Université Paris-Sud XI, Orsay Année universitaire 2004/2005

DEUG S4 MIAS, Option Topologie
Liste d'exercices 2

Exercice 1. Soit $(u_n)_{n\geqslant 0}$ une suite de réels telle que les sous-suites (u_{2n}), (u_{2n+1}) et (u_{3n}) convergent. Montrer que la suite (u_n) converge.

Exercice 2. (i) Montrer que pour tout entier $n \geqslant 1$, il existe $k_n \in \mathbb{N}$ et $0 \leqslant p_n < 2^{k_n}$ uniques tels que $n = 2^{k_n} + p_n$.

(ii) On pose $u_n := p_n/2^{k_n}$. Verifier que (u_n) est bornée. Trouver une sous-suite qui converge vers 0 et une autre qui converge vers 1.

(iii) Soit $x \in [0,1]$. Montrer qu'il existe une sous suite de (u_n) qui converge vers x (considérer la partie entière du réel $2^n x$).

Exercice 3. Soit $(u_n)_{n\geqslant 0}$ une suite bornée de réels.

(i) En utilisant un théorème du cours, montre que la suite (u_n) possède au moins une valeur d'adhérence.

A : On va montrer que (u_n) converge si et seulement si elle ne possède qu'une seule valeur d'adhérence.

(iii) Montrer que si (u_n) converge vers x, alors toute sous-suite de (u_n) converge vers x. En déduire que (u_n) ne possède qu'une seule valeur d'adhérence.

Supposons maintenant que (u_n) ne possède qu'une seule valeur d'adhérence. Soit x la valeur d'adhérence de (u_n).

(iv) Supposons que (u_n) ne converge pas vers x. Montrer qu'il existe $\epsilon > 0$ et une sous-suite $(u_{\phi(n)})$ telle que, pour tout n:

$$\left|u_{\phi(n)} - x\right| \geqslant \epsilon.$$

(v) Montrer que la suite $(u_{\phi(n)})$ est bornée.

(vi) En utilisant un théorème du cours, montrer que $(u_{\phi(n)})$ a au moins une valeur d'adhérence dans $\mathbb{R}$. Soit y une valeur d'adhérence de $(u_{\phi(n)})$.

(vii) En utilisant une sous-suite de $(u_{\phi(n)})$ qui converge vers y, montrer que $|y - x| \geqslant \epsilon$, et donc que $y \neq x$.

(viii)Montrer que y est une valeur d'adhérence de (u_n) et en déduire une contradiction et conclure.

B : On suppose de plus que $\operatorname{Lim} e^{iu_n} = 1$ et $\operatorname{Lim} e^{i\sqrt{2}u_n} = 1$.

(ix) Soit x la limite de (u_n). Montrer que $e^{ix} = 1$ et $e^{i\sqrt{2}x} = 1$.

(x) En déduire que $x = 0$.

Exercice 4. Soit $[a, b]$ un intervalle fermé et borné dans $\mathbb{R}$. Soit $f : [a, b] \to]0, +\infty[$ une fonction continue et positive sur $[a, b]$. On veut montrer qu'il existe $\lambda > 0$ tel que $f(t) \geqslant \lambda$ pour tout $t \in [a, b]$.

(i) Supposons le contraire. Montrer qu'il existe une suite $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $f(t_n) \to 0$.

(ii) Montrer qu'il existe une sous-suite de $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge dans $[a, b]$.

(iii) Montrer comment on peut utiliser cette sous-suite pour obtenir une contradiction.

On vient de montrer alors qu'il existe $\lambda > 0$ tels que $f(t) \geqslant \lambda$ pour tout $t \in [a, b]$. On dit que f est **minorée** par un réel positif sur $[a, b]$.

(iv) Montrer qu'il existe $\Lambda > 0$ tel que $f(t) \leqslant \Lambda$ pour tout $t \in [a, b]$.

On dit que f est **majorée** sur $[a, b]$.

