Université de Paris-Sud Orsay Année universitaire 2004-2005

DEUG S4 MIAS, Option Topologie
Liste d'exercices 4

Exercice 1. Construire une bijection de $\mathbb{Z}$ sur $\mathbb{N}$.

Exercice 2. Soient E_1 et E_2 des sous-ensembles dénombrables d'un ensemble E. Montrer que $E \cup E'$ est dénombrable.

Exercice 3. Soit $]a, b[$ un intervalle ouvert. Existe-t'il une bijection de $\mathbb{R}$ sur $]a, b[$?

Exercice 4. Soit $[a, b]$ un intervalle fermé borné. Existe-t'il une bijection de $[a, b]$ sur $\mathbb{R}$?

Exercice 5. Montrer que l'ensemble des nombres réels transcendants est dense dans $\mathbb{R}$, i.e., on trouve des nombres transcendants dans tout intervalle ouvert.

Exercice 6. On dit qu'une droite D du plan est *rationnelle* si elle possède une équation de la forme $ax + by + c = 0$ avec a, b et c rationnels. Montrer qu'il existe un cercle du plan dont aucune tangente n'est rationnelle.

Exercice 7. Le plan $\mathbb{R}^2$ est-il équipotent à $\mathbb{R}$? La réunion de deux droites du plan est-elle équipotente à $\mathbb{R}$?

Exercice 8. Identifier $\displaystyle\bigcup_{n=2}^{+\infty} \left[\frac{1}{n}, 3 - \frac{1}{n}\right]$. A-t-on une contradiction avec les propriétés des fermés ?

Exercice 9. Montrer que $[0, 1]$ et $]0, 1[$ ne sont pas homéomorphes.

Exercice 10. Montrer que les intervalles $]0, 1]$ et $]0, 1[$ ne sont pas homéomorphes.

Exercice 11. Soit Ω_j $(j \in \mathcal{J})$ une famille quelconque d'ouverts dont la réunion contient l'intervalle fermé $[0, 1]$. On va démontrer qu'il existe un réel $\delta > 0$ possédant la propriété suivante :

Pour tout $x \in [0, 1]$, il existe au moins un ouvert Ω_j (dépendant évidemment de x) qui contient entièrement l'intervalle ouvert $]x - \delta, x + \delta[$.

1 - Ecrire cette propriété et sa négation avec des quantificateurs.

2 - Ecrire cette négation en introduisant une suite de points de $[0, 1]$. On va raisonner par l'absurde, en supposant vraie cette négation.

3 - En utilisant la compacité de $[0, 1]$, montrer que l'on arrive à une impossibilité.

4 - En déduire que l'on peut trouver **un nombre fini** d'ouverts $\Omega_1, \cdots, \Omega_m$ dont la réunion contient $[0, 1]$.

Exercice 12. Soit A une partie non vide de $\mathbb{R}$. Pour tout x réel on pose

$$f(x) = \inf\{|x-a|,\ a \in A\}$$

1 - Calculer f dans le cas $A =]0,1]$.

2 - En partant de l'inégalité triangulaire $|x-a| \leq |x-y| + |y-a|$, montrer que :
- $f(x) \leq |x-y| + |y-a|$ (pour tous $x, y \in \mathbb{R}$ et tout $a \in A$)
- $f(x) \leq |x-y| + f(y)$ (pour tous réels x, y).

3 - En déduire un encadrement de $|f(x) - f(y)|$ montrant que f est continue sur $\mathbb{R}$.

4 - On suppose A fermé. Montrer que $f(x) = 0$ si et seulement si $x \in A$.

5 - Soit $\varepsilon > 0$ donné. Montrer que l'ensemble des $x \in \mathbb{R}$ tels que $f(x) < \varepsilon$ est un ouvert contenant A.

6 - Soit A un fermé et B un compact non vides disjoints de $\mathbb{R}$. En étudiant la fonction f, montrer qu'il existe un réel m strictement positif tel que

$$(\forall a \in A)(\forall b \in B)(|a-b| \geq m)$$

7 - Soit A et B deux compacts disjoints. Montrer qu'il existe un ouvert U contenant A et un ouvert V contenant B tels que $U \cap V = \emptyset$.