l'annexe A montre qu'elle est vraie si et seulement si il existe un unique projecteur π minimal non nul tel que $\Phi(\pi \mathcal{I}_1(\mathcal{H}) \pi) \subset \pi \mathcal{I}_1(\mathcal{H}) \pi$, ou encore qu'il existe un unique sous espace minimal E de \mathcal{H} tel que $LE \subset E$ pour tout $L \in \text{supp } \mu$. C'est donc une hypothèse de nature algébrique qui porte sur Φ , ce qui est différent d'une éventuelle irréductibilité de $(\hat{x}_n)_n$ comme chaîne de Markov sur \mathcal{PH} . De la même manière, le coefficient m ci-dessus est la période de Φ (ou plutôt de sa restriction à $\pi \mathcal{I}_1(\mathcal{H}) \pi$ ci-dessus) au sens rappelé dans l'annexe A. Les définitions usuelles de la période d'une chaîne de Markov ne s'appliquent pas, à notre connaissance, à $(\hat{x}_n)_n$ qui n'est en général pas φ -irréductible (voir [100]).

Remarque 3.42. L'article [71] prouve l'existence d'un trou spectral pour le noyau de transition (34), qui implique l'unicité de la probabilité invariante et la convergence exponentielle en distance W_1 (avec $m = 1$, voir ci-dessous) sans supposer (32) mais sous les hypothèses suivantes :

- μ est à support dans l'ensemble des opérateurs inversibles,
- $\text{supp } \mu$ est fortement irréductible, au sens où il n'existe aucune union finie non triviale de sous-espaces de \mathcal{H} qui soit globalement stable par tous les $L \in \text{supp } \mu$,

- le sous-groupe fermé T_μ engendré par $\text{supp } \mu$ est contractif, au sens où il existe une suite $(a_n)_n$ dans T_μ telle que $a_n/\|a_n\|$ converge vers un opérateur de rang un.

Il est immédiat que la forte irréductibilité de la chaîne implique que Φ est irréductible de période $m = 1$. Il est un peu moins immédiat (voir l'annexe A de [P24]) que, si l'on suppose que μ est à support dans les inversibles et la forte irréductibilité, alors la contractivité est équivalente à **(Pur)**. Hormis l'hypothèse l'hypothèse (32), très spécifique mais motivée par notre modèle de mesures indirectes, les hypothèses du théorème 3.39 sont donc plus faibles que celles nécessaires à une application de [71].

Remarque 3.43. Si l'on ne suppose que l'unicité de l'état invariant et pas **(Pur)**, on peut avoir une unique probabilité Π -invariante comme on peut en avoir une infinité : voir l'annexe C de [P24] pour des exemples.

Remarque 3.44. Si l'on ne suppose que **(Pur)** et pas l'unicité de l'état invariant, l'ensemble des probabilités invariantes de Π est un simplexe, dont les points extrémaux sont les probabilités invariantes associées à des composantes irréductibles de Φ . Ceci est montré dans l'annexe B de [P24], et utilise les décompositions de canaux développées dans [P14]. On peut de même montrer une convergence du type (36) vers une mesure invariante ν_{inv} , mais qui dépend alors de la distribution initiale de \hat{x}_0 .

Remarque 3.45. Nous ne savons absolument rien des propriétés de la probabilité invariante ν_{inv} .

Pour prouver le théorème 3.39, nous considérons de manière jointe l'état pur, élément de \mathcal{PH} , et les "résultats de mesure" représentés ici par $\Omega = \mathcal{B}(\mathcal{H})^{\otimes \mathbb{N}}$. On munit \mathcal{PH} de sa σ -algèbre borélienne \mathcal{B} et Ω de la σ -algèbre cylindrique \mathcal{C} (on notera \mathcal{C}_n la σ -algèbre des événements dépendant des n premières coordonnées). Un élément ω de Ω s'écrit (v_1, v_2, \dots) ; on notera L_1, L_2, \dots les applications coordonnées et $K_n := L_n \dots L_1$. On identifiera les fonctions \mathcal{C} -mesurables (comme L_n ou K_n) à des fonctions $\mathcal{B} \otimes \mathcal{C}$ -mesurables ne dépendant pas de la variable \hat{x} . Pour ν une probabilité sur \mathcal{PH} , on définit une mesure \mathbb{Q}^ν sur $(\mathcal{PH}, \mathcal{B})$ par

$$\mathbb{Q}^\nu(S \times O_n) := \int_{S \times O_n} \|K_n(\omega)x\|^2 d\nu(\hat{x}) d\mu^{\otimes n}(\omega) \quad (37)$$

pour tous $S \in \mathcal{B}$ et tout $C \in \mathcal{C}_n$. Encore une fois, la propriété (32) assure que (37) définit une probabilité sur $\mathcal{PH} \times \Omega$. De plus, la marginale de \mathbb{Q}^ν sur \mathcal{B} est par construction ν . Nous allons exprimer la marginale de \mathbb{Q}^ν sur \mathcal{C} ; pour cela définissons

$$\rho_\nu = \mathbb{E}^\nu(|\hat{x}\rangle\langle\hat{x}|)$$

où $|\hat{x}\rangle\langle\hat{x}|$ est $|x\rangle\langle x|$ pour n'importe quel représentant x de \hat{x} , et \mathbb{E}^ν est l'espérance par rapport à \mathbb{Q}^ν . Définissons pour $\rho \in \mathcal{S}(\mathcal{H})$ une probabilité sur Ω (analogue à \mathbb{P}_ρ de (3.1)) en posant pour tout $O_n \in \mathcal{C}_n$

$$\mathbb{P}_\rho(O_n) := \int_{O_n} \text{tr}(K_n(\omega)\rho K_n^*(\omega)) d\mu^{\otimes n}(\omega). \quad (38)$$

Alors en particulier, pour tous $S \in \mathcal{B}$ et $A \in \mathcal{C}$,

$$\mathbb{Q}^\nu(S \times A) = \int_S \mathbb{P}_{|\hat{x}\rangle\langle\hat{x}|}(A) d\nu(\hat{x}). \quad (39)$$

Comme par ailleurs on voit facilement que $\Phi(\rho_\nu) = \rho_{\nu\Pi}$, on obtient le résultat suivant :

PROPOSITION 3.46 ([P24]). \mathbb{P}_{ρ_ν} est la marginale de \mathbb{Q}^ν sur \mathcal{C} , et si ν est Π -invariante alors ρ_ν est un état invariant de Φ .

En particulier, si Φ admet un unique état invariant ρ_{inv} , alors pour toute ν invariante par Π , la marginale sur \mathcal{C} de \mathbb{Q}^ν est $\mathbb{P}_{\rho_{\text{inv}}}$.

Un élément crucial de la suite de notre preuve est l'introduction d'une martingale bien choisie. Cette martingale est donnée par

$$M_n := \frac{K_n^* K_n}{\text{tr}(K_n^* K_n)} \quad (40)$$

qui définit M_n au sens \mathbb{Q}^ν -presque sûr, pour tout ν . En effet, si l'on note \mathbb{P}_{ch} la probabilité \mathbb{P}_ρ pour $\rho = \frac{1}{\dim \mathcal{H}} \text{Id}$, on voit immédiatement que $\mathbb{P}_{\text{ch}}(\text{tr}(K_n^* K_n) = 0) = 0$. Or, d'une part tout $\rho \in \mathcal{S}(\mathcal{H})$ étant dominé par $\|\rho\| \text{Id}$, la probabilité \mathbb{P}_ρ est absolument continue par rapport à \mathbb{P}_{ch} ; d'autre part K_n étant \mathcal{C}_n -mesurable, on a $\mathbb{Q}^\nu(\text{tr}(K_n^* K_n) = 0) = \mathbb{P}_{\rho_\nu}(\text{tr}(K_n^* K_n) = 0) = 0$.

On peut alors montrer la propriété suivante pour $(M_n)_n$:

PROPOSITION 3.47 ([P24]). *Pour toute probabilité ν sur $(\mathcal{PH}, \mathcal{B})$, le processus (M_n) converge \mathbb{Q}^ν -p.s. et L^1 vers une variable aléatoire \mathcal{C} -mesurable M_∞ , et on a pour tout $\rho \in \mathcal{S}(\mathcal{H})$*

$$\frac{d\mathbb{P}_\rho}{d\mathbb{P}_{\text{ch}}} = \dim \mathcal{H} \times \text{tr}(\rho M_\infty). \quad (41)$$

De plus, la mesure μ vérifie **(Pur)** si et seulement si pour toute probabilité ν , la limite M_∞ est \mathbb{Q}^ν -presque-sûrement une projection de rang 1.

La preuve consiste à montrer que $(M_n)_n$ est une \mathbb{P}_{ch} -martingale; puisque c'est un processus d'opérateurs bornés sur \mathcal{H} de dimension finie, il converge \mathbb{P}_{ch} -p.s. et par conséquent \mathbb{Q}^ν -p.s. pour tout ν . L'équivalence entre **(Pur)** et le fait que M_∞ soit \mathbb{Q}^ν -p.s. de rang 1 est un peu plus technique et nous renvoyons le lecteur à [P24].

On peut à présent construire un processus $(\mathcal{C}_n)_n$ -adapté qui approche $(\hat{x}_n)_n$. En effet, K_n admet une décomposition polaire $K_n = U_n D_n$ où $D_n = (\text{tr}(K_n^* K_n))^{1/2} M_n^{1/2}$. Comme $\text{tr}(K_n^* K_n)$ est \mathbb{Q}^ν -p.s. non nul, on a $\hat{x}_n = (U_n M_n^{1/2}) \cdot \hat{x}_0$. Si **(Pur)** est vérifiée, alors $M_n^{1/2}$ converge \mathbb{Q}^ν -p.s. vers un projecteur aléatoire $|\hat{z}\langle \hat{z}|$. Or les relations (39) et (41) impliquent

$$\frac{d\mathbb{Q}^\nu}{d\nu \otimes d\mathbb{P}_{\text{ch}}} = \dim \mathcal{H} \times |\langle x_0, z \rangle|^2$$

et par conséquent $\mathbb{Q}^\nu(\langle x_0, z \rangle = 0) = 0$. On a donc $\lim_{n \rightarrow \infty} \text{dist}(\hat{x}_n, U_n \cdot \hat{z}) = 0$. Ceci suffit alors à montrer l'unicité de la mesure invariante : en effet, $U_n \cdot \hat{z}$ étant \mathcal{C} -mesurable, sa loi est uniquement déterminée par le fait que \hat{x}_0 suive une loi Π -invariante. Dans le même temps $U_n \cdot \hat{z}$ approche \hat{x}_n qui a la même loi que \hat{x}_0 . Par conséquent il ne peut exister qu'une loi Π -invariante.

On sait maintenant qu'il existe une unique probabilité invariante ν_{inv} . Prouvons maintenant la décroissance exponentielle (36). Une première étape utilise la structure du canal quantique Φ telle que décrite dans l'annexe A : celle-ci nous dit qu'il existe $m \in \mathbb{N}^*$ (la période de Φ) telle que le spectre périphérique de Φ est l'ensemble des racines m -ième de l'unité. Ceci implique immédiatement que pour tout état η , on a

$$\left\| \frac{1}{m} \sum_{r=0}^{m-1} \Phi^{mn+r}(\eta) - \rho_{\text{inv}} \right\| \leq C \lambda^n \quad (42)$$

où λ est le module de la plus grande valeur propre non périphérique. Introduisons maintenant le décalage à gauche τ sur Ω ; on voit immédiatement que pour toute fonction \mathcal{C} -mesurable f ,

$$\mathbb{E}_\rho(f \circ \tau) = \mathbb{E}_{\Phi(\rho)}(f).$$

On peut en déduire (c'est la proposition 3.4 de [P24]) que pour toute probabilité ν sur \mathcal{PH} et toute fonction \mathcal{C} -mesurable et essentiellement bornée f ,

$$\left| \mathbb{E}^\nu \left(\frac{1}{m} \sum_{r=0}^{m-1} f \circ \tau^{mn+r} \right) - \mathbb{E}_{\rho_{\text{inv}}}(f) \right| \leq C \|f\|_\infty \lambda^n \quad (43)$$

pour C et λ qui ne dépendent que de Φ .