(v) Trouver une fonction $f :]0, 1] \to]0, +\infty[$ qui n'est pas majorée sur $]0, 1]$. Trouver une fonction $f :]0, 1] \to]0, \infty[$ qui n'est pas minorée par un réel positif sur $]0, 1]$.

Exercice 5. * Soit $[a, b]$ un intervalle fermé et borné dans $\mathbb{R}$. Soit X un sous-ensemble de $\mathbb{R}$. Soit $f : [a, b] \to X$ une fonction continue et bijective. Soit $X = f([a, b])$ l'image de f.

(i) Définissons $\varphi : [0, \pi] \to [-1, 1]$ par $\varphi(t) = Cos(t)$. Montrer que φ est bijective.

(ii) Définissons $\psi : [0, 4] \to [0, 16]$ par $\psi(t) = t^2$. Montrer que ψ est bijective.

Soit $g : X \to [a, b]$ l'inverse de f. On veut montrer que g est continue.

(iii) Supposons le contraire. En utilisant la définition de la continuité, montrer qu'il existe $x_0 \in X$ un point dans X et $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite dans X qui converge vers x_0 tels que $(g(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas vers $g(x_0)$.

(iv) En utilisant la définition de la convergence, montrer qu'il existe un réel $\epsilon > 0$ et une sous-suite $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $|g(y_n) - g(x_0)| \geqslant \epsilon$ pour tout n.

(v) Montrer qu'il existe un point $p \in [a, b]$ et une sous-suite $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $(g(z_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers p.

(vi) Montrer que $|p - g(x_0)| \geqslant \epsilon$.

Il s'ensuit que $p \neq g(x_0)$ et donc que $f(p) \neq f(g(x_0)) = x_0$. En même temps, on sait que $f(g(z_n)) = z_n$ pour tout n.

(vii) En rappelant que $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers x_0, montrer que $f(p) = x_0$ pour obtenir une contradiction et conclure.

Exercice 6. Soit $a \in]0,6[$ un paramètre et $f_a : [0,1] \to \mathbb{R}$ définie par $f_a(x) = x^4 + x^2 - ax$.

(i) Montrer que, pour tout a, $f'_a(a)$ est strictement croissante, $f'_a(0) = -a$ et $f'_a(1) = 6-a$. Montrer qu'il existe un unique point $x(a) \in]0,1[$ tel que $f'(x(a)) = 0$. Montrer que :

$$f(x(a)) = \operatorname*{Inf}_{t \in [0,1]} f_a(t)$$

On pose $g(a) = \mathrm{Inf}_{t \in [0,1]} f_a(t)$. On se propose de montrer que les fonctions $a \mapsto x(a)$ et $a \mapsto g(a)$ sont continues sur $]0,6[$.

(ii) Soit $a \in]0,6[$ et (a_n) une suite de $]0,6[$ qui converge vers a. En considérant $f'_{a_n}(x(a_n))$, montrer que $x(a)$ est l'unique valeur d'adhérence de $(x(a_n))$.

(iii) Conclure à l'aide de l'exercice 3.

Exercice 7. (i) Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$ dérivable, à dérivée bornée. Montrer que f est uniformément continue sur I.

(ii) Les fonctions suivantes sont-elles uniformément continues ? $\sin(x)$ sur $\mathbb{R}$, $\sqrt{x}$ sur $\mathbb{R}^+$, $\mathrm{Ln}(x)$ sur $]0,1[$ et $\mathrm{Ln}(x)$ sur $[1,+\infty[$.

Exercice 8. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue admettant des limites en $+\infty$ et $-\infty$. Montrer que f est uniformément continue sur $\mathbb{R}$.

Exercice 9. (i) Montrer que si (u_n) est de Cauchy, alors on a $\mathrm{Lim}_{n\to+\infty}(u_{n+k} - u_n) = 0$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. Réciproque?

(ii) Montrer que si la série $\sum |u_{n+1} - u_n|$ converge alors (u_n) est de Cauchy. Réciproque?