Université Paris-Sud
S4MIAS

2005
Option Topologie

Examen de Topologie, 2ème session

8 septembre 2005, durée 3h

Documents et calculettes interdits

Barême indicatif : I=12, II=8

I

1. Soit $f : [0,1] \to [0,1]$ une fonction continue et décroissante au sens large. Montrer qu'il existe **un et un seul** $c \in [0,1]$ tel que $f(c) = c$.

2. Pour n entier, $n \geq 1$, soit f_n la fonction définie sur $[0,\pi]$ par $f_n(x) = \frac{1}{n}\sin(nx) - x + 1$. Montrer qu'il existe au moins un $x_n \in [0,\pi]$ tel que $f_n(x_n) = 0$.

Montrer qu'il existe une suite extraite $x_{\phi(n)}$ qui converge vers un réel ℓ.

Montrer que $\frac{1}{n}\sin(nx_n)$ tend vers 0.

En déduire la valeur de ℓ.

3. Soit f la fonction définie sur $\mathbf{R}$ par $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$. Calculer et majorer la dérivée f'. Montrer que f est uniformément continue sur $\mathbf{R}$.

4. Etudier la convergence de la suite $u_n = \displaystyle\prod_{k=1}^{n}(1 + \frac{k^2}{n^2})^{k/n^2}$.

5. Soit D une droite du plan et $(P_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite de points du plan. Montrer que, pour chaque $n \in \mathbf{N}$, l'ensemble

$$E_n = \{Q \in D \,|\, ||Q - P_n|| \in \mathbf{Q}\}$$

des points de D dont la distance à P_n est un nombre rationnel est dénombrable. Montrer qu'il existe un point Q de D dont les distances à tous les points P_n sont irrationnelles,

$$(\exists Q \in D) \quad (\forall n \in \mathbf{N}) \quad (||Q - P_n|| \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}).$$

II

On définit une suite de réels comme suit. Si $n \geq 1$ est un entier dont l'écriture décimale est $n = a_{k-1}a_{k-2}\dots a_0$, on pose $u_n = \dfrac{1}{k}(a_{k-1} + a_{k-2} + \cdots + a_0)$. Autrement dit, u_n est la moyenne des chiffres de n. Par exemple, $u_{135} = \frac{1}{3}(1+3+5) = 3$.

1. Calculer u_{10^k} pour $k \in \mathbf{N}$. Calculer u_{90}, u_{9900}, u_{999000}.

2. Vérifier que pour tout $n \geq 1$, $0 \leq u_n \leq 9$. La suite $(u_n)_{n\geq 1}$ prend-elle la valeur 0 ?

3. La suite (u_n) possède-t-elle des valeurs d'adhérence ? Montrer que si x est une valeur d'adhérence de la suite (u_n), alors $0 \leq x \leq 9$.

4. Montrer que $9/2$ est valeur d'adhérence de la suite (u_n).

5. Montrer que la borne inférieure de la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ est 0. Montrer que l'ensemble $E = \{u_n \mid n \geq 1\}$ possède un plus grand élément mais ne possède pas de plus petit élément.

6. Soit $r \in]0,9[$ un nombre décimal, $r = p\,10^{-k}$ où $p \in \mathbf{N}$. Montrer qu'il existe un entier n à 10^k chiffres tel que $u_n = r$. Montrer que r est valeur d'adhérence de la suite (u_n).

7. Soit $x \in]0,9[$. En utilisant une suite (r_k) de nombres décimaux qui converge vers x, montrer que x est valeur d'adhérence de la suite $(u_n)_{n\geq 1}$.

Université Paris-Sud
S4MIAS

2005
Option Topologie

Corrigé de l'examen de topologie, 2ème session
8 septembre 2005, durée 3h

I

1. Soit g la fonction continue sur $[0,1]$ définie par $g(x) = f(x) - x$. Montrons d'abord l'existence d'une solution pour l'équation $g(x) = 0$. On a $g(0) = f(0) \geq 0$ et $g(1) = f(1) - 1 \leq 0$. Comme f est décroissante, il y a trois cas.

- Si $g(0) = 0$, alors $c = 0$ convient.
- Si $g(1) = 0$, alors $c = 1$ convient.
- Sinon, $g(0) > 0 > g(1)$, et le théorème des valeurs intermédiaires donne un $c \in]0,1[$ tel que $g(c) = 0$.

D'autre part, g est strictement décroissante. En effet, si $0 \leq x < y \leq 1$, $g(y) - g(x) = f(y) - f(x) - y + x \leq x - y < 0$. Par conséquent, l'équation $g(x) = 0$ possède au plus une solution. On conclut qu'il existe un unique $c \in]0,1[$ tel que $f(c) = c$.

2. On constate que $f_n(0) = 1 > 0$ et $f_n(\pi) = -\pi + 1 < 0$. Comme f_n est continue sur $[0,\pi]$, le théorème des valeurs intermédiaires donne un $x_n \in [0,\pi]$ tel que $f_n(x_n) = 0$.

La suite (x_n) étant bornée, le théorème de Bolzano-Weierstrass permet d'extraire une sous-suite $x_{\phi(n)}$ qui converge vers un réel ℓ.

On majore $|\frac{1}{n}\sin(nx_n)| \leq \frac{1}{n}$ qui tend vers 0, donc $\frac{1}{n}\sin(nx_n)$ tend vers 0.

Or $f_{\phi(n)}(x_{\phi(n)}) = 0$, donc $x_{\phi(n)} - 1 = \frac{1}{\phi(n)}\sin(\phi(n)x_{\phi(n)})$ tend vers 0. On conclut que $x_{\phi(n)}$ tend vers 1, i.e. que $\ell = 1$.