Une deuxième étape introduit les processus

$$\hat{z}_n(\omega) = \operatorname{argmax}_{\hat{x} \in \mathcal{PH}} \|K_n x\|^2$$

et

$$\hat{y}_n = K_n \cdot \hat{z}_n.$$

Une autre manière de définir \hat{y}_n est comme la classe d'équivalence du vecteur de norme maximale dans l'image de la sphère unité par K_n . On va montrer que \hat{y}_n approche \hat{x}_n à vitesse exponentielle, l'intuition étant que par définition la loi de K_n favorise les valeurs qui rendent $K_n x_0$ grand. Nous allons pour cela utiliser le produit alterné de vecteurs et d'opérateurs, dont nous rappelons seulement deux propriétés utiles : d'une part, si A est un opérateur sur \mathcal{H} alors l'opérateur $\wedge^2 A$ sur $\mathcal{H} \wedge \mathcal{H}$ défini par $(\wedge^2 A) : x \wedge y \mapsto Ax \wedge Ay$ a pour norme le produit des deux plus grandes valeurs singulières de A , i.e. des deux plus grandes valeurs propres (comptées avec multiplicité) de $(A^* A)^{1/2}$. D'autre part, la distance (35) vérifie $\operatorname{dist}(\hat{x}, \hat{y}) = \frac{\|x \wedge y\|}{\|x\| \|y\|}$ (nous renvoyons le lecteur au chapitre XVI de [96] pour plus de détails sur les produits alternés).

En exploitant le fait que $\|K_n z_n\| = \|K_n\|$, on peut alors montrer que

$$\mathbb{E}^\nu (\operatorname{dist}(\hat{x}_n, \hat{y}_n)) \leq \int_{M_k(\mathbb{C})^n} \|\wedge^2 (L_n \dots L_1)\| d\mu^{\otimes n}(L_1, \dots, L_n).$$

Notons $f(n)$ le majorant; il peut s'écrire $\dim \mathcal{H} \times \mathbb{E}_{\text{ch}} \left(\frac{\wedge^2 K_n}{\operatorname{tr}(K_n^* K_n)} \right)$, et l'intégrande dans cette dernière espérance est proportionnelle aux deux plus grandes valeurs propres de $M_n^{1/2}$, donc tend vers zéro \mathbb{P}_{ch} -p.s. tout en restant borné, donc $f(n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$. Par ailleurs, on montre facilement que $f(n)$ est sous-multiplicatif; par le lemme de Fekete on obtient $f(n) \leq \lambda^n$ pour un certain $\lambda \in]0, 1[$. On a donc montré que $\mathbb{E}^\nu (\operatorname{dist}(\hat{x}_n, \hat{y}_n)) \leq \lambda^n$; par la propriété de Markov de $(\hat{x}_n)_n$ on a alors pour tout $\ell \in \mathbb{N}$

$$\mathbb{E}^\nu (\operatorname{dist}(\hat{x}_{n+\ell}, \hat{y}_n \circ \tau^\ell)) \leq \lambda^n. \quad (44)$$

On peut maintenant conclure la preuve du théorème 3.39 : soit donc $f \in \text{Lip}_1(\mathcal{PH})$. Nous allons approcher \hat{x}_{mn+r} par $\hat{y}_{mp} \circ \theta^{mq+r}$ où $p = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ et $q = \lceil \frac{n}{2} \rceil$, de sorte que $p + q = n$. Alors

$$\begin{aligned} & \left| \mathbb{E}^\nu \left(\frac{1}{m} \sum_{r=0}^{m-1} f(\hat{x}_{mn+r}) \right) - \mathbb{E}_{\nu_{\text{inv}}} (f(\hat{x}_0)) \right| \\ & \leq \frac{1}{m} \sum_{r=0}^{m-1} \left| \mathbb{E}^\nu (f(\hat{x}_{m(p+q)+r})) - \mathbb{E}^\nu (f(\hat{y}_{mp} \circ \theta^{mq+r})) \right| \\ & \quad + \frac{1}{m} \sum_{r=0}^{m-1} \left| \mathbb{E}_{\nu_{\text{inv}}} (f(\hat{y}_{mp} \circ \theta^{mq+r})) - \mathbb{E}_{\nu_{\text{inv}}} (f(\hat{x}_{m(p+q)+r})) \right| \\ & \quad + \left| \frac{1}{m} \sum_{r=0}^{m-1} \mathbb{E}^\nu (f(\hat{y}_{mp} \circ \theta^{mq+r})) - \mathbb{E}_{\nu_{\text{inv}}} (f(\hat{y}_{mp})) \right|. \end{aligned}$$

On peut borner les deux premiers termes du majorant en utilisant (44) et le fait que f est 1-Lipschitz. Comme la quantité à majorer est invariante par translation de f , on peut supposer $\|f\|_\infty \leq 1$; le dernier terme se majore alors par (43). On obtient en fin de compte

$$\left| \mathbb{E}^\nu \left(\frac{1}{m} \sum_{r=0}^{m-1} f(\hat{x}_{mn+r}) \right) - \mathbb{E}_{\nu_{\text{inv}}} (f(\hat{x}_0)) \right| \leq 3C\lambda^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}, \quad (45)$$

ce qui prouve le théorème 3.39.

Remarque 3.48. Le λ de l'inégalité (45) est le plus grand des deux λ précédemment apparus, celui de (43) et celui de (44). Le premier est la plus grande valeur propre non périphérique de Φ , donc est accessible. Le deuxième en revanche provient d'une application du lemme de Fekete, donc est en général inconnu. On ne sait par conséquent pas expliciter le λ du théorème 3.39.

Remarque 3.49. Les résultats de [P24] permettent de donner une extension du théorème ergodique de Kümmerer–Maassen (théorème 3.2) à des fonctionnelles non linéaires de ρ_n ; ceci sera fait dans une prochaine publication.

4. MARCHES QUANTIQUES OUVERTES À TEMPS CONTINU

On décrit ici les résultats de [P25] qui s'intéresse à un analogue des théorèmes 3.21 et 3.23 pour des marches quantiques ouvertes à temps continu. La définition des MQO à temps continu est due à Pellegrini dans [107]. Le paramètre d'espace y est encore contraint à un ensemble discret V (contrairement au cas du "mouvement brownien ouvert" de Bauer, Bernard et Tilloy dans [16]) : les MQO à temps continu sont aux MQO dont nous avons parlé en section 1 ce que les chaînes de Markov à temps continu sont aux chaînes de Markov à temps discret (voir cependant la remarque 3.51). Ces MQO à temps continu sont des processus de mesure en continu, mais sont des processus à saut, ce qui simplifie grandement leur construction par rapport au cas plus général considéré en section 5 puisque l'on peut utiliser les processus de comptage introduits par Davies dans [41].

On considère donc encore un ensemble discret V , un espace de Hilbert de la forme $\mathcal{H} = \bigoplus_{i \in V} \mathfrak{h}_i$, et des opérateurs $L_{i,j}$ de \mathfrak{h}_j dans \mathfrak{h}_i pour tous i, j de V , ainsi que des opérateurs autoadjoints H_i de \mathfrak{h}_i pour tout $i \in V$. On définit pour tout $t \in \mathbb{R}_+$ l'ensemble

$$\Xi_t^{(n)} = \{ \xi = (i_0, \dots, i_n; t_1, \dots, t_n) \in V^{n+1} \times \mathbb{R}^n \text{ avec } t_1 < \dots < t_n \}$$

muni de l'algèbre borélienne et de la mesure produit obtenue à partir du comptage sur V^{n+1} et de la mesure de Lebesgue sur le n -simplexe (normalisée de sorte que le volume des $(t_1 < \dots < t_n)$ avec $t_n < t$ est $t^n/n!$). On étend ceci en une mesure finie ν_t sur $\Xi_t = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \Xi_t^{(n)}$. On pose alors pour tout élément $\xi = (i_0, \dots, i_n; t_1, \dots, t_n)$ de $\bigcup_{t \in \mathbb{R}_+} \Xi_t$:

$$T_t(\xi) := e^{(t-t_k)G_{i_k}} L_{i_k, i_{k-1}} e^{(t_k-t_{k-1})G_{i_{k-1}}} \dots e^{(t_2-t_1)G_{i_1}} L_{i_1, i_0} e^{t_1 G_{i_0}}. \quad (46)$$

si k est le plus grand indice tel que $t_k \leq t$, avec $G_i = -iH_i - \frac{1}{2} \sum_{j \in V} L_{j,i}^* L_{j,i}$. Ce $T_t(\xi)$ est un opérateur de \mathfrak{h}_{i_0} dans \mathfrak{h}_{i_k} , et

$$\int_{\Xi_t} T_t(\xi) \rho T_t(\xi)^* d\nu_t(\xi) = e^{t\mathcal{L}}(\rho) \quad (47)$$

où

$$\mathcal{L}(\rho) = -i[H, \rho] + \sum_{i,j} (M_{i,j} \rho M_{i,j}^* - \frac{1}{2} M_{i,j}^* M_{i,j} \rho - \frac{1}{2} \rho M_{i,j}^* M_{i,j}), \quad (48)$$

avec $H = \sum_i H_i \otimes |i\rangle\langle i|$ et $M_{i,j} = L_{i,j} \otimes |i\rangle\langle j|$, est un générateur de semigroupe dynamique quantique (donné sous sa forme de Lindblad, voir [95]). La relation (47) est donc l'analogie de (3).

On définit alors pour tout état $\rho = \sum_{i \in V} \rho(i) \otimes |i\rangle\langle i|$ une probabilité sur $\Xi := \bigcup_{t \in \mathbb{R}_+} \Xi_t$ par

$$\mathbb{P}_\rho(E) = \int_E \text{tr}(T_t(\xi) \rho T_t(\xi)^*) d\nu_t(\xi)$$

si $E \in \Xi_t$. Le fait que $e^{t\mathcal{L}}$ préserve la trace assure que la famille ainsi définie est cohérente, et on peut l'étendre à Ξ .

Remarque 3.50. Une évolution de générateur (48) est typiquement obtenue par limite de couplage faible à partir d'un modèle hamiltonien (voir [43]). L'article [48] établit un lien rigoureux entre des probabilités comme \mathbb{P}_ρ ci-dessus, et les statistiques de mesures à deux temps sur ce modèle hamiltonien.

On définit alors deux processus aléatoires $(x_t)_t$ et $(\varrho_t)_t$ sur l'espace probabilisé (Ξ, \mathbb{P}_ρ) en posant pour $\xi = (i_0, \dots, i_n; t_1, \dots, t_n)$

$$x_t(\xi) = \begin{cases} i_k & \text{si } t_k \leq t < t_{k+1} \\ i_n & \text{si } t_n \leq t \end{cases} \quad \varrho_t(\xi) = \frac{T_t(\xi) \rho T_t(\xi)^*}{\text{tr}(T_t(\xi) \rho T_t(\xi)^*)}.$$

Ces processus définissent alors la marche quantique ouverte à temps continu.

On peut montrer que $\rho_t = \varrho_t \otimes |x_t\rangle\langle x_t|$ vérifie l'équation différentielle stochastique

$$d\rho_t = \mathcal{M}(\rho_{t-}) dt + \sum_{i,j} \left(\frac{M_{i,j} \rho_{t-} M_{i,j}^*}{\text{tr}(M_{i,j} \rho_{t-} M_{i,j}^*)} - \rho_{t-} \right) dN_t^{i,j} \quad (49)$$

où

$$\mathcal{M}(\rho) = \mathcal{L}(\rho) - \sum_{i,j} (M_{i,j} \rho M_{i,j}^* - \rho \text{tr}(M_{i,j} \rho M_{i,j}^*))$$

et $N_t^{i,j}$ est le processus

$$N_t^{i,j}(i_0, \dots, i_n; t_1, \dots, t_n) = \text{card} \{k = 1, \dots, n \text{ tel que } t_k \leq t \text{ et } (i_{k-1}, i_k) = (i, j)\},$$

dont on peut prouver (voir [13]) qu'il a la même loi que le processus

$$\int_0^t \int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_{0 < y < \text{tr}(M_{i,j} \rho_{s-} M_{i,j}^*)} \tilde{N}^{i,j}(dy, ds)$$

si $\tilde{N}^{i,j}$ est un processus de Poisson homogène sur \mathbb{R}^2 . Ceci montre que l'on peut comprendre la description trajectorielle ci-dessus de la manière suivante : si la "particule" est initialement observée en i_0 , alors

elle évolue suivant $\varrho \rightsquigarrow \frac{e^{tG_{i_0}} \varrho e^{tG_{i_0}^*}}{\text{tr}(e^{tG_{i_0}} \varrho e^{tG_{i_0}^*})}$ tant qu'elle reste au point i_0 ; elle sautera au point i_1 après un

temps "exponentiel" d'intensité $\text{tr}(L_{i_1, i_0} \rho_{s-}(i_0) L_{i_1, i_0}^*)$ (cette intensité dépend donc de l'évolution du degré de liberté interne), et son état interne subira alors la transformation $\varrho \rightsquigarrow \frac{L_{i,j} \varrho L_{i,j}^*}{\text{tr}(L_{i,j} \varrho L_{i,j}^*)}$. Un élément $\xi \in \Xi$ représente une trajectoire possible de la particule, les temps t_k indiquant les temps de saut et le i_k correspondant indiquant la destination du saut. On renvoie le lecteur à la section 1 de [P25] pour des précisions techniques.

