Université Paris-Sud
S4MIAS

2005
Option Topologie

# Partiel de Topologie

*9 avril 2005, durée 3h*

*Documents et calculettes interdits*

Barême indicatif : I=2, II=4, III=3, IV=11.

## I

Vrai ou faux ? Répondez en donnant une brève justification ou un contre-exemple.

A. Soit $A$ une partie bornée de $\mathbf{R}$ et $y = \sup A$. Il existe $\epsilon > 0$ tel que pour tout $x \in ]y - \epsilon, y[$, $x \in A$.

B. Si $\ell$ est la limite d'une suite extraite de $(u_n)$, alors $\ell$ est une valeur d'adhérence de $(u_n)$.

C. Soit $f$ une fonction dérivable sur $[a, b]$, telle que $f(a) > 0 > f(b)$. Il existe $c \in ]a, b[$ tel que $f'(c) = 0$.

D. Toute suite de Cauchy possède une valeur d'adhérence.

## II

Soient $A$ et $B$ deux parties non vides de $\mathbf{R}$ telles que pour tout $a \in A$ et $b \in B$, $a < b$.

**1.** Justifier l'existence des bornes et montrer que $\sup A \leq \inf B$. (On pourra s'aider d'un dessin dans le cas particulier où $A$ et $B$ sont des intervalles).

**2.** On suppose en plus que pour tout $\epsilon > 0$ il existe $a \in A$ et $b \in B$ tels que $b - a < \epsilon$. Montrer que $\sup A = \inf B$. (On pourra raisonner par l'absurde).

## III

Soit $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ une fonction continue. Soit $x_n$ une suite de points de $[a, b]$.

**1.** Montrer que la suite $(x_n)$ admet au moins une valeur d'adhérence $z \in [a, b]$.

**2.** Montrer que $f(z)$ est une valeur d'adhérence de la suite $(f(x_n))$.

## IV

Soit $f$ une fonction continue sur $]0, 1[$. On suppose que $\lim\limits_{x \to 0+} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to 1-} f(x) = +\infty$.

**1.** Soit $(u_n)$ une suite de points de $]0, 1[$ qui converge vers 0. Montrer que $\lim_{n \to \infty} f(u_n) = +\infty$. Soit $(v_n)$ une suite de points de $]0, 1[$ qui converge vers 1. Montrer que $\lim_{n \to \infty} f(v_n) = +\infty$.

**2.** Dans cette question, on suppose que $f$ n'est pas minorée sur $]0, 1[$.

**2.a.** Montrer qu'il existe une suite $x_n \in ]0, 1[$ telle que $\lim_{n \to \infty} f(x_n) = -\infty$.

**2.b.** En utilisant le théorème de Bolzano-Weierstrass, aboutir à une contradiction.

**2.c.** Conclure que $f$ possède une borne inférieure sur $]0,1[$, notée $m$.

**3.** Montrer qu'il existe une suite $z_n \in ]0,1[$ telle que $\lim_{n\to\infty} f(z_n) = m$.

**4.** Montrer qu'il existe $c \in ]0,1[$ et une suite extraite de $z_n$ qui converge vers $c$.

**5.** Montrer que $f(c) = m$.

**6.** La fonction $f$ est-elle uniformément continue sur $]0,1[$ ?

**7.** Donner un exemple de fonction continue, non minorée et non majorée sur $]0,1[$. Donner un exemple de fonction continue et bornée sur $]0,1[$ dont la borne inférieure n'est pas atteinte.

Université Paris-Sud 2005
S4MIAS Option Topologie

Corrigé du Partiel de Topologie

*9 avril 2005, durée 3h*

## I

A est fausse : prendre $A = \{0\}$, cet ensemble ne contient aucun intervalle de la forme $]-\epsilon, 0[$. Pour obtenir une proposition vraie il suffit d'échanger les quantificateurs : Pour tout $\epsilon > 0$, il existe $x \in ]y-\epsilon, y[$ tel que $x \in A$.

B est vraie : cela fait partie des caractérisations des valeurs d'adhérence.

C est fausse : prendre $f(x) = 1 - 2x$ sur $[0, 1]$. Pour obtenir une proposition vraie, il suffit de changer la conclusion en $f(c) = 0$ (théorème des valeurs intermédiaires) ou l'hypothèse en $f(a) = f(b)$ (théorème de Rolle).

D est vraie : toute suite de Cauchy est convergente, donc possède sa limite comme valeur d'adhérence.

## II

**1.** Comme $A$ et $B$ ne sont pas vides, choisissons $a \in A$ et $b \in B$. Alors $a$ est un minorant de $B$. Comme $B$ est non vide et minoré, il admet une borne inférieure. $b$ est un majorant de $A$. Comme $A$ est non vide et majoré, il admet une borne supérieure.

Par hypothèse, tout élément $a$ de $A$ est un minorant de $B$, donc est inférieur au plus grand minorant de $B$, qui est sa borne inférieure. Autrement dit, pour tout $a \in A$, $a \leq \inf B$. Ceci montre que $\inf B$ est un majorant de $A$, donc $\inf B$ est supérieur au plus grand majorant de $A$, qui est sa borne supérieure. On a donc montré que $\sup A \leq \inf B$.

