Université de Paris-Sud XI, Orsay — Année universitaire 2004/2005

DEUG S4 MIAS, Option Topologie
Devoir No. 2

Exercice 1. Pour $x \in \mathbb{R}$, on définit $f(x)$ par:

$$f(x) = \begin{cases} xe^{-x}\sin(\frac{1}{x}) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

(i) f est-elle continue sur $[-1,1]$?

(ii) f est-elle uniformément continue sur $[-1,1]$?

(iii) f est-elle continue sur $[1,\infty[$?

(iv) f est-elle uniformément continue sur $[1,\infty[$?

(v) f est-elle continue sur $]-\infty,-1]$?

(vi) f est-elle uniformément continue sur $]-\infty,1[$?

Exercice 2. On va démontrer la proposition suivante :

Proposition 1

Soit $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ une fonction telle que $f(t) \to \infty$ et $f'(t) \to 0$ lorsque t tend vers $+\infty$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, posons $a_n = \sin(f(n))$. Alors tout point de $[-1,1]$ est une valeur d'adhérence de $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

A : Soit $\theta \in [-\pi,\pi]$. Soit $\epsilon > 0$. On va montrer que, pour tout $N \in \mathbb{N}$, il existe $n \geqslant N$ et $k \in \mathbb{N}$ tel que :

$$|(\theta + 2\pi k) - f(n)| < \epsilon.$$

(i) Montrer que $|f(n+1) - f(n)|$ converge vers 0 lorsque n tend vers l'infini.

(ii) Montrer qu'il existe $N_1 > N$ tel que pour $n \geqslant N_1$:

$$|f(n+1) - f(n)| < \epsilon.$$

(iii) Montrer qu'il existe $n_1, n_2 \geqslant N_1$ tel que :

$$f(n_2) - f(n_1) > 2\pi.$$

(iv) Montrer qu'il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que :

$$f(n_1) \leqslant \theta + 2\pi k \leqslant f(n_2).$$

(v) Montrer qu'il existe n tel que $n_1 \leqslant n \leqslant n_2$ et que :

$$|(\theta + 2\pi k) - f(n)| < \epsilon.$$

B : A l'aide de la partie **A** on va prouver la proposition.

(vi) En utilisant la continuité de la fonction sin, et le résultat précédent, montrer que, pour tout $\delta > 0$ et pour tout $N \in \mathbb{N}$ il existe $n \geqslant N$ tel que:

$$|\sin(\theta) - a_n| < \delta.$$

(vii) En déduire que pour tout $\theta \in [-\pi, \pi]$ il existe une sous-suite de $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge vers $\sin(\theta)$.

(viii) En déduire que tout point de $[-1, 1]$ est une valeur d'adhérence de $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

(ix) Soit x une valeur d'adhérence de $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Montrer que $x \in [-1, 1]$.

Il en découle que l'ensemble des valeurs d'adhérence de $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ coïncide avec l'intervalle $[-1, 1]$.

C : On va étudier quelques exemples et contre-exemples.

(x) Pour tout n, posons $b_n = \sin(\sqrt{n})$. Montrer que l'ensemble des valeurs d'adhérence de $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ coïncide avec l'intervalle $[-1, 1]$.

(xi) Pour tout n, posons $c_n = \sin(\pi\frac{n-1}{n+1})$. Montrer que $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0. Quelles sont les valeurs d'adhérence de cette suite ? Est-ce en contradiction avec la proposition ?