Remarque 3.51. À cause des degrés de liberté interne, une MQO à temps continu arrêtée à la suite de ses temps de saut n'est pas une MQO à temps discret. Le passage du temps discret au temps continu est donc plus délicat pour les MQO que pour les chaînes de Markov.

Cette dernière remarque oblige, pour obtenir des analogues des théorèmes 3.21 et 3.23, à reprendre les démonstrations. Une fois le formalisme mis en place, les preuves se traduisent cependant facilement, l'effet $\varrho \rightsquigarrow L_\pi \varrho L_\pi^*$ d'une trajectoire π (voir (9)) étant remplacé par l'effet $\varrho \rightsquigarrow T_t(\xi) \varrho T_t(\xi)^*$ d'une trajectoire ξ . Les techniques de concaténation de trajectoires peuvent être adaptées et on obtient des analogues exacts des théorèmes 3.21 et 3.23, pour les temps de retour T_i et les temps d'occupation N_i , définis par

$$\tau_i = \inf\{t \geq T_1 | X_t = i\} \quad N_i = \int_0^\infty \mathbb{1}_{x_t=i} dt$$

(où T_1 est le premier temps de saut) qu'il ne semble pas utile d'énoncer ici.

5. MESURES INVARIANTES POUR LES ÉQUATIONS DE SCHRÖDINGER STOCHASTIQUES

Cette section décrit les résultats de l'article [P27], qui étend ceux de [P24] en temps continu. Ici, on souhaite considérer des trajectoires quantiques faisant intervenir à la fois des termes diffusifs et des termes de saut. La construction du modèle sera plus compliquée que dans le cas des MQO continues; en revanche, ici aussi, les preuves à temps discret s'étendront facilement au cas du temps continu.

On considère ici aussi un espace de Hilbert \mathcal{H} de dimension finie, et on suppose qu'on a H un hamiltonien, et des opérateurs $L_i, i \in V$. Supposons que notre ensemble V d'indices est fini et partitionné en $V = V_b \cup V_p$, et considérons $(\Omega, (\mathcal{F}_t)_t, \mathbb{P})$ un espace filtré satisfaisant aux conditions standard, sur lequel sont définis des mouvements browniens W_i pour $i \in V_b$, et des processus de Poisson standard N_j pour $j \in V_p$, tels que la famille $(W_i, N_j; i \in V_b, j \in V_p)$ est indépendante. On définit un processus $(S_t)_t$ par

$$dS_t = \left(K + \frac{\#V_p}{2} \text{Id}\right) S_{t-} dt + \sum_{i \in V_b} L_i S_{t-} dW_i(t) + \sum_{j \in V_p} (L_j - \text{Id}) S_{t-} dN_j(t), \quad (50)$$

avec $S_0 = \text{Id}$ (ci-dessus $\#V_p$ est le cardinal de V_p), où $K = -iH - \frac{1}{2}(\sum_{i \in V_b} L_i^* L_i + \sum_{j \in V_p} L_j^* L_j)$. Les coefficients étant lipschitziens, cette équation admet une unique solution forte. Soit maintenant $\rho \in \mathcal{S}_k$; on obtient facilement par le calcul d'Itô que

$$\mathbb{E}(S_t \rho S_t^*) = e^{t\mathcal{L}}(\rho)$$

où

$$\mathcal{L}(\rho) = -i[H, \rho] + \sum_{i \in V_b \cup V_p} L_i \rho L_i^* - \frac{1}{2} L_i^* L_i \rho - \frac{1}{2} \rho L_i^* L_i. \quad (51)$$

On pose alors

$$Z_{\rho,t} = \text{tr}(S_t^* S_t \rho)$$

et

$$\rho_t = \frac{S_t \rho S_t^*}{\text{tr}(S_t \rho S_t^*)}$$

si $Z_{\rho,t} \neq 0$ (on aura ci-dessous comme en section 3, que cette condition sera presque sûrement vérifiée). On peut alors montrer que $(Z_{\rho,t})_t$ est une martingale pour \mathbb{P} , et définir une nouvelle mesure de probabilité \mathbb{P}_ρ par

$$d\mathbb{P}_\rho|_{\mathcal{F}_t} = Z_{\rho,t} d\mathbb{P}|_{\mathcal{F}_t}.$$

Une application du théorème de Girsanov nous dit alors que si l'on pose

$$B_i^\rho(t) = W_i(t) - \int_0^t \text{tr}((L_i + L_i^*)\rho_{s-}) ds,$$

alors sous \mathbb{P}_ρ , les B_i^ρ , $i \in I_b$, sont des processus de Wiener indépendants, et chaque N_j est un processus ponctuel d'intensité $t \mapsto \text{tr}(C_j^* C_j \rho_{t-})$. De plus, $(\rho_t)_t$ vérifie

$$\begin{aligned} d\rho_t &= \mathcal{L}(\rho_{t-}) dt \\ &+ \sum_{i=0}^{\infty} \left(L_i \rho_{t-} + \rho_{t-} L_i^* - \text{tr}(\rho_{t-} (L_i + L_i^*)) \rho_{t-} \right) dB_i^\rho(t) \\ &+ \sum_{j=0}^{\infty} \left(\frac{L_j \rho_{t-} L_j^*}{\text{tr}(L_j \rho_{t-} L_j^*)} - \rho_{t-} \right) \left(dN_j(t) - \text{tr}(L_j \rho_{t-} L_j^*) dt \right). \end{aligned} \quad (52)$$

On a de plus

$$\mathbb{E}_\rho(\rho_t) = e^{t\mathcal{L}}(\rho).$$

Comme dans le cas discret, si ρ_0 est un état pur, i.e. de la forme $\rho_0 = |x_0\rangle\langle x_0|$, alors pour tout t , $\rho_t = |\hat{x}_t\rangle\langle \hat{x}_t|$, avec $x_t = \frac{S_t x_0}{\|S_t x_0\|}$.

Remarque 3.52. Cette propriété, conjuguée à la relation (3), est à la base de la technique de Monte-Carlo par fonctions d'onde, voir [40].

Une version à temps continu du théorème 3.3 (qui se trouve par exemple dans [88]) montre encore une fois qu'une mesure invariante pour ρ_t sera portée par les états purs, et on s'intéresse donc au processus $(\hat{x}_t)_t$ sur \mathcal{PH} . On peut alors donner un énoncé similaire à celui du théorème 3.39. Pour cela, il faut adapter la condition (**Pur**). Une traduction directe de cette condition serait que tout projecteur orthogonal π tel que $\pi S_t^* S_t \pi \propto \pi$ \mathbb{P} -presque sûrement pour tout $t \geq 0$ est de rang 0 ou 1. Cependant, cette condition est difficile à vérifier en pratique. On la remplace donc par la condition suffisante suivante :

(cPur) Tout projecteur orthogonal π tel que pour tout $i \in V_b$, $\pi(L_i + L_i^*)\pi \propto \pi$ et pour tout $j \in V_p$, $\pi L_j^* L_j \pi \propto \pi$, est de rang 0 ou 1.

On a alors le résultat suivant :

THÉORÈME 3.53 ([P27]). *Supposons que la famille $(L_i)_{i \in V_b \cup V_p}$ vérifie l'hypothèse **(cPur)** et que 0 soit valeur propre simple de \mathcal{L} définie par (51). Alors la chaîne $(\hat{x}_t)_t$ admet une unique probabilité invariante ν_{inv} et il existe $C > 0$ et $\tau > 0$ tels que pour toute distribution initiale ν , la distribution ν_t de \hat{x}_t vérifie*

$$W_1(\nu_t, \nu_{\text{inv}}) \leq C e^{-\tau t}.$$

La preuve est essentiellement identique à celle du théorème 3.39, exploitant le fait que le processus

$$M_t = \frac{S_t^* S_t}{\text{tr}(S_t^* S_t)}$$

est une martingale sous \mathbb{P}_{ch} .

Remarque 3.54. L'article [14] de Barchielli et Paganoni avait déjà montré que la condition **(cPur)** impliquait la purification de $(\rho_t)_t$. Le même article donnait des conditions suffisantes pour l'unicité de la mesure invariante dans le cas diffusif (i.e. quand les équations (50) ou (52) ne comportent pas de termes de saut), mais ces conditions étaient difficiles à vérifier et n'étaient donc pas satisfaisantes.

CHAPITRE 4

DÉPENDANCE EN TEMPS : LE CAS DES SYSTÈMES ADIABATIQUES

Dans ce chapitre, nous étudions des situations dans lesquelles l'instrument considéré dépend du temps. Notre motivation initiale provient de l'étude du principe de Landauer pour les systèmes d'interactions répétées, dans le cas adiabatique. Nous allons d'abord expliquer les trois éléments de cette dernière phrase : le principe de Landauer, les systèmes d'interactions répétées, et les évolutions adiabatiques.

Comme nous l'avons écrit en section 0.4, le principe de Landauer peut se résumer ainsi : lors de la transformation irréversible de l'état d'un système \mathcal{S} par interaction avec un environnement \mathcal{E} initialement à l'équilibre thermique à température inverse β on a la relation

$$\beta \Delta Q_{\mathcal{E}} \geq \Delta S_{\mathcal{S}} \quad (\text{I})$$

où $\Delta Q_{\mathcal{E}}$ est la variation d'énergie libre de \mathcal{E} et $\Delta S_{\mathcal{S}}$ la variation d'entropie de \mathcal{S} . De plus, on s'attend à une saturation de l'inégalité (I) lorsque l'évolution est adiabatique, c'est-à-dire essentiellement qu'elle est infiniment lente, et part d'un $\mathcal{S} \vee \mathcal{E}$ initialement à l'équilibre (voir plus bas). La surprenante diversité des commentaires sur le principe de Landauer peut sans doute être imputée à l'absence d'une preuve de (I), voire à l'absence d'un énoncé précis (notons par exemple que nous n'avons pas encore défini précisément les quantités $\Delta Q_{\mathcal{E}}$ et $\Delta S_{\mathcal{S}}$). La première preuve satisfaisante, due à Reeb et Wolf dans [III], s'exprime dans le formalisme quantique, ce qui n'a rien d'étonnant compte tenu des ordres de grandeurs concernés¹. Pour exposer cette preuve, on suppose que le système \mathcal{S} (respectivement l'environnement \mathcal{E}) est décrit par un espace de Hilbert de dimension finie $\mathcal{H}_{\mathcal{S}}$ (resp. $\mathcal{H}_{\mathcal{E}}$) muni d'un hamiltonien $H_{\mathcal{S}}$, (resp. $H_{\mathcal{E}}$) et d'un état ρ^i (resp. ξ). On suppose que l'état ξ est un état de Gibbs à température inverse β , soit $\xi = \exp(-\beta H_{\mathcal{E}})/Z$ avec $Z = \text{tr}(\exp(-\beta H_{\mathcal{E}}))$. On couple alors \mathcal{S} et \mathcal{E} via l'unitaire $U \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_{\mathcal{S}} \otimes \mathcal{H}_{\mathcal{E}})$, puis on les découple après interaction. Le système \mathcal{S} est alors dans l'état

$$\rho^f = \text{tr}_{\mathcal{E}}(U(\rho^i \otimes \xi)U^*). \quad (2)$$

On définit

$$\Delta S_{\mathcal{S}} := S(\rho^i) - S(\rho^f), \quad \Delta Q_{\mathcal{E}} := \text{tr}(U(\rho^i \otimes \xi)U^* H_{\mathcal{E}}) - \text{tr}((\rho^i \otimes \xi)H_{\mathcal{E}}),$$

la diminution d'entropie du système et l'augmentation d'énergie de l'environnement. On a alors par un calcul direct de quelques lignes (voir [III] ou [P19]) le *bilan d'entropie* :

$$\beta \Delta Q_{\mathcal{E}} = \Delta S_{\mathcal{S}} + \sigma \quad (3)$$

1. Par exemple, le coût énergétique de la réinitialisation (dans un état pur connu) d'un bit d'information aurait un coût minimal à température ambiante de $3 \cdot 10^{-21}$ joules environ; la littérature prévoit que les technologies actuelles atteindront cette borne vers 2035, voir [34].

où

$$\sigma = S(U(\rho^i \otimes \xi)U^* | \rho^f \otimes \xi). \quad (4)$$

Puisqu'une entropie relative est toujours positive, l'égalité (3) implique la borne de Landauer (1). Cette preuve limpide a l'inconvénient de supposer que l'environnement est décrit par un espace $\mathcal{H}_{\mathcal{E}}$ de dimension finie; l'article [79] a étendu l'approche ci-dessus au cas où il est décrit par une C^* -algèbre quelconque, étape nécessaire à la discussion de la saturation de l'inégalité (voir ci-dessous). L'article [P19] étudie le même problème quand l'environnement est décrit par un système d'interactions répétées.

