

## Devoir 3, à rendre la semaine du 16 mai 2005

**Exercice 1.** Soit  $f$  une fonction uniformément continue sur  $\mathbb{R}$ . Pour  $t \in \mathbb{R}$ , on pose  $f_t(x) = f(x + t)$ .

1. Soit  $u_n$  une suite convergente. Montrer que la suite de fonctions  $f_{u_n}$  converge uniformément sur  $\mathbb{R}$ .
2. La suite de fonctions définies sur  $\mathbb{R}$  par  $g_n(x) = (x + \frac{1}{n})^2$  converge-t'elle uniformément sur  $\mathbb{R}$  ?
3. On définit une fonction  $h$  sur  $\mathbb{R}$  par  $h(t) = \int_0^1 f_t(x) dx$ . Montrer que  $g$  est continue.

**Exercice 2.** Etudier la suite définie pour  $n \geq 1$  par

$$v_n = \frac{1}{4n^2 - 1} + \frac{1}{4n^2 - 4} + \cdots + \frac{1}{4n^2 - n^2}.$$

**Exercice 3.** Soit  $P_1, P_2, \dots, P_n, \dots$  une suite de points du plan. Montrer qu'il existe une droite du plan qui ne contient aucun des points  $P_n$ .