Université Paris-Sud 2005
S4MIAS Option Topologie

Examen de Topologie

16 juin 2005, durée 3h

Documents et calculettes interdits

Barême indicatif : I=9, II=11

I

1. Soit f un homéomorphisme de $[0,1]$ sur $[0,1]$ tel que $f(0)=0$. Montrer que f est strictement croissante sur $[0,1]$.

2. Etudier la suite définie pour $n \geq 1$ par

$$u_n = \frac{1}{\sqrt{n^2+n}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2n}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n^2}}.$$

3. Soit f une fonction uniformément continue sur $\mathbf{R}$. Montrer que la fonction g définie sur $\mathbf{R}$ par $g(x) = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{t}} f(t+x)\,dt$ est continue.

4. Soit $(D_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite de droites du plan. Montrer qu'il existe un point du plan qui n'appartient à aucune des droites D_n.

5. Identifier $A = \bigcap_{n\in\mathbf{N}^*}]-\frac{1}{n}, 2+\frac{1}{n}[$. A-t-on une contradiction avec les propriétés des ouverts ?

II

Soit $f : [a,b] \to \mathbf{R}$ une fonction deux fois dérivable. On suppose que $f'' \leq 0$. On pose, pour $x \in [a,b]$, $g(x) = f(x) - f(a) - (x-a)\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

1. Montrer que la dérivée g' est décroissante au sens large.

2. Soit $m = \inf_{[a,b]} g$. On suppose que $m < 0$.

2.a. Montrer qu'il existe un point $c \in [a,b]$ tel que $g(c) = m$. Montrer que $c \in]a,b[$.

2.b. Montrer que $g'(c) = 0$. En déduire que g est croissante au sens large sur $[a,c]$ et décroissante au sens large sur $[c,b]$.

2.c. Quelle conclusion peut-on en tirer ?

3. En déduire que pour tout $x \in [a,b]$,

$$f(x) \geq f(a) + (x-a)\frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$

4. Montrer que

$$\int_a^b f(t)\,dt \geq (b-a)\frac{f(a)+f(b)}{2}.$$

5. Montrer que, pour tout $k = 1, \dots, n$,

$$\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} f(t)\,dt \geq \frac{1}{2n}(f(\frac{k-1}{n}) + f(\frac{k}{n})).$$

6. En déduire que

$$\int_0^1 f(t)\,dt \geq \frac{1}{2n}(f(0) - f(1)) + \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(\frac{k}{n}).$$

7. Soit f la fonction définie sur $[0,1]$ par $f(x) = \ell n(1+x)$.
Calculer $\int_0^1 f(t)\,dt$. En déduire une majoration du quotient $(2n)!/n!$.

Université Paris-Sud 2005
S4MIAS Option Topologie

Corrigé de l'examen de topologie
16 juin 2005, durée 3h

I

1. Soient $x < y$ deux points de $[0,1]$. Raisonnons par l'absurde. Supposons que $f(x) \geq f(y)$. Comme f est injective, nécessairement $f(x) \neq f(y)$ et $f(y) \neq f(0) = 0$, donc $f(0) < f(y) < f(x)$. D'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe $c \in]0, x[$ tel que $f(c) = f(y)$. Or $c < x < y$, donc $c \neq y$, ce qui contredit l'hypothèse que f est injective. On conclut que $f(x) < f(y)$. On a donc montré que f est strictement croissante.

2. On constate que u_n est une somme de Riemann relative à la fonction définie sur $[0,1]$ par $f(x) = (1+x)^{-1/2}$,

$$u_n = \frac{1}{n}(f(\frac{1}{n}) + f(\frac{2}{n}) + \cdots + f(\frac{n}{n})).$$

Comme f est continue, u_n converge vers

$$\int_0^1 f(t)\,dt = [2(1+x)^{1/2}]_0^1 = 2(\sqrt{2}-1).$$

3. Soit $a \in \mathbf{R}$. Soit $\epsilon > 0$. Par hypothèse, il existe $\alpha > 0$ tel que si x, $x' \in \mathbf{R}$ et $|x - x'| < \alpha$, alors $|f(x) - f(x')| < \epsilon$. Si $|x - a| < \alpha$, alors pour tout $t \in [0,1]$, $|(x+t) - (a+t)| < \alpha$ donc $|f(x+t) - f(a+t)| < \epsilon$. Par conséquent

$$\begin{aligned} |g(x) - g(a)| &\leq \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{t}} |f(x+t) - f(a+t)|\,dt \\ &< \epsilon \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{t}}\,dt = 2\epsilon. \end{aligned}$$

Ceci montre que g est continue en a pour tout $a \in \mathbf{R}$.

4. L'ensemble des droites passant par l'origine de $\mathbf{R}^2$ est équipotent à $\mathbf{R}$ et donc non dénombrable. Par conséquent, on peut choisir une droite D passant par l'origine qui est distincte de toutes les (D_n). Notons $\mathcal{N}$ l'ensemble des $n \in \mathbf{N}$ tels que D_n coupe D. Il est dénombrable. Pour $n \in \mathcal{N}$, D_n coupe D en exactement un point. On obtient ainsi un sous-ensemble dénombrable $\mathcal{P}$ de points de D. Comme D n'est pas dénombrable, il existe un point P de D qui n'appartient pas à $\mathcal{P}$. Alors P n'appartient à aucune des droites D_n.