Un *système d'interactions répétées* (SIR) est composé d'un système fixe \mathcal{S} , qui interagit pendant un temps fixé avec un système \mathcal{E}_1 , suivant une dynamique hamiltonienne, avant que le couplage de \mathcal{S} et \mathcal{E}_1 soit désactivé; tout se passe donc comme ci-dessus, sauf qu'après cette première étape, \mathcal{S} interagit avec un système \mathcal{E}_2 , et ainsi de suite. Les paramètres décrivant la k -ième interaction sont $H_{\mathcal{E}_k}$, β_k et v_k , ces paramètres déterminant l'unitaire

$$U_k := \exp(-i\tau(H_{\mathcal{S}} \otimes \text{Id} + \text{Id} \otimes H_{\mathcal{E}_k} + v_k))$$

(on suppose donc pour simplifier les notations que $\mathcal{H}_{\mathcal{E}_k} \equiv \mathcal{H}_{\mathcal{E}}$ et que les temps d'interaction sont constants et égaux à τ). On a en particulier $\xi_k = e^{-\beta_k H_{\mathcal{E}_k}} / \text{tr}(e^{-\beta_k H_{\mathcal{E}_k}})$. Il est clair que ce modèle est fortement lié aux modèles de mesures indirectes du chapitre 3. Les SIR sont également utilisés pour modéliser l'interaction de \mathcal{S} avec un environnement, constitué ici de suite $\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2, \dots$, qui a par définition deux des caractéristiques attendues d'un environnement : une énergie totale infinie, et (en tout cas quand tous les états ξ_k sont identiques) un temps caractéristique de retour à l'équilibre petit devant celui de \mathcal{S} (il est par définition égal à τ). L'intérêt pour une modélisation des environnements par des SIR a été relancé mathématiquement par les articles [P2], [9] et surtout par les expériences de physique comme celles de l'électrodynamique quantique à cavité; voir la revue [31] pour plus d'informations. Considérons donc un SIR; une application directe de (3) donne

$$\Delta S_{\mathcal{E}}^{\text{tot}} = \Delta S_{\mathcal{S}}^{\text{tot}} + \sigma_T^{\text{tot}}$$

où

$$\Delta S_{\mathcal{E}}^{\text{tot}} := \sum_{k=1}^T \beta_k \Delta Q_{\mathcal{E}_k} \quad \Delta S_{\mathcal{S}}^{\text{tot}} := \sum_{k=1}^T \Delta S_{k,\mathcal{S}} \quad \sigma_T^{\text{tot}} := \sum_{k=1}^T \sigma_k.$$

Notons que la quantité $\beta_k \Delta Q_{\mathcal{E}_k}$ s'apparente à une entropie de Clausius, ce qui justifie notre notation $\Delta S_{\mathcal{E}}^{\text{tot}}$. On a évidemment $\sigma^{\text{tot}} \geq 0$.

Enfin, le régime adiabatique est la situation dans laquelle on considère en temps long $T \rightarrow \infty$ une dynamique dont les paramètres varient lentement – typiquement par dilatation sur $[0, T]$ de paramètres qui sont des fonctions régulières sur $[0, 1]$. L'importance physique de cette limite vient du “théorème” adiabatique de Born et Fock (dans [23]) qui dit que si la dynamique est hamiltonienne, alors l'évolution entre les temps 0 et T qui résulte de cette déformation lente des paramètres a la propriété d'envoyer tout état propre du hamiltonien initial sur un état propre du hamiltonien final. On a écrit plus haut que l'on s'attendait à avoir saturation de l'inégalité (1) dans la limite adiabatique. Or, on peut montrer (voir [79]) que dans le cadre à dimension finie de [III], on a égalité dans (1) si et seulement si $\Delta S_{\mathcal{S}} = \Delta Q_{\mathcal{E}} = 0$, auquel cas ρ^i et ρ^f sont unitairement équivalents, et $\xi = \text{tr}_{\mathcal{E}}(U(\rho^i \otimes \xi)U^*)$. Par conséquent, dans ce cadre, la saturation de (1) ne se produit que dans des cas triviaux. Dans le cadre C^* -algébrique, l'article [79] montre la saturation de (1), donc l'annulation de σ , dans la limite adiabatique (sous des hypothèses de stabilité des systèmes dynamiques déformés).

Notre objectif était donc initialement l'étude du comportement de σ_T^{tot} pour des systèmes d'interactions répétées, quand $T \rightarrow \infty$ dans la limite adiabatique. Les résultats correspondants sont décrits dans [P19] (et donnés ici dans les remarques 4.17 et 4.19). Ils apparaissent ci-dessous comme corollaires de résultats plus précis obtenus dans [P22], et motivés à nouveau par les mesures à deux temps et l'objectif de formulations statistiques de lois de la thermodynamique. En effet, le principe de Landauer tel qu'énoncé ci-dessus concerne les quantités moyennes que sont $\Delta Q_{\mathcal{E}}$ et $\Delta S_{\mathcal{S}}$. Dans le cadre du programme amorcé au chapitre 2, on peut espérer le raffiner en une relation entre les lois des variables aléatoires correspondant à la variation d'énergie propre, ou d'entropie, le long d'une trajectoire. Un tel résultat a été obtenu dans [19] dans un cadre hamiltonien avec réservoir modélisé par une C^* -algèbre. Nous avons voulu étudier la question analogue pour les systèmes d'interactions répétées. Commençons donc par mettre en place le formalisme des mesures à deux temps dans ce cadre.

I. MESURES À DEUX TEMPS DES SYSTÈMES D'INTERACTIONS RÉPÉTÉES

Supposons que nous avons un système d'interactions répétées pour des temps allant de $k = 1$ à T , décrit par les paramètres $H_{\mathcal{E}_k}, \beta_k, v_k$ et par conséquent $\xi_k = e^{-\beta_k H_{\mathcal{E}_k}} / \text{tr}(e^{-\beta_k H_{\mathcal{E}_k}})$. On notera par Ξ le produit $\xi_1 \otimes \dots \otimes \xi_T$. On va définir sur ces objets deux protocoles d'expérience, qui dépendent de la donnée de deux observables A^i et A^f de \mathcal{S} , et T observables M_1, \dots, M_T de $\mathcal{E}_1, \dots, \mathcal{E}_T$ respectivement.

Le premier protocole, dit "protocole en avant" est défini de la manière suivante :

1. on effectue la mesure de l'observable A^i de \mathcal{S} , le résultat est noté a^i ;
2. à chacune des étapes $k = 1 \nearrow T$:
 - a. on effectue sur \mathcal{E}_k la mesure de l'observable M_k , le résultat est noté i_k ;
 - b. on fait évoluer l'ensemble $\mathcal{S} \vee \mathcal{E}_k$ suivant l'unitaire U_k ;
 - c. on effectue une nouvelle mesure de M_k , le résultat est noté j_k ;
3. on effectue la mesure de l'observable A^f de \mathcal{S} , le résultat est noté a^f .

La liste complète des résultats de mesures peut donc s'écrire comme un élément

$$(a^i, \vec{i}, \vec{j}, a^f) := (a^i; (i_1, j_1), \dots, (i_T, j_T); a^f)$$

de

$$\Omega_T = \text{sp } A^i \times (\text{sp } M_1)^2 \times \dots \times (\text{sp } M_T)^2 \times \text{sp } A^f,$$

et d'après la règle de Born, la probabilité associée à ω dans cette expérience "en avant" est

$$\mathbb{P}_T^F(a^i, \vec{i}, \vec{j}, a^f) := \text{tr} (U_T \dots U_1 (\pi_a^i \otimes \Pi_{\vec{i}}) (\rho^i \otimes \Xi) (\pi_a^i \otimes \Pi_{\vec{i}}) U_1^* \dots U_T^* (\pi_a^f \otimes \Pi_{\vec{j}})), \quad (5)$$

où π_a^i (respectivement π_a^f) est le projecteur spectral de A^i (resp. A^f) associé à la valeur propre a^i (resp. a^f), et $\Pi_{\vec{i}}$ est le produit $\Pi_{i_1}^{(1)} \otimes \dots \otimes \Pi_{i_T}^{(T)}$ des projecteurs spectraux de $M_1 \otimes \dots \otimes M_T$ associés à $\vec{i} = (i_1, \dots, i_T)$ (et de même pour $\Pi_{\vec{j}}$).

Le deuxième protocole, dit "protocole en arrière" est défini de la manière suivante :

1. on effectue la mesure de l'observable A^f de \mathcal{S} , le résultat est noté a^f ;
2. à chacune des étapes $k = T \searrow 1$:
 - a. on effectue sur \mathcal{E}_k la mesure de l'observable M_k , le résultat est noté j_k ;

- b. on fait évoluer l'ensemble $\mathcal{S} \vee \mathcal{E}_k$ suivant l'unitaire U_k^* ;
- c. on effectue une nouvelle mesure de M_k , le résultat est noté i_k ;
- 3. on effectue la mesure de l'observable A^i de \mathcal{S} , le résultat est noté a^i .

La probabilité associée aux résultats $(a^i; (i_1, j_1), \dots, (i_T, j_T); a^f)$ (où l'ordre des indices ne traduit plus l'ordre chronologique des mesures) est alors

$$\mathbb{P}_T^B(a^i, \vec{i}, \vec{j}, a^f) := \text{tr} (U_1^* \dots U_T^* (\pi_{a^f}^f \otimes \Pi_{\vec{j}}) (\rho_T^f \otimes \Xi) (\pi_{a^f}^f \otimes \Pi_{\vec{j}}) U_T \dots U_1 (\pi_{a^i}^i \otimes \Pi_{\vec{i}})). \quad (6)$$

On définit alors trois variables aléatoires sur Ω_T . Les deux premières sont naturelles :

$$\Delta a_T(a^i, \vec{i}, \vec{j}, a^f) := a^i - a^f, \quad (7)$$

$$\Delta m_T^{\text{tot}}(a^i, \vec{i}, \vec{j}, a^f) := \sum_{k=1}^T (y_{j_k}^{(k)} - y_{i_k}^{(k)}). \quad (8)$$

Remarque 4.1.

1. La définition de Δa_T comme $a^i - a^f$, donc comme diminution de la quantité a , est cohérente avec la définition de $\Delta S_{\mathcal{S}}$ ci-dessus, qui suit l'usage concernant le principe de Landauer.
2. Dans ce cadre de systèmes dépendant du temps, la dépendance en T des $U_k = U(\frac{k}{T})$ fait que la famille $(\mathbb{P}_T^F)_T$ n'est pas cohérente en général; elle ne définit donc pas a priori de probabilité \mathbb{P}^F sur l'ensemble des suites infinies, comme c'était le cas au chapitre 3.
3. Si l'on ignore les étapes de mesure 2.a. et 2.c. du protocole en avant, alors le protocole obtenu correspond à T itérations de la situation définie en page 83 au début de ce chapitre, à ceci près que l'on applique maintenant lors de l'étape k une interaction unitaire U_k entre \mathcal{S} et \mathcal{E}_k . L'état de \mathcal{S} après la k -ième étape de ce protocole sans mesure des sondes est

$$\rho_k = \text{tr}_{\mathcal{E}} (U_k (\rho_{k-1} \otimes \xi_k^i) U_k^*)$$

(nous notons $\text{tr}_{\mathcal{E}}$ à la place de $\text{tr}_{\mathcal{H}_{\mathcal{E}}}$ pour simplifier les notations), qui peut s'écrire $\rho_k = \mathcal{L}_k(\rho_{k-1})$, où \mathcal{L}_k est un canal quantique. On a par conséquent

$$\rho_k = \mathcal{L}_k \circ \dots \circ \mathcal{L}_1(\rho^i).$$

On notera en particulier $\rho_T^f := \mathcal{L}_T \circ \dots \circ \mathcal{L}_1(\rho^i)$.

On suppose dans la suite que les états ρ^i et ρ_T^f sont fidèles (la fidélité de ρ_T^f découlera de celle de ρ^i). Ceci assure que

$$\mathbb{P}_T^F(a^i, \vec{i}, \vec{j}, a^f) = 0 \text{ si et seulement si } \mathbb{P}_T^B(a^i, \vec{i}, \vec{j}, a^f) = 0. \quad (9)$$

Cette propriété (9) joue le rôle de l'hypothèse **(B)** du chapitre 3, et permet de définir une troisième variable aléatoire :

$$\varsigma_T(\omega) := \log \frac{\mathbb{P}_T^F(a^i, \vec{i}, \vec{j}, a^f)}{\mathbb{P}_T^B(a^i, \vec{i}, \vec{j}, a^f)},$$

que l'on appelle la production d'entropie le long de la trajectoire $\omega = (a^i, \vec{i}, \vec{j}, a^f)$. Cette variable analogue à ς_n de la section 3.2 peut encore une fois être vue comme une log-vraisemblance.