3. On calcule $f'(x) = \dfrac{-2x}{(1+x^2)^2}$. Comme $1 + x^2 - 2|x| = (1-|x|)^2 \geq 0$, $2|x| \leq 1 + x^2$, donc

$$|f'(x)| = \frac{2|x|}{(1+x^2)^2} \leq \frac{1+x^2}{(1+x^2)^2} = \frac{1}{1+x^2} \leq 1.$$

La dérivée f' étant bornée, f est lipschitzienne donc uniformément continue.

4. Soit $v_n = \ell n(u_n)$. Alors

$$\begin{aligned} v_n &= \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n^2}\ell n(1 + \frac{k^2}{n^2}) \\ &= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(\frac{k}{n}), \end{aligned}$$

où $f(x) = x\ell n(1+x^2)$. Comme f est continue sur $[0,1]$, le théorème de convergence des sommes de Riemann s'applique, et v_n converge vers

$$\begin{aligned} \int_0^1 f(x)\,dx &= \int_0^1 x\ell n(1+x^2)\,dx \\ &= \int_1^2 \frac{1}{2}\ell n(t)\,dt \\ &= \frac{1}{2}[t\ell n(t) - t]_1^2 = \ell n(2) - \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Par continuité de la fonction exponentielle, u_n converge vers $\exp(\ell n(2) - \frac{1}{2}) = 2/\sqrt{e}$.

5. Pour chaque rationnel r, il y a au plus deux points de D qui sont à distance r de P_n, ce sont les points d'intersection (éventuels) de D et du cercle de centre P_n et de rayon r. Comme $\mathbf{Q}$ est dénombrable, cela fait un ensemble dénombrable de points. Pour le prouver de façon plus rigoureuse, on introduit la projection H_n de P_n sur D. H_n divise D en deux demi-droites D^+ et D^-. Les applications $D^\pm \cap E_n \to \mathbf{Q}$, $Q \mapsto ||Q - P_n||$ sont injectives, donc les ensembles $D^+ \cap E_n$ et $D^- \cap E_n$ sont dénombrables.

La réunion des E_n est dénombrable, alors que D ne l'est pas. Choisissons un point $Q \in D \setminus \bigcup_{n\in\mathbf{N}} E_n$. Alors pour tout n, $||Q - P_n|| \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}$.

II

1. On trouve $u_{10^k} = \frac{1}{k+1}$ pour $k \in \mathbf{N}$, et $u_{90} = u_{9900} = u_{999000} = \frac{9}{2}$.

2. Tous les chiffres décimaux de n étant compris entre 0 et 9, il en est de même de leur moyenne u_n. Pour que la moyenne u_n soit 0, il faut que tous les chiffres soient 0, ce qui est impossible pour $n \geq 1$.

3. Comme la suite (u_n) est bornée, d'après le théorème de Bolzano-Weierstrass, elle possède des valeurs d'adhérence. Soit x une valeur d'adhérence de la suite (u_n). Alors il existe une suite extraite $(u_{\phi(n)})$ qui converge vers x. Comme, pour tout n, $0 \leq u_{\phi(n)} \leq 9$, on trouve en passant à la limite que $0 \leq x \leq 9$.

4. En extrapolant 1, on constate que pour toutes les valeurs de n de la forme $n = 9.10^{k+1} + \cdots + 9.10^{2k}$, on a $u_n = 9/2$. On pose donc $\phi(k) = 9.10^{k+1} + \cdots + 9.10^{2k}$. La suite extraite $(u_{\phi(k)})$, extraite de (u_n), est constante, donc elle converge vers $9/2$. Par conséquent, $9/2$ est valeur d'adhérence de la suite (u_n).

5. D'après 2, 0 est un minorant de la suite (u_n). D'après 1, la suite extraite (u_{10^k}) tend vers 0. Par conséquent, 0 est la borne inférieure de l'ensemble E. D'après 2, $0 \notin E$, donc E n'admet pas de plus petit élément. En revanche, $u_9 = 9 \in E$ et 9 est un majorant de E donc 9 est le plus grand élément de E.

6. Soit $r = p\,10^{-k}$. On cherche un entier n à 10^k chiffres tel que $u_n = r$. Il suffit que la somme des chiffres soit égale à p. Soit $p = 9q + b$ la division euclidienne de p par 9. Comme $r < 9$, $p < 9\,10^k$ donc $q < 10^k$, On peut donc former un nombre n à 10^k chiffres qui contient q fois le chiffre 9, une fois le chiffre b, les autres chiffres étant des zéros. La somme des chiffres vaut $q \times 9 + 1 \times b = p$, donc $u_n = r$.

On remarque que $r = 10p \times 10^{-k-1} = 100p \times 10^{-k-2}$, etc... En général, si $m \in \mathbf{N}$, $r = 10^m p \times 10^{-k-m}$. Il existe un entier $n = \phi(m)$ à 10^{k+m} chiffres tel que $u_n = r$. Alors la suite extraite $(u_{\phi(m)})$ est constante, donc converge vers r. Cela prouve que r est valeur d'adhérence de la suite (u_n).

7. Soit (r_k) une suite de nombres décimaux qui converge vers x. Comme $0 < x < 9$, on peut supposer que $r_k \in]0, 9[$. D'après 6, il existe des entiers n arbitrairement grands tels que $u_n = r_k$. On peut en choisir un de sorte que $n = \phi(k)$ soit fonction croissante de k. Alors la suite extraite $(u_{\phi(k)})$ tend vers x. On conclut que x est valeur d'adhérence de la suite $(u_n)_{n\geq 1}$.