5. Comme $-\frac{1}{n} < 0$ et $2 < 2 + \frac{1}{n}$, tous les intervalles $]-\frac{1}{n}, 2 + \frac{1}{n}[$ contiennent $[0,2]$ donc il en est de même de leur intersection A. Réciproquement, si $x \in A$, alors pour tout $n \in \mathbf{N}^*$,

$$-\frac{1}{n} < x < 2 + \frac{1}{n}.$$

En passant à la limite, il vient $0 \leq x \leq 2$, donc $A \subset [0,2]$. On conclut que $A = [0,2]$.

C'est un fermé. Certes, une intersection finie d'ouverts est un ouvert, mais rien n'interdit à une intersection infinie d'ouverts d'être fermée.

II

1. Comme $g'' = f'' \leq 0$, la dérivée g' est décroissante au sens large.

2.a. Comme g est continue sur l'intervalle fermé borné $[a,b]$, elle atteint sa borne inférieure m. Il existe donc un point $c \in [a,b]$ tel que $g(c) = m$.

Comme $g(a) = g(b) = 0$, si on suppose $m < 0$, c n'est pas égal à a ou à b, donc $c \in]a,b[$.

2.b. Comme dans la preuve du théorème de Rolle, on écrit que pour tout $x \in [a,c[$ et tout $y \in]c,b]$,

$$\frac{g(x)-g(c)}{x-c} \leq 0 \leq \frac{g(y)-g(c)}{y-c},$$

d'où, en passant à la limite,

$$g'(c-) \leq 0 \leq g'(c+)$$

soit $g'(c) = 0$.

Comme g' est décroissante au sens large, $g' \geq g'(c) = 0$ sur $[a,c]$ (donc g est croissante au sens large sur $[a,c]$) et $g' \leq g'(c) = 0$ sur $[c,b]$ (donc g est décroissante au sens large sur $[c,b]$).

2.c. Par conséquent, g atteint son maximum en c. Si $\sup_{[a,b]} g = g(c) = \inf_{[a,b]} g$, c'est que g est constante, ce qui contredit l'hypothèse $m < 0$. On conclut que $m \geq 0$, i.e. que $g \geq 0$ sur $[a,b]$.

3. Vu la définition de g, l'inégalité $g \geq 0$ se traduit par

$$f(x) \geq f(a) + (x-a)\frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$

4. On intègre l'inégalité précédente.

$$\begin{aligned}
\int_a^b f(t)\,dt &\geq \int_a^b (f(a) + (t-a)\frac{f(b)-f(a)}{b-a})\,dt \\
&= (b-a)f(a) + \frac{(b-a)^2}{2}\frac{f(b)-f(a)}{b-a} \\
&= (b-a)\frac{f(a)+f(b)}{2}.
\end{aligned}$$

5. On peut appliquer l'inégalité précédente sur l'intervalle $[\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n}]$,

$$\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} f(t)\,dt \geq \frac{1}{n}\frac{1}{2}(f(\frac{k-1}{n}) + f(\frac{k}{n})).$$

6. En additionnant les inégalités de la question 5, il vient

$$\begin{aligned}
\int_0^1 f(t)\,dt &= \sum_{k=1}^{n} \int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} f(t)\,dt \\
&\geq \frac{1}{2n}\sum_{k=1}^{n}(f(\frac{k-1}{n}) + f(\frac{k}{n})) \\
&= \frac{1}{2n}f(0) + \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1} f(\frac{k}{n}) + \frac{1}{2n}f(1) \\
&= \frac{1}{2n}(f(0)-f(1)) + \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(\frac{k}{n}).
\end{aligned}$$

7. On calcule $f''(x) = -1/(1+x)^2 \leq 0$ sur $[0,1]$. On peut donc appliquer les résultats des questions précédentes. On intègre par parties.

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \ell n(1+t)\,dt &= \int_1^2 \ell n(t)\,dt \\
&= [t\ell n(t)]_1^2 - \int_1^2 dt \\
&= 2\ell n(2) - 1.
\end{aligned}$$

On part de

$$\frac{(2n)!}{n!} = 2n(2n-1)\cdots(n+1) = n^n(1+\frac{1}{n})(1+\frac{2}{n})\cdots(1+\frac{n}{n})$$

d'où

$$\begin{aligned}
\ell n(2n(2n-1)\cdots(n+1)) &= n\ell n(n) + \sum_{k=1}^{n} f(\frac{k}{n}) \\
&\leq n\ell n(n) + n\int_0^1 \ell n(1+t)\,dt + \frac{1}{2}\ell n(2) \\
&= n\ell n(n) + n(2\ell n(2) - 1) + \frac{1}{2}\ell n(2) \\
&= n(\ell n(4ne^{-1}) + \ell n(\sqrt{2}).
\end{aligned}$$

En prenant l'exponentielle, on trouve que

$$2n(2n-1)\cdots(n+1) \leq \sqrt{2}(4n)^n e^{-n}.$$