On va supposer à partir de maintenant que A^i , A^f et les M_k sont respectivement des fonctions de ρ^i , ρ^f et ξ_k (donc, de manière équivalente, de $H_{\mathcal{E}_k}$). On a alors le résultat suivant, obtenu par un calcul direct :

LEMME 4.2 ([P22]). *On a l'identité*

$$\varsigma_T(\omega) = \log \left(\frac{\text{tr}(\rho^i \pi_a^i)}{\text{tr}(\rho_T^f \pi_a^f)} \frac{\dim \pi_a^f}{\dim \pi_a^i} \right) + \sum_{k=1}^T \beta_k (E_{j_k}^{(k)} - E_{i_k}^{(k)}), \quad (10)$$

où les $E_{i_k}^{(k)}$ sont les valeurs propres (répétées avec multiplicité) de $H_{\mathcal{E}_k}$.

Ce calcul prend tout son intérêt dans le cas particulier où les observables de mesures sont des observables d'entropie :

PROPOSITION 4.3 ([P22]). *Supposons $A_i = -\log \rho^i$, $A_f = -\log \rho^f$ et $M(s) = \beta(s)H_{\mathcal{E}}(s)$ (ou $M(s) = -\log \xi(s)$). On a alors si $\rho^i = \sum r_a^i \pi_a^i$ et $\rho_T^f = \sum r_a^f \pi_a^f$:*

$$\varsigma_T(\omega) = (-\log r_a^f) - (-\log r_a^i) + \sum_{k=1}^T \beta_k (E_{j_k}^{(k)} - E_{i_k}^{(k)}) = -\Delta a_T + \Delta m_T^{\text{tot}}. \quad (11)$$

De plus, notant \mathbb{E}_T l'espérance par rapport à \mathbb{P}_T^F , on a

$$\mathbb{E}_T(\Delta a_T) = S(\rho^i) - S(\rho^f) = \Delta S_S^{\text{tot}} \quad \mathbb{E}_T(\Delta m_T^{\text{tot}}) = \sum_{k=1}^T \beta_k \Delta Q_k = \Delta S_{\mathcal{E}}^{\text{tot}} \quad (12)$$

et par conséquent

$$\mathbb{E}_T(\varsigma_T) = \sigma_T^{\text{tot}}. \quad (13)$$

L'identité (11) donne un bilan d'entropie au niveau des trajectoires, et découle directement de (10). Si l'on supprime de notre protocole les mesures initiales et finales sur \mathcal{S} , alors (11) se réduit à une version quantique de la formule de Tasaki–Crooks (voir [37]). Les relations (12) s'obtiennent par un calcul direct, et donnent avec (3) l'identité (13).

Remarque 4.4. L'idée de définir la production d'entropie le long d'une trajectoire comme la différence des log-vraisemblances d'une trajectoire et de la trajectoire renversée remonte à [58]; il reste en revanche dans des cas comme le nôtre un choix à faire concernant la définition de la trajectoire renversée (voir [77]). En particulier, le choix fait ici (la trajectoire renversée est celle obtenue par le protocole "en arrière") n'est pas le même que celui de l'exemple 3.36 issu de [18], qui applique la théorie de [P20]. Notre choix de définition de la production d'entropie d'une trajectoire a l'avantage d'avoir pour espérance la production d'entropie moyenne σ^{tot} (voir aussi [3] pour une justification des mesures initiale et finale sur \mathcal{S}) et de donner les résultats satisfaisants énoncés ci-dessous. On peut par ailleurs remarquer que, si l'on considère un SIR indépendant du temps (les fonctions $H_{\mathcal{E}}$, β , v sont constantes) et $\rho = \rho^i$ fidèle et \mathcal{L} -invariant, alors $\rho^f = \rho^i$ et avec les notations de la section 3.2, on a bien

$$\mathbb{P}_\rho((i_1, j_1), \dots, (i_T, j_T)) = \sum_{a,b} \mathbb{P}_T^F(a, \vec{i}, \vec{j}, b) = \text{tr} (U_T \dots U_1 (\rho \otimes \Xi \Pi_{\vec{i}}) U_1^* \dots U_T^* (\text{Id} \otimes \Pi_{\vec{j}}))$$

mais en général $\sum_{a,b} \mathbb{P}_T^B(a, \vec{i}, \vec{j}, b) \neq \widehat{\mathbb{P}}_\rho((i_1, j_1), \dots, (i_T, j_T))$ car

$$\begin{aligned} \sum_{a,b} \mathbb{P}_T^B(a, \vec{i}, \vec{j}, b) &= \text{tr} (U_1^* \dots U_T^* (\rho \otimes \Xi \Pi_{\vec{j}}) U_T \dots U_1 (\text{Id} \otimes \Pi_{\vec{i}})) \\ \widehat{\mathbb{P}}_\rho((i_1, j_1), \dots, (i_T, j_T)) &= \text{tr} (U_1 \dots U_T (\rho \otimes \Xi \Pi_{\vec{j}}) U_T^* \dots U_1^* (\text{Id} \otimes \Pi_{\vec{i}})). \end{aligned}$$

En revanche, sous l'hypothèse d'invariance par renversement du temps décrite en (19) (hypothèse qui est faite par [18]), ces deux expressions sont égales. Dans ce cas, les protocoles liés à l'exemple 3.36 reviennent donc à supprimer les mesures sur \mathcal{S} de nos protocoles avant et arrière.

On va maintenant chercher à étudier le comportement en loi des variables Δa_T , Δm_T^{tot} et ς_T . Une fois encore, c'est la fonction génératrice des moments qui s'écrit de manière exploitable.

PROPOSITION 4.5 ([P22]). *Supposons que A^i , A^f et les M_k sont des fonctions de ρ^i , ρ^f et ξ_k . Alors la fonction génératrice de $(\Delta m_T^{\text{tot}}, \Delta a_T)$ s'écrit*

$$\Gamma_{(\Delta m_T^{\text{tot}}, \Delta a_T)}(\alpha_1, \alpha_2) = \text{tr} \left(e^{-\alpha_2 A^f} \mathcal{L}_M^{(\alpha_1)}[T] \dots \mathcal{L}_M^{(\alpha_1)}[1] (e^{+\alpha_2 A^i} \rho^i) \right) \quad (14)$$

où $\mathcal{L}_M^{(\alpha)}[k]$ est une application complètement positive qui admet une décomposition de Kraus d'opérateurs $K_{i,j}^{(\alpha)}[k]$, $i, j \in \{1, \dots, \dim \mathcal{H}_{\mathcal{E}}\}$:

$$K_{i,j}^{(\alpha)}[k] = e^{\frac{\alpha}{2}(m_j[k] - m_i[k])} K_{i,j}[k]$$

où $K_{i,j}[k]$ est défini par

$$\langle x, K_{i,j}[k] y \rangle_{\mathcal{H}_{\mathcal{S}}} = \langle x \otimes \mu_j[k], U_k y \otimes \xi_k^{1/2} \mu_i[k] \rangle$$

si $\mu_i[k]$, $i = 1, \dots, \dim \mathcal{H}_{\mathcal{E}}$ est une base orthonormée de vecteurs propres de M_k associées aux valeurs propres $m_i[k]$, $i = 1, \dots, \dim \mathcal{H}_{\mathcal{E}}$.

Supposons un instant que notre SIR ne dépende pas du temps; dans ce cas le comportement asymptotique de $\frac{1}{T} \log \Gamma_{(\Delta m_T^{\text{tot}}, \Delta a_T)}(\alpha_1, \alpha_2)$ dans la limite $T \rightarrow \infty$ peut être étudié comme on l'a fait pour obtenir (3.11). L'expression (14) de cette quantité, qui implique un produit des valeurs successives de $\mathcal{L}_M^{(\alpha)}[k]$, indique qu'un théorème adiabatique pourrait donner cette asymptotique si les $\mathcal{L}^{(\alpha)}[k]$ étaient obtenues par échantillonnage d'une fonction régulière, i.e. avec $\mathcal{L}_M^{(\alpha)}[k] = \mathcal{L}_M^{(\alpha)}(\frac{k}{T})$. Nous allons supposer dans la suite que c'est le cas, en considérant des systèmes d'interactions répétées adiabatiques (SIRA).

SIRA Un SIRA est une famille de SIR indexée par un "paramètre adiabatique" $T \in \mathbb{N}^*$, telle qu'il existe des fonctions deux fois continûment différentiables $s \mapsto H_{\mathcal{E}}(s)$, $\beta(s)$, $v(s)$ sur $[0, 1]$ telles que pour chaque valeur du "paramètre adiabatique" $T \in \mathbb{N}^*$ on a

$$H_{\mathcal{E}_k} = H_{\mathcal{E}}(\frac{k}{T}), \quad \beta_k = \beta(\frac{k}{T}), \quad v_k = v(\frac{k}{T}) \quad \text{pour tous } k = 1, \dots, T.$$

On notera en conséquence $\xi(s) = e^{-\beta(s)H_{\mathcal{E}}(s)} / \text{tr}(e^{-\beta(s)H_{\mathcal{E}}(s)})$ et $\mathcal{L}_M^{(\alpha)}(s)$ un opérateur complètement positif de décomposition de Kraus les $K_{i,j}^{(\alpha)}(s) = e^{\frac{\alpha}{2}(m_j(s) - m_i(s))} K_{i,j}(s)$ où

$$\langle x, K_{i,j}(s) y \rangle_{\mathcal{H}_{\mathcal{S}}} = \langle x \otimes \mu_j(s), U_k y \otimes \xi_k^{1/2} \mu_i(s) \rangle$$

si les $\mu_i(s)$ forment une base orthonormée de valeurs propres de $M(s)$ associées à $m_i(s)$. Autrement dit, $\mathcal{L}_M^{(\alpha)}(s)$ est défini de telle manière que $\mathcal{L}_M^{(\alpha)}[k] = \mathcal{L}_M^{(\alpha)}(\frac{k}{T})$.

2. Nous dirons qu'une fonction f est C^2 sur $[0, 1]$ si elle est C^2 sur $]0, 1[$, et que f' et f'' admettent des limites finies en 0^+ , 1^- .

2. THÉORÈME ADIABATIQUE NON UNITAIRE À TEMPS DISCRET

Dans cette section, nous développons un théorème adiabatique qui s'applique au produit d'opérateurs $\mathcal{L}_M^{(\alpha_1)}(\frac{T}{T}) \dots \mathcal{L}_M^{(\alpha_1)}(\frac{1}{T})$ qui apparaît dans (14). Commençons par considérer le cas $\alpha_1 = 0$, auquel cas les $\mathcal{L}_M(\frac{k}{T})$ sont des canaux quantiques et par conséquent des contractions. Or, les théorèmes adiabatiques les plus classiques s'appliquent aux familles continues d'unitaires (voir [82]), et s'il existait dans la littérature des théorèmes adiabatiques s'appliquant à des familles continues de contractions (voir [11, 12]), ou à des familles discrètes d'unitaires (voir [119]), il n'en existait pas pour les familles discrètes de contractions. Nous avons donc développé un premier théorème adiabatique dans [P19], qui s'applique à des familles discrètes de contractions comme $(\mathcal{L}_M(\frac{k}{T}))_k$. Ce théorème ne permettait donc de traiter que le cas $\alpha = 0$, ce qui a restreint les résultats de [P19] au niveau des espérances, i.e. des quantités ΔS_S , ΔS_E et σ_T^{tot} . Un théorème amélioré, qui remplace des hypothèses en norme par des hypothèses spectrales (et qui est donc moins sensible aux perturbations), et s'appliquant à $(\mathcal{L}_M^{(\alpha)}(\frac{k}{T}))_k$, a été développé ensuite dans [P22]; c'est lui que nous présentons ci-dessous.

