DEUG S4 MIAS, Option Topologie
Liste d'exercices 3

Exercice 1.

(i) Donner la définition d'une suite de Cauchy, puis celle d'une suite qui n'est pas de Cauchy.

(ii) Soit $S_n := \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$. Vérifier que la série harmonique $\sum_{k\geq 1} \frac{1}{k}$ diverge en minorant la quantité $S_{2n} - S_n$.

Exercice 2. Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ une suite de réels de $[-1, 1]$ vérifiant :

$$\forall m > n \geq 1\,,\ |u_{m+1} - u_{n+1}| \leq e^{-1/\sqrt{n+1}}|u_m - u_n|.$$

Montrer que la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ converge. Pour commencer, on observera l'on a pour $p \geq q$:

$$|u_p - u_q| \leq e^{-1/\sqrt{q}}|u_{p-1} - u_{q-1}| \leq e^{-1/\sqrt{q}}e^{-1/\sqrt{q-1}} \dots e^{-1/\sqrt{1}}|u_{p-q} - u_0|.$$

Que peut-on dire de la série $\sum_{k\geq 1} \frac{1}{\sqrt{k}}$?

Exercice 3. Soit $(f_n)_{n\geq 0}$ une suite de fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, dérivables. On suppose que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in \mathbb{R}$, on a $|f_n'(x)| \leq 10$. On suppose de plus que pour tout $q \in \mathbb{Q}$, la suite $(f_n(q))_{n\geq 0}$ converge.

(i) Estimer $|f_n(x) - f_n(y)|$ pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ et tout $n \in \mathbb{N}$.

(ii) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, la suite $(f_n(x))_{n\geq 0}$ est de Cauchy. On pourra utiliser la densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$:

$$\forall \epsilon > 0\,,\ \exists q \in \mathbb{Q}\,,\ |x - q| < \epsilon.$$

On pose $f(x) := \lim_{n\to+\infty} f_n(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

(iii) Vérifier que l'on a :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2\,,\ |f(x) - f(y)| \leq 10|x - y|.$$

La fonction f est-elle toujours dérivable ? continue ?

Exercice 4. Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, k-Lipschitzienne, avec $k < 1$. On a donc :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2\,,\ |f(x) - f(y)| \leq k|x - y|.$$

(i) Donner des exemples.

(ii) Soit $x \in \mathbb{R}$. Montrer que pour tout $n \geq 1$, on a :

$$|f^{n+1}(x) - f^n(x)| \leq k|f^n(x) - f^{n-1}(x)|$$

où $f^n = f \circ \ldots \circ f$ itérée n fois. En déduire que la suite définie par $x_0 = x$ et $x_{n+1} = f(x_n)$ pour $n \geq 0$ est de Cauchy. Soit l sa limite.

(iii) Montrer que l est un point fixe de f, i.e. $f(l) = l$. La fonction f possède-t-elle d'autres points fixes ?

(iv) En déduire que pour tout $y \in \mathbb{R}$, la suite définie par $y_0 = y$ et $y_{n+1} = f(y_n)$ converge vers l.

Exercice 5. Calculer les limites des suites de termes généraux :

(i)

$$u_n := \sum_{k=1}^{n} \frac{n}{n^2 + k^2}$$

(ii)

$$v_n := \frac{\sqrt{1} + \cdots + \sqrt{n-1}}{n\sqrt{n}}$$

(iii)

$$w_n := \left[\prod_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{k}{n}\right)^k\right]^{1/n^2}$$

Exercice 6. Soient $f, g : [0,1] \to \mathbb{R}$ deux fonctions continues. On pose

$$T_n := \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) g\left(\frac{k+1}{n}\right)$$

et

$$S_n := \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) g\left(\frac{k}{n}\right).$$

(i) Soit $\epsilon > 0$. Montrer qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que :

$$\forall n \geq n_0\,,\ \forall k \in \{1, \ldots, n-1\}\,,\ |g(\frac{k+1}{n}) - g(\frac{k}{n})| < \epsilon.$$

(ii) En déduire que $|S_n - T_n| < \epsilon$ pour $n \geq n_0$. Quelle est la limite de $(T_n)_n$?