**2.** Raisonnons par l'absurde. Supposons que $\sup A < \inf B$. Posons $\epsilon = \inf B - \sup A > 0$. Par hypothèse, il existe $a \in A$ et $b \in B$ tels que $b - a < \epsilon$. Or

$$a \leq \sup A < \inf B \leq b,$$

donc $b - a \geq \inf B - \sup A = \epsilon$, contradiction. On conclut que $\sup A \geq \inf B$, et donc que $\sup A = \inf B$.

## III

**1.** Comme la suite $(x_n)$ est bornée, d'après le théorème de Bolzano-Weierstrass, elle admet au moins une valeur d'adhérence $z$. Comme $a \leq x_n \leq b$ pour tout $n$, les mêmes inégalités larges sont satisfaites par toute suite extraite, donc par leurs limites. On conclut que $z \in [a, b]$.

**2.** Comme $z$ est valeur d'adhérence, il existe une suite extraite $(x_{\phi(n)})$ qui converge vers $z$. Comme $f$ est continue, $\lim_{n\to\infty} f(x_{\phi(n)}) = f(z)$. Par conséquent, $f(z)$ est limite d'une suite extraite de la suite $(f(x_n))$, c'est une valeur d'adhérence de cette suite.

## IV

**1.** Soit $A > 0$. Comme $\lim_{x\to 0+} f(x) = +\infty$, il existe $\alpha > 0$ tel que

$$0 < x < \alpha \quad \Rightarrow \quad f(x) > A.$$

Comme $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$, il existe $N$ tel que

$$n \geq N \quad \Rightarrow \quad u_n < \alpha.$$

Par conséquent, $f(u_n) > A$. On a donc montré que $\lim_{n\to\infty} f(u_n) = +\infty$.

L'argument est le même pour la suite $(v_n)$, il suffit de remplacer $0 < x < \alpha$ par $1 - \alpha < x < 1$ et $u_n < \alpha$ par $v_n > 1 - \alpha$.

**2.a.** Par hypothèse, pour tout réel $M$, il existe $x \in ]0, 1[$ tel que $f(x) < M$. Pour chaque entier $n$, on peut donc choisir $x_n \in ]0, 1[$ tel que $f(x_n) < -n$. Alors $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = -\infty$.

**2.b.** D'après le théorème de Bolzano-Weierstrass, la suite bornée $x_n$ possède une sous-suite $x_{\phi(n)}$ qui converge vers un réel $\ell \in [0, 1]$.

Montrons par l'absurde que $\ell > 0$. Sinon, d'après 1., $\lim_{n\to\infty} f(x_{\phi(n)}) = +\infty$, contradiction. Pour la même raison, $\ell < 1$. Par continuïté de $f$ en $\ell$, $\lim_{n\to\infty} f(x_{\phi(n)}) = f(\ell)$. Or, d'après 2.a., $\lim_{n\to\infty} f(x_{\phi(n)}) = \lim_{n\to\infty} f(x_n) = -\infty$, contradiction.

**2.c.** On a montré en 2.b. que $f$ était minorée. L'ensemble $f(]0, 1[)$ est non vide, minoré, donc il possède une borne inférieure $m$, c'est, par définition, la borne inférieure de $f$ sur $]0, 1[$.

**3.** Comme $m$ est la borne inférieure de l'ensemble $f(]0, 1[)$, il existe une suite $y_n \in f(]0, 1[)$ qui converge vers $m$. Pour chaque $n$, il existe $z_n \in ]0, 1[$ tel que $f(z_n) = y_n$. On conclut que $\lim_{n\to\infty} f(z_n) = m$.

**4.** D'après le théorème de Bolzano-Weierstrass, la suite bornée $z_n$ possède une sous-suite $z_{\phi(n)}$ qui converge vers un réel $c \in [0, 1]$. Comme en 2.a., on montre que $c \neq 0$ et $c \neq 1$. Par conséquent, $c \in ]0, 1[$ et $c = \lim_{n\to\infty} z_{\phi(n)}$.

**5.** Par continuïté de $f$ en $c$, $f(c) = \lim_{n\to\infty} f(z_{\phi(n)}) = m$.

**6.** On applique une proposition du cours qui affirme qu'une fonction uniformément continue sur un intervalle borné $]a, b[$ se prolonge par continuïté aux bornes. Comme $f$ tend vers $+\infty$ en 0 et en 1, $f$ ne peut pas se prolonger en une fonction continue en 0 et en 1. Par conséquent, la réponse est non, $f$ n'est pas uniformément continue.

On peut aussi raisonner à l'aide de suites de Cauchy. Comme elle converge dans $\mathbf{R}$, la suite $u_n = \frac{1}{n}$, $n \geq 2$, est une suite de Cauchy dans $]0, 1[$. D'après 1., $\lim_{n\to\infty} f(u_n) = +\infty$, donc la suite $(f(u_n))$ n'est pas bornée. En particulier, ce n'est pas une suite de Cauchy. Or une fonction uniformément continue envoie une suite de Cauchy sur une suite de Cauchy. On conclut que la réponse est non, $f$ n'est pas uniformément continue.

**7.** La fonction $g$ définie sur $]0, 1[$ par

$$g(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{x-1}$$

est continue, elle n'est ni minorée ni majorée sur $]0, 1[$, car elle tend vers $+\infty$ en $0+$ et vers $-\infty$ en $1-$.

La fonction $h$ définie sur $]0, 1[$ par $h(x) = x$ est continue, bornée mais n'atteint pas sa borne inférieure sur $]0, 1[$ qui vaut 0.