On considère une famille $(F(s))_{s \in [0,1]}$ d'applications linéaires sur un espace de Banach B , qui vérifie les conditions suivantes :

- (a1) L'application $s \mapsto F(s)$ de $[0, 1]$ dans $\mathcal{B}(X)$ est continue;
- (a2) Pour tout $s \in [0, 1]$, le rayon spectral $\text{spr } F(s)$ de $F(s)$ est égal à 1;
- (a3) Le spectre périphérique de $F(s)$ consiste pour tout $s \in [0, 1]$ en un nombre fini constant z de valeurs propres semi-simples;
- (a4) Si l'on note $P(s)$ le projecteur spectral de $F(s)$ associé à l'ensemble des valeurs propres périphériques, l'application $s \mapsto F^P(s) := F(s)P(s)$ est deux fois continûment dérivables de $[0, 1]$ dans $\mathcal{B}(X)$;
- (a5) Si l'on note $Q(s) := \text{Id} - P(s)$, alors

$$\ell := \sup_{s \in [0,1]} \text{spr } F(s)Q(s) < 1.$$

Une famille vérifiant toutes ces hypothèses sera dite *admissible*. Les hypothèses (a3), (a4) et la théorie de perturbation standard (voir [83]) assurent que l'on peut paramétrer les valeurs propres périphériques $\lambda^{(m)}(s)$ et les projecteurs spectraux associés $P^{(m)}(s)$ de telle manière que $s \mapsto \lambda^{(m)}(s)$ et $s \mapsto P^{(m)}(s)$ sont C^2 . On peut alors définir une famille d'opérateurs pertinents pour énoncer notre théorème adiabatique : on note $W : [0, 1] \rightarrow \mathcal{B}(X)$ l'unique famille vérifiant

$$W'(s) = \sum_{m=1}^z \frac{d}{ds} P^{(m)}(s) P^{(m)}(s) W(s), \quad W(0) = \text{Id}. \quad (15)$$

Les $W(s)$ vérifient alors la propriété d'entrelacement $W(s)P^{(m)}(0) = P^{(m)}(s)W(s)$ (voir la section II.5 de [83]). On peut alors énoncer :

THÉORÈME 4.6 ([P22]). *Si la famille $(F(s))_{s \in [0,1]}$ est admissible, alors pour tout $\ell' \in]\ell, 1[$ il existe $C > 0$ et $T_0 \in \mathbb{N}$ tels que pour $T \geq T_0$ on a*

$$\begin{aligned} \sup_{k=1, \dots, T} \left\| F(\frac{k}{T}) \dots F(\frac{1}{T}) - \sum_{m=1}^z \left(\prod_{n=1}^k \lambda^{(m)}(\frac{n}{T}) \right) W(\frac{k}{T}) P^{(m)}(0) - F^Q(\frac{k}{T}) \dots F^Q(\frac{1}{T}) Q(0) \right\| \\ \leq \frac{C}{T(1-\ell')} \end{aligned}$$

pour tout $T \geq T_0$, où $F^Q(s) := Q(s)F(s)$. De plus,

$$\|F^Q(\frac{k}{T}) \dots F^Q(\frac{1}{T})Q(0)\| \leq C\ell'^k,$$

où C dépend uniquement de

$$C_P := \sup_{s \in [0,1]} \sup_{m=1, \dots, z} \max(\|P^m(s)\|, \|P^{m'}(s)\|)$$

de manière continue, et T_0 dépend de C_P et ℓ' uniquement.

Nous montrerons dans la section 3 que les valeurs propres périphériques de $\mathcal{L}^{(\alpha)}$ sont simples; cela justifie de préciser la forme du théorème 4.6 dans ce cas.

COROLLAIRE 4.7 ([P22]). *Si la famille $(F(s))_{s \in [0,1]}$ est admissible, et que son spectre périphérique est simple, la valeur propre $\lambda^{(m)}$ ayant pour projecteur spectral $P^{(m)}(s) = \phi_m(s)\psi_m^*(s)$, alors pour tout $\ell' \in]\ell, 1[$, il existe $C > 0$ et $T_0 \in \mathbb{N}$, tels que pour $T \geq T_0$ et $k \leq T$,*

$$\begin{aligned} \|F(\frac{k}{T}) \dots F(\frac{1}{T}) - \sum_{m=1}^z \left(\prod_{n=1}^k \lambda_n^{(m)} \right) e^{-\int_0^{k/T} \psi_m^*(t)(\phi_m'(t)) dt} \phi_m(1)\psi_m^*(0) - F^Q(\frac{k}{T}) \dots F^Q(\frac{1}{T})Q(0)\| \\ \leq \frac{C}{T(1-\ell')}. \end{aligned} \tag{16}$$

De plus,

$$\|F^Q(\frac{k}{T}) \dots F^Q(\frac{1}{T})Q(0)\| \leq C\ell'^k$$

où C dépend uniquement de

$$c_P = \sup_{s \in [0,1]} \max_{m=1, \dots, z} \max(\|\phi_m(s)\|, \|\phi_m'(s)\|, \|\psi_m^*(s)\|, \|\psi_m^{*'}(s)\|)$$

de manière continue, et T_0 dépend de c_P et ℓ' uniquement.

Donnons une idée rapide de preuve du théorème 4.6. Si l'on écrit $F(s) = F^P(s) + F^Q(s)$, alors un produit $F(\frac{T}{T}) \dots F(\frac{1}{T})$ se développe comme une somme de produits de F^P et de F^Q . On commence par obtenir des bornes pour des produits consécutifs de termes de l'un ou l'autre type : il existe $T_0, D > 1$ et $D' > 1$ dépendant uniquement de C_P , tels que pour $T \geq T_0$

$$\|F^Q(\frac{a+L}{T}) \dots F^Q(\frac{a+1}{T})\| \leq D(\ell')^L, \quad \|F^P(\frac{b+L}{T}) \dots F^P(\frac{b+1}{T})\| \leq D'.$$

La première inégalité se prouve en utilisant la formule du rayon spectral, qui implique que pour tous s et ℓ' il existe L tel que $\|F(s)^L\| \leq \ell'$; si l'on choisit par compacité un L uniforme en s , on peut utiliser le fait que $F(s)^L \simeq F(\frac{k+L}{T}) \dots F(\frac{k+1}{T})$ et la régularité (a1) de F . La seconde inégalité se prouve en utilisant le fait qu'un produit $P^{(m')}(\frac{k+1}{T})P^{(m)}(\frac{k}{T})$ a une norme majorée par C_P/T si $m \neq m'$, un argument combinatoire et un théorème adiabatique pour les produits de projecteurs $P^{(m)}(\frac{k}{T})$. Par ailleurs, la régularité supposée en (a4) implique que des produits $F^P(\frac{k+1}{T})F^Q(\frac{k}{T})$ ou $F^Q(\frac{k+1}{T})F^P(\frac{k}{T})$ ont aussi des

normes majorées par C_P/T . Un argument combinatoire sur le nombre de P et de Q consécutifs dans le développement de $F(\frac{k}{T}) \dots F(\frac{1}{T})$ permet de contrôler

$$\left\| F(\frac{k}{T}) \dots F(\frac{1}{T}) - F^P(\frac{k}{T}) \dots F^P(\frac{1}{T})P(0) - F^Q(\frac{k}{T}) \dots F^Q(\frac{1}{T})Q(0) \right\|.$$

Il reste alors à comparer $F^P(\frac{k}{T}) \dots F^P(\frac{1}{T})P(0)$ à $\sum_{m=1}^z (\prod_{k=1}^T \lambda^{(m)}(\frac{k}{T})) W(\frac{T}{T})P^{(m)}(0)$ en s'inspirant de la preuve de [119].

Remarque 4.8. Les résultats de cette section s'appliquent sur tout Banach B , donc en particulier en dimension infinie. Le théorème adiabatique 4.6 devrait avoir d'autres applications, par exemple dans les chaînes de Markov dont le générateur dépend de façon adiabatique du temps, en tout cas dès que les propriétés considérées peuvent être caractérisées de manière spectrale. Nous pensons par exemple pouvoir donner une preuve des résultats de [P24] lorsque le générateur Π de (3.34) (donc, physiquement, les mesures effectuées sur les systèmes annexes $\mathcal{E}_k, k = 1, \dots, T$) évolue adiabatiquement.

3. SPECTRE PÉRIPHÉRIQUE DE DÉFORMATIONS DE CANAUX QUANTIQUES

Comme nous l'avons annoncé ci-dessus, nous pouvons montrer que les valeurs propres périphériques de $\mathcal{L}^{(\alpha)}(s)$ sont simples. Il nous faudra aussi, pour appliquer efficacement le corollaire 4.7, avoir de bonnes expressions pour les projecteurs spectraux périphériques associés. Remarquons d'abord que les opérateurs $\mathcal{L}(s) = \mathcal{L}^{(0)}(s)$ sont complètement positifs et préservent la trace.

Considérons donc une application complètement positive et préservant la trace Φ sur $\mathcal{I}_1(\mathcal{H})$, où \mathcal{H} est de dimension finie, et supposons Φ irréductible. On fixe une représentation de Kraus de $\Phi(\rho) = \sum_{i \in I} L_i \rho L_i^*$ de Φ . Alors (voir l'annexe A), il existe un entier z , un état fidèle ρ_{inv} et un unitaire u de la forme $\sum_{z=0}^{m-1} \theta^m p_m$ où $\theta = e^{2i\pi/z}$, tels que le spectre périphérique de Φ est de la forme $S_z := \{\theta^m \mid m = 0, \dots, z-1\}$, que chacune de ces valeurs propres périphériques est simple, et que le projecteur spectral de Φ associé à θ^m est $\eta \mapsto \text{tr}(u^{-m}\eta) \rho_{\text{inv}} u^m$.

Soit maintenant $(L_i)_{i \in I}$ une famille de réels strictement positifs. On définit pour $\alpha \in \mathbb{R}$ une application $\Phi^{(\alpha)}$ sur $\mathcal{I}_1(\mathcal{H})$ par

$$\Phi^{(\alpha)}(\rho) = \sum_i L_i^\alpha L_i \rho L_i^*.$$

Alors $\Phi^{(\alpha)}$ est complètement positive et vérifie les propriétés suivantes :

PROPOSITION 4.9 ([P22]). *Il existe trois applications infiniment dérivables $\alpha \mapsto \lambda^{(\alpha)}, \mathbf{I}^{(\alpha)}, \rho^{(\alpha)}$ de \mathbb{R} dans, respectivement, \mathbb{R}_+^* , l'ensemble des opérateurs définis positifs, et l'ensemble des états fidèles, telles que pour tout α dans \mathbb{R} ,*

- *le spectre périphérique de $\Phi^{(\alpha)}$ est $\lambda^{(\alpha)} S_z = \{\lambda^{(\alpha)} \theta^m \mid m = 0, \dots, z-1\}$,*
- *on a les relations de commutation $[\mathbf{I}^{(\alpha)}, u] = 0$ et $[\rho^{(\alpha)}, u] = 0$,*
- *on a $\text{tr}(\rho^{(\alpha)} \mathbf{I}^{(\alpha)}) = 1$ pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$,*
- *l'unique vecteur propre (à homothétie près) de $\Phi^{(\alpha)}$ (respectivement de $\Phi^{(\alpha)*}$) associé à la valeur propre $\lambda^{(\alpha)} \theta^m$ est $\rho^{(\alpha)} u^m$ (respectivement $\mathbf{I}^{(\alpha)} u^{-m}$), et le projecteur spectral de $\Phi^{(\alpha)}$ associé à $\lambda^{(\alpha)} \theta^m$ est*

$$\eta \mapsto \text{tr}(\mathbf{I}^{(\alpha)} u^{-m} \eta) \rho^{(\alpha)} u^m.$$

Remarque 4.10. Pour $\alpha = 0$ on a $\lambda^{(\alpha)} = 1$, $I^{(\alpha)} = \text{Id}$ et $\rho^{(\alpha)} = \rho_{\text{inv}}$. Précisons par ailleurs que les applications $\lambda^{(\alpha)}$, $I^{(\alpha)}$, $\rho^{(\alpha)}$ dépendent de $(L_i)_{i \in I}$.

La preuve de la proposition 4.9 est un peu longue mais passe principalement par le fait que, d'une part, on connaît une bijection entre les vecteurs propres de $\Phi^{(\alpha)}$ et ceux d'une déformation $\widehat{\Phi}^{(\alpha)}$ de $\Phi^{(\alpha)}$ qui préserve la trace (bijection que l'on trouve déjà dans [56]); d'autre part, que le spectre périphérique d'une application qui préserve la trace, et une partie des propriétés des projecteurs spectraux associés, sont caractérisés par des relations de commutation entre les opérateurs de Kraus et les projecteurs spectraux de l'unitaire u associé. On se sert alors du fait que les opérateurs de Kraus de $\Phi^{(\alpha)}$ sont proportionnels à ceux de Φ pour montrer que ces relations de commutation restent vraies, avec les mêmes projecteurs, et que de nombreuses propriétés sont par conséquent conservées.

Remarque 4.11. La proposition 4.9 ne semble pas avoir été connue avant nous, peut-être par manque d'intérêt pour les déformations de canaux quantiques (voir néanmoins [69]). On a vu que ces déformations sont intéressantes dès que l'on étudie les fonctions génératrices associées à des mesures indirectes. Le simple fait que la structure du spectre périphérique est préservée simplifie des arguments perturbatifs puisqu'elle assure que le statut de valeur propre de module maximal est conservé au fil de la déformation, ce qui offre de la continuité dans nos arguments perturbatifs. Cette proposition peut par exemple simplifier la preuve donnée dans [P15] des résultats du théorème 3.16. Elle sert de la même manière dans [27].

La caractérisation via les relations de commutation permet de montrer que la forme du spectre périphérique reste également stable sous les perturbations avec α complexe de partie imaginaire assez petite pour qu'aucune valeur propre non périphérique ne soit déformée en valeur propre périphérique. On a ainsi :

COROLLAIRE 4.12 ([P22]). *Sous les hypothèses de la proposition 4.9, il existe pour tout α_0 de \mathbb{R} , un voisinage complexe N_{α_0} de α_0 , tel que pour tout α dans N_{α_0} , le spectre périphérique de $\Phi^{(\alpha)}$ est de la forme $\{\lambda^{(\alpha)} \theta^m \mid m = 0, \dots, z - 1\}$ pour un $\lambda^{(\alpha)} \in \mathbb{C}$.*

4. APPLICATIONS : PRODUCTION D'ENTROPIE ET PRINCIPE DE LANDAUER TRAJECTORIELS

Nous allons reprendre l'étude du principe de Landauer sur la base de la proposition 4.5. Pour cela, nous ferons à partir de maintenant l'hypothèse que les paramètres $\beta(s)$, $H_{\mathcal{E}}(s)$ et $v(s)$ sont tels que $\mathcal{L}(s)$ est irréductible pour tout $s \in [0, 1]$. Alors, si l'on suppose ρ^i fidèle, $\rho^f = \mathcal{L}(\frac{T}{T}) \dots \mathcal{L}(\frac{1}{T})(\rho^i)$ est fidèle aussi, comme on l'a supposé pour obtenir (9). On suppose également que les M_k sont de la forme $M_k = M(\frac{k}{T})$ où $s \mapsto M(s)$ est deux fois continûment dérivable sur $[0, 1]$ et pour tout s , $M(s)$ est une fonction de $\xi(s)$ (ou, de manière équivalente, de $H_{\mathcal{E}}(s)$). On notera $\lambda_M(\alpha)$, $I_M(\alpha)$, $\rho_M(\alpha)$ les fonctions obtenues par application de la proposition 4.9, pour souligner leur dépendance en M , et on définit $\tilde{\mathcal{L}}_M^{(\alpha)} = (\lambda_M^{(\alpha)})^{-1} \mathcal{L}_M^{(\alpha)}$ qui a donc un rayon spectral égal à 1.

PROPOSITION 4.13 ([P22]). *Soit un SIRA tel que $\mathcal{L}(s)$ est irréductible pour tout $s \in [0, 1]$, avec $z(s) \equiv z$. Alors il existe des fonctions continues ℓ' , C , T_0 de \mathbb{R} dans $]0, 1[$, \mathbb{R}_+ et \mathbb{N} respectivement, T_0 bornée sur tout*

compact de \mathbb{R} , telles que pour $\alpha \in \mathbb{R}$, $T \geq T_0(\alpha)$, et $k \leq T$,

$$\begin{aligned} \left\| \tilde{\mathcal{L}}_M^{(\alpha)}\left(\frac{k}{T}\right) \dots \tilde{\mathcal{L}}_M^{(\alpha)}\left(\frac{1}{T}\right) \rho^i - z e^{-\vartheta_M^{(\alpha)}} \sum_{m=0}^{z-1} \text{tr} \left(\mathbf{I}^{(\alpha)}(0) p_m(0) \rho^i \right) \rho_M^{(\alpha)}\left(\frac{k}{T}\right) p_{m-k}\left(\frac{k}{T}\right) \right\| \\ \leq \frac{C(\alpha)}{T(1-\ell'(\alpha))} + C(\alpha) \ell'(\alpha)^k \end{aligned} \quad (17)$$

où l'indice $m - k$ du projecteur spectral $p_{m-k}\left(\frac{k}{T}\right)$ de $u\left(\frac{k}{T}\right)$ doit être compris modulo z , et

$$\vartheta_M^{(\alpha)} := \int_0^{k/T} \text{tr} \left(\mathbf{I}_M^{(\alpha)}(s) \frac{\partial}{\partial s} \rho_M^{(\alpha)}(s) \right) ds.$$

Cette proposition s'obtient en combinant le corollaire 4.7 et la proposition 4.9. On prouve ensuite que l'intégrale dans l'exponentielle de (16) ne dépend pas de m . L'expression finale s'obtient par un calcul de Fourier discret.

On va maintenant pouvoir s'intéresser à $\frac{1}{T} \log \Gamma_{(\Delta m_T^{\text{tot}}, \Delta a_T)}$. On a :

$$\log \Gamma_{(\Delta m_T^{\text{tot}}, \Delta a_T)}(\alpha_1, \alpha_2) = \log \sum_{k=1}^T \lambda^{(\alpha_1)}\left(\frac{k}{T}\right) + \log \text{tr} \left((\rho_T^f)^{\alpha_1} \tilde{\mathcal{L}}_M^{(\alpha_1)}\left(\frac{T}{T}\right) \dots \tilde{\mathcal{L}}_M^{(\alpha_1)}\left(\frac{1}{T}\right) ((\rho^i)^{1-\alpha_1}) \right).$$

On utilise alors (17) et l'expression de $\lim_{T \rightarrow \infty} \rho_T^f$ pour montrer que

$$0 < \liminf_{T \rightarrow \infty} \text{tr} \left(\tilde{\mathcal{L}}_M^{(\alpha)}\left(\frac{T}{T}\right) \dots \tilde{\mathcal{L}}_M^{(\alpha)}\left(\frac{1}{T}\right) \rho^i \right) \leq \limsup_{T \rightarrow \infty} \text{tr} \left(\tilde{\mathcal{L}}_M^{(\alpha)}\left(\frac{T}{T}\right) \dots \tilde{\mathcal{L}}_M^{(\alpha)}\left(\frac{1}{T}\right) \rho^i \right) < \infty,$$

ce qui implique immédiatement que

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \log \Gamma_{(\Delta m_T^{\text{tot}}, \Delta a_T)}(\alpha_1, \alpha_2) = \int_0^1 \log \lambda^{(\alpha_1)}(s) ds. \quad (18)$$

Remarque 4.14. On retrouve ici une expression similaire à celle qui a été donnée dans l'exemple 3.36 pour le cas indépendant du temps.

On obtient dès lors :

THÉORÈME 4.15 ([P22]). *Soit un SIRA tel que $\mathcal{L}(s)$ est irréductible pour tout $s \in [0, 1]$, avec $z(s) \equiv z$ et que l'état initial ρ^i est fidèle. Posons*

$$\Lambda_M(\alpha) = \int_0^1 \log \lambda^{(\alpha)}(s) ds.$$

Alors $\frac{1}{T} \Delta m_T^{\text{tot}}$ converge exponentiellement vers

$$\Lambda'_M(0) = \sum_{i,j} \int_0^1 (y_j(s) - y_i(s)) \text{tr} \left(K_{i,j}(s) \rho_{\text{inv}}(s) K_{i,j}^*(s) \right) ds,$$

on a la convergence en loi

$$\frac{1}{\sqrt{T}} (\Delta m_T^{\text{tot}} - T \Lambda'_M(0)) \xrightarrow{T \rightarrow \infty} \mathcal{N}(0, \Lambda''_M(0))$$

(où on a une expression implicite pour Λ_Y''), et Δm_T^{tot} satisfait un principe de grandes déviations avec fonction de taux Λ_M^* obtenue comme transformée de Fenchel–Legendre de Λ_M

$$\Lambda_M^*(x) = \sup_{\alpha \in \mathbb{R}} (\alpha x - \Lambda_M(\alpha)).$$

Dans tous ces énoncés, on peut remplacer Δm_T^{tot} par $\Delta m_T^{\text{tot}} + \gamma \Delta a_T$ pour n'importe quel $\gamma \in \mathbb{R}$.

Encore une fois, le principe de grandes déviations découle immédiatement du théorème de Gärtner–Ellis grâce à (18) et la convergence exponentielle en est une conséquence habituelle. Le théorème de la limite centrale est obtenu grâce au théorème de Bryc, les corollaires 4.7 et 4.12 permettant de donner une borne uniforme sur $\frac{1}{T} \log \Gamma_{(\Delta m_T^{\text{tot}}, \Delta a_T)}(\alpha_1, \alpha_2)$ pour α_1, α_2 dans un voisinage complexe de l'origine.

En particulier, quand on choisit $M(s) = \beta(s)H_{\mathcal{E}}(s)$, le théorème 4.15 porte sur la variable ς_T . On dira que le **SIRA** est invariant par renversement du temps si pour tout $s \in [0, 1]$ il existe deux involutions antiunitaires $\vartheta_{\mathcal{S}}(s) : \mathcal{H}_{\mathcal{S}} \rightarrow \mathcal{H}_{\mathcal{S}}$ et $\vartheta_{\mathcal{E}}(s) : \mathcal{H}_{\mathcal{E}} \rightarrow \mathcal{H}_{\mathcal{E}}$ telles que $\vartheta(s) = \vartheta_{\mathcal{S}}(s) \otimes \vartheta_{\mathcal{E}}(s)$ vérifie pour tout $s \in [0, 1]$

$$[H_{\mathcal{S}}, \vartheta_{\mathcal{S}}(s)] = 0, \quad [H_{\mathcal{E}}(s), \vartheta_{\mathcal{E}}(s)] = 0, \quad [v(s), \vartheta(s)] = 0. \quad (19)$$

COROLLAIRE 4.16 ([P22]). *Soit un SIRA tel que $\mathcal{L}(s)$ est irréductible pour tout $s \in [0, 1]$, avec $z(s) \equiv z$ et que l'état initial ρ^i est fidèle. La variable ς_T vérifie une convergence exponentielle, un théorème de la limite centrale et un principe de grandes déviations dont les paramètres sont donnés par le théorème 4.15 avec $M(s) = \beta(s)H_{\mathcal{E}}(s)$; en particulier*

$$\Lambda'_{\beta H_{\mathcal{E}}}(0) = \int_0^1 \beta(s) \operatorname{tr}(X(s) \operatorname{Id} \otimes H_{\mathcal{E}}(s)) \, ds,$$

où

$$X(s) := U(s)(\rho_{\text{inv}}(s) \otimes \xi(s))U(s)^* - \rho_{\text{inv}}(s) \otimes \xi(s). \quad (20)$$

Si le **SIRA** est invariant par renversement du temps, alors la fonction de taux $\Lambda_{\beta H_{\mathcal{E}}}$ vérifie

$$\Lambda_{\beta H_{\mathcal{E}}}(\alpha) = \Lambda_{\beta H_{\mathcal{E}}}(1 - \alpha) \quad \text{pour tout } \alpha \in \mathbb{R}.$$

Si l'on a $X \equiv 0$ (i.e. $X(s) = 0$ pour tout $s \in [0, 1]$) alors $\frac{1}{T}\varsigma_T$ et $\Delta S_{\mathcal{E}}$ convergent exponentiellement vers 0; si au contraire $X \not\equiv 0$, ils convergent exponentiellement vers une constante strictement positive.

Remarque 4.17. En particulier, si $X \not\equiv 0$, σ_T^{tot} croît linéairement en T vers $+\infty$. Ceci est la première moitié du résultat principal de [P19]. Dans le cas où le système est indépendant du temps et invariant par renversement du temps, cela découle du théorème 3.27 et de la discussion dans l'exemple 3.36.

On va donc continuer en supposant $X \equiv 0$ puisque c'est dans ce cas que l'on peut avoir saturation; on cherche alors à expliciter le lien entre les lois limites de $\Delta s_{\mathcal{E}, T}$ et $\Delta s_{\mathcal{S}, T}$. On commence par remarquer que pour un $s \in [0, 1]$ donné, $X(s) = 0$ si et seulement si il existe une observable $k_{\mathcal{S}}(s)$ de $\mathcal{H}_{\mathcal{S}}$ telle que $[U(s), k_{\mathcal{S}}(s) + H_{\mathcal{E}}(s)] = 0$ (c'est le lemme 6.5 de [P19]), auquel cas on peut vérifier que

$$\rho^{(\alpha)}(s) = \frac{e^{-(1+\alpha)\beta(s)k_{\mathcal{S}}(s)}}{\operatorname{tr}(e^{-(1+\alpha)\beta(s)k_{\mathcal{S}}(s)})} \quad \Gamma^{(\alpha)}(s) = \frac{\operatorname{tr}(e^{-(1+\alpha)\beta(s)k_{\mathcal{S}}(s)})}{\operatorname{tr}(e^{-\beta(s)k_{\mathcal{S}}(s)})} e^{\alpha\beta(s)k_{\mathcal{S}}(s)}$$

(il suffit de vérifier que chacun de ces termes est invariant par $\mathcal{L}^{(\alpha)}$, $\mathcal{L}^{(\alpha)*}$ respectivement, et que l'on a la normalisation $\operatorname{tr}(\rho^{(\alpha)}\Gamma^{(\alpha)}) = 1$). On obtient alors $\lambda^{(\alpha)}(s) = 1$. Par conséquent, si $X \equiv 0$, alors la

moyenne et la variance dans le corollaire 4.16 sont nuls, et la fonction de taux $\Lambda_{\beta H_{\mathcal{E}}}^*$ vaut 0 en 0 et $+\infty$ ailleurs. On peut en revanche dans ce cas étudier la convergence en loi de la paire $\Delta s_{\mathcal{E}}, \Delta s_{\mathcal{S}}$ en reprenant l'étude de la fonction génératrice, à condition de supposer les $\mathcal{L}(s)$ primitifs (sans quoi on a des oscillations dues aux périodes). On prouve :

THÉORÈME 4.18 ([P22]). *Soit un **SIRA** tel que pour tout $s \in [0, 1]$, $\mathcal{L}(s)$ est irréductible avec $z(s) = 1$, $X(s) = 0$, et que l'état initial ρ^i est fidèle. Alors la distribution du couple $(\Delta s_{\mathcal{S}, T}, \Delta s_{\mathcal{E}, T})$ converge étroitement vers la mesure de probabilité de fonction génératrice*

$$M_{(\Delta s_{\mathcal{E}}, \Delta s_{\mathcal{S}})}(\alpha_1, \alpha_2) = \text{tr}(\rho_{\text{inv}}(0)^{-\alpha_1} (\rho^i)^{1-\alpha_2}) \text{tr}(\rho_{\text{inv}}(1)^{1+\alpha_1+\alpha_2}),$$

qui a un support fini. En particulier, ς_T converge en loi vers une probabilité de fonction génératrice des cumulants

$$\log M_{\varsigma}(\alpha) = S_{-\alpha}(\rho_{\text{inv}}(0) | \rho^i).$$

Si de plus $\rho^i = \rho_{\text{inv}}(0)$ alors la loi limite de ς_T est un Dirac en zéro, donc la loi limite du couple $(\Delta s_{\mathcal{E}, T}, \Delta s_{\mathcal{S}, T})$ est portée par la diagonale.

Ce résultat dit essentiellement que dans la limite adiabatique on a égalité de $\Delta s_{\mathcal{S}}$ et de $\Delta s_{\mathcal{E}}$. Un résultat similaire dans le cadre hamiltonien a été montré par [19].

Remarque 4.19. Ceci montre en particulier que $\sigma_T^{\text{tot}} \xrightarrow{t \rightarrow \infty} S(\rho_{\text{inv}}(0) | \rho^i)$ si $X \equiv 0$. Le fait que σ_T^{tot} convergeait vers une limite finie était l'autre moitié du résultat principal de [P19], mais nous n'avions alors pas pu identifier la limite.

Remarque 4.20. Si $X \equiv 0$ et que le **SIRA** est invariant par renversement du temps, alors le système vérifie une relation de bilan détaillé : le dual $\tilde{\mathcal{L}}$ de \mathcal{L} pour le produit scalaire

$$(\eta_1, \eta_2) \mapsto \text{tr}(\rho_{\text{inv}}^{1/2} \eta_1^* \rho_{\text{inv}}^{1/2} \eta_2)$$

vérifie, avec les notations de (19),

$$\tilde{\mathcal{L}}(\vartheta_{\mathcal{S}} \eta \vartheta_{\mathcal{S}}) = \vartheta_{\mathcal{S}} \mathcal{L}(\eta) \vartheta_{\mathcal{S}}.$$

qui est l'une des définitions standard du bilan détaillé quantique (voir [P26] et la section 2). En revanche, la condition $X \equiv 0$ est plus forte que le bilan détaillé, car elle ne porte pas uniquement sur la dynamique réduite \mathcal{L} .

PROJETS DE RECHERCHE

Mes principaux projets de recherche concernent les trajectoires quantiques. Une première question naturelle serait d'étudier ce qui peut être dit du comportement des états aléatoires $(\rho_n)_n$ dans le cas où les instruments ne sont pas parfaits (autrement dit, ne sont pas de la forme $\Phi_i(\rho) = L_i \rho L_i^*$) : dans ce cas, les transitions de la chaîne de Markov ne préservent pas les états purs et la suite $(\rho_n)_n$ n'a aucune raison d'être asymptotiquement pure. Cette question semble difficile à traiter et nous croyons de plus que les questions les plus intéressantes concernent le cas où les instruments sont parfaits, ce qui, rappelons le, est le cas lorsque l'on effectue des mesures à deux temps sur les sondes. Dans ce cas, l'étude de la suite $(\rho_n)_n$ se réduit à celle des états purs aléatoires $(\pi_{\hat{x}_n})_n$ et cependant, même pour un choix donné de mesure μ à support fini vérifiant les relations (32) et (33) (par exemple si l'on fixe l'observable M mesurée sur les sondes), il reste beaucoup à dire sur le comportement asymptotique. Tout d'abord sur le comportement de la suite $(\hat{x}_n)_n$ au-delà de la convergence en loi : les résultats de [P24] nous permettent déjà de montrer une “loi des grands nombres” améliorant le théorème ergodique de Kümmerer–Maassen pour prendre en compte par exemple des moyennes $\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f(v_k, \hat{x}_k)$, ainsi qu'un théorème de la limite centrale fonctionnel. Il serait utile d'obtenir un principe de grande déviations pour $(\hat{x}_n)_n$ mais celui-ci est pour l'instant hors d'atteinte, les informations que nous avons sur le spectre du noyau de transition étant insuffisantes : on peut donc imaginer d'identifier des propriétés de sous-additivité pour utiliser une approche à la Ruelle–Lanford. De la même manière, nous ne savons encore rien des propriétés de la mesure invariante ν_{inv} et il serait intéressant de pouvoir en dire un peu plus. Le cas général étant sans doute difficile, on peut s'intéresser au comportement de ν_{inv} pour un choix “typique” de l'observable mesurée M (on reprend ici le formalisme de la section 0.3 ; remarquons que l'évolution moyenne Φ , et par conséquent son état invariant ρ_{inv} , ne dépendent pas de M si U et ξ sont fixés). Puisque seule la base orthonormée de ses vecteurs propres importe, on peut par exemple choisir à chaque itération du protocole de mesure un unitaire de manière aléatoire, cet aléa s'intégrant à la mesure μ (qui n'est alors plus en général à support fini). Dans ces deux cas, on peut se demander comment se comporte ν_{inv} dans différents régimes, par exemple lorsque la dimension de \mathcal{H} (que nous avons aussi noté \mathcal{H}_S) est grande, et en particulier s'il y a concentration de la mesure vers des configurations d'états purs qui seraient alors “génériques”. On peut de plus imaginer qu'il existe un lien entre les propriétés de $(\hat{x}_n)_n$ ou celles de ν_{inv} et celles de la statistique des mesures à deux temps sur les sondes. L'intérêt à plus long terme de ces questions est d'étudier et de caractériser l'évolution des systèmes quantiques via les suites $(\hat{x}_n)_n$, qui joueraient le rôle de trajectoires dans l'espace des phases. Le pari est que la décomposition $\int |x\rangle\langle x| d\nu(\hat{x})$ d'un état ρ a un sens physique pertinent grâce aux mesures indirectes. Enfin, on pourrait étudier des versions non markoviennes des trajectoires quantiques, dans l'optique d'étudier le contrôle de systèmes quantiques sur la base de mesures indirectes induisant une rétroaction.

Mes autres projets de recherche concernent des questions qui n'ont pas été décrites ici. Il y a tout d'abord, dans des thèmes connexes à ce qui précède, la poursuite de l'étude des propriétés de transport et de propagation de l'intrication ou de l'information dans d'autres modèles de systèmes quantiques. Un

premier modèle intéressant est celui des “circuits quantiques aléatoires” extrêmement simples à décrire et où l'aléa permet de rendre “typique” une évolution sur une chaîne de spins quantiques. Un autre modèle intéressant est celui de chaînes de spins auxquelles on ajoute un bruit fort, et qui semblent présenter des propriétés d'universalité. Enfin, d'autres problèmes plus éloignés des thèmes de ce document, qui sont apparus comme des questions techniques au fil de mes travaux passés, semblent offrir des questions mathématiques intéressantes. Je pense tout d'abord à des tentatives de généraliser le résultat de test d'hypothèses de [P16] à des algèbres de von Neumann générales, qui semble passer par l'obtention de décompositions de type QR sur de telles algèbres. Je pense également à des travaux plus récents sur des généralisations quantiques des distances de Wasserstein, abordées sous l'angle des couplages d'états quantiques, et qui même dans les cas les plus simples, posent des questions étonnamment difficiles en lien avec les problèmes quantiques marginales, usuels en théorie de l'information quantique.

ANNEXE A

APPLICATIONS COMPLÈTEMENT POSITIVES ET LEUR SPECTRE PÉRIPHÉRIQUE

Commençons par rappeler que pour \mathcal{H} un espace de Hilbert séparable, une application Φ de $\mathcal{I}_1(\mathcal{H})$ dans lui-même est :

- *complètement positive* si pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, son extension $\Phi \otimes \text{Id}_{\mathcal{B}(\mathbb{C}^n)}$ à $\mathcal{I}_1(\mathcal{H}) \otimes \mathcal{B}(\mathbb{C}^n)$ est positive; la complète positivité implique donc la positivité.
- *irréductible* si les seuls projecteurs orthogonaux P de \mathcal{H} satisfaisant $\Phi(P\mathcal{I}_1(\mathcal{H})P) \subseteq P\mathcal{I}_1(\mathcal{H})P$ sont 0 et $\text{Id}_{\mathcal{H}}$,

Pour une motivation à considérer des applications complètement positives, voir [85]. Une application complètement positive et qui préserve la trace (i.e. telle que $\text{tr}(\Phi(\eta)) = \text{tr}(\eta)$) est souvent appelée *canal quantique*. On rappelle que toute application complètement positive admet une *décomposition de Kraus*, c'est-à-dire qu'il existe des applications $L_i \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$, où i appartient à une famille au plus dénombrable I , telles que $\Phi(\rho) = \sum_{i \in I} L_i \rho L_i^*$ pour tout ρ (voir [85] ou [110] pour une présentation plus moderne). L'irréductibilité de Φ est alors équivalente au fait que les seuls sous-espaces vectoriels E de \mathcal{H} tels que $L_i E \subset E$ pour tout $i \in I$ sont $\{0\}$ et \mathcal{H} .

Supposons Φ complètement positive et irréductible. Un premier résultat est valable en dimension arbitraire (théorème 3.1 de [117]) : si le rayon spectral $\lambda(\Phi)$ de Φ est égal à sa norme d'opérateur $\|\Phi\|$ et est valeur propre de Φ , alors c'est une valeur propre simple et un vecteur propre est défini positif. On a $\|\Phi^n\| = \sup \text{tr}(\Phi^n(X))$ où le supremum est pris sur l'ensemble des X positifs de trace 1, donc si Φ préserve la trace, alors $\|\Phi\| = 1$ et $\lambda(\Phi) = \lim_{n \rightarrow \infty} \|\Phi^n\|^{1/n} = 1$; on a bien alors $\lambda(\Phi) = \|\Phi\| = 1$. Si \mathcal{H} est de dimension finie, alors la condition $\lambda(\Phi) = \|\Phi\|$ est automatiquement vraie.

À partir de maintenant nous supposons que \mathcal{H} de dimension finie. Si Φ est complètement positive, irréductible, et préserve la trace (auquel cas Φ^* est complètement positive, irréductible et préserve Id), alors comme Evans et Hoegh-Krøhn l'ont montré dans [56] :

- le spectre périphérique de Φ est un sous-groupe fini $S_z = \{\theta^m \mid m = 0, \dots, z-1\}$ (où $\theta = e^{2i\pi/z}$) du cercle unité, et chaque θ^m est valeur propre simple,
- il existe un état fidèle ρ_{inv} et un unitaire u (appelé unitaire de Perron–Frobenius de Φ) satisfaisant $[\rho_{\text{inv}}, u] = 0$, $u^z = \text{Id}$ et $u^k \neq \text{Id}$ pour $k = 0, \dots, z-1$, tels que

$$\begin{aligned} \Phi(\rho u) &= \theta \Phi(\rho) u \quad \forall \rho \in \mathcal{I}_1(\mathcal{H}) \\ \Phi^*(uX) &= \bar{\theta} u \Phi^*(X) \quad \forall X \in \mathcal{B}(\mathcal{H}). \end{aligned} \tag{1}$$

Une conséquence immédiate est que l'unique (à constante multiplicative près) vecteur propre de Φ (respectivement Φ^*) associé à la valeur propre θ^m est $\rho_{\text{inv}} u^m$ (respectivement u^{-m}), et le projecteur spectral de Φ associé à θ^m est $\eta \mapsto \text{tr}(u^{-m} \eta) \rho_{\text{inv}} u^m$.

Remarquons que les relations (1) sont équivalentes à $L_i u = \theta u L_i$ pour tout $i \in I$. De plus, u s'écrit $u = \sum_{m=0}^{z-1} \theta^m p_m$, où les projecteurs p_m satisfont $p_m L_i = L_i p_{m+1}$ pour tous i et m ($m+1$ étant compris *modulo* z). Chaque sous-espace $\mathcal{B}(\text{Im } p_m)$ de $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ est par conséquent invariant par Φ^{*z} et la restriction de Φ^{*z} à ce sous-espace est *primitive*, i.e. irréductible avec 1 comme unique valeur propre périphérique.