Université de Paris-Sud Orsay — Année universitaire 2004-2005

DEUG S4 MIAS, Option Topologie
Liste d'exercices 1

Les premiers exercices sont des exercices de révision.

Exercice 1. Soit $(u_n)_{n\geq 1}$ une suite de réels qui tend vers $l \in \mathbb{R}$.

(i) Vérifier qu'une telle suite est bornée.

(ii) Montrer que la suite de terme général $v_N := \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{n} u_n$ converge aussi vers l.

(iii) On dit que v_N est la somme de Cesaro d'ordre N associée à la suite $(u_n)_{n\geq 1}$. Si la suite $(v_N)_{N\geq 1}$ converge, en est-il de même pour la suite $(u_n)_{n\geq 1}$?

Exercice 2. Soit f une fonction continue sur $[0, +\infty[$, dérivable sur $]0, +\infty[$. On suppose que la dérivée f' admet une limite finie ℓ à droite en 0. Montrer que f est dérivable à droite en 0.

Exercice 3. Montrer que la suite de terme général $I_n := \int_0^{\pi/2} (\cos t)^n dt$ tend vers 0. On pourra esquisser les graphes des fonctions $t \mapsto (\cos t)^n$ sur $[0, \pi/2]$ et mener une analyse d'une part au voisinage de 0 et d'autre part sur le reste de l'intervalle.

Exercice 4. Montrer que la suite de terme général $I_n := \int_0^{+\infty} (\frac{\sin t}{t})^n \, dt$ tend vers 0. Pour cela, montrer que $t \mapsto \frac{\sin t}{t}$ est décroissante sur $[0, \pi/2]$, puis s'inspirer de l'exercice précédent pour majorer l'intégrale sur $[0, \pi/2]$. Pour $[\pi/2, +\infty[$, majorer $t \mapsto (\frac{\sin t}{t})^n$ par une fonction puissance dont on peut calculer l'intégrale.

Exercice 5. Soit f une fonction continue sur $[0, +\infty[$, telle que $f(0) \neq 0$. On suppose la fonction $t \mapsto \frac{f(t)}{t}$ intégrable sur $[1, +\infty[$. Soit $a > 0$. On pose $I_a = \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{f(2at) - f(at)}{t} \, dt$. Montrer que I_a admet une limite lorsque a tend vers 0. On pourra faire d'abord un changement de variable qui ramène I_a à une intégrale sur un intervalle fini où f n'apparaît qu'une fois, puis appliquer le théorème de la moyenne.

Exercice 6. Soit $(u_n)_{n\geq 1}$ une suite de réels positifs qui n'est pas majorée. Construire une suite extraite $(u_{\phi(n)})_{n\geq 1}$ qui tend vers l'infini.

Exercice 7. Déterminer (lorsqu'elles existent) les bornes supérieures et inférieures des sous-ensembles de $\mathbb{R}$ suivants. Sont-elles atteintes ?

- $A = \left\{\frac{1}{n} \ , \ n \geq 1\right\}$
- $B = \left\{\frac{n-\frac{1}{n}}{n+\frac{1}{n}} \ , \ n \geq 1\right\}$
- $C = \left\{e^{-t} \ , \ t > 0\right\}$
- $D = \left\{\frac{\sin t}{t}, t > 0\right\}$

Exercice 8. Soit A une partie non vide et bornée de $\mathbb{R}$.

(i) Montrer qu'il existe une suite $(x_n)_{n\geq 0}$ de points de A qui converge vers $\sup A$. En déduire la même propriété pour $\inf A$.

(ii) Montrer que $\sup\{|x-y|\,,\, x\in A\,,\, y\in A\} = \sup A - \inf A$.

Exercice 9. Soit A une partie non vide de $\mathbb{R}$ et $f,g : A \to \mathbb{R}$ deux fonctions bornées. Vérifier que l'on a :

$$\sup_{x\in A} f(x) + \inf_{x\in A} g(x) \leq \sup_{x\in A}(f(x)+g(x)) \leq \sup_{x\in A} f(x) + \sup_{x\in A} g(x).$$

Exercice 10. Soit A et B deux parties non vides et majorées de $\mathbb{R}$. Déterminer $\sup(A+B)$ et $\sup(A\cup B)$ en fonction de $\sup A$ et $\sup B$.

Exercice 11. Soit A une partie non vide de $\mathbb{R}$.

(i) Vérifier que la fonction $x \mapsto \inf_{a\in A}|x-a|$ est bien définie. On la note $\mathrm{dist}\,(.,A)$ (pourquoi ?).

(ii) Montrer que cette fonction est 1-Lipschitzienne, c'est à dire :

$$\forall (x,y)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}\,,\ |\mathrm{dist}\,(x,A) - \mathrm{dist}\,(y,A)| \leq |x-y|.$$

En déduire qu'elle continue sur $\mathbb{R}^2$ (on écrira la définition avec ϵ, η).

(iii) Que se passe-t-il si on remplace $\mathbb{R}$ par $\mathbb{R}^2$, et $|.|$ par la norme euclidienne $\|\,.\,\|$?

Exercice 12. Soit $(x_n)_{n\geq 0}$ une suite bornée de réels. On pose :

$$v_n := \inf\{x_p\,,\, p\geq n\} \quad \text{et} \quad w_n := \sup\{x_p\,,\, p\geq n\}.$$

(i) Montrer que les suites $(v_n)_n$ et $(w_n)_n$ convergent. On note v et w leurs limites respectives. Vérifier que $v\leq w$.

(ii) Vérifier que si $v = w$, alors la suite $(x_n)_n$ converge.

Exercice 13. Soit $I_n = [a_n, b_n]$ une suite décroissante de segments de $\mathbb{R}$. On suppose que $\lim_{n\to+\infty}(b_n - a_n) = 0$. Montrer qu'il existe $a\in\mathbb{R}$ tel que $\cap_{n\geq 0}[a_n, b_n] = \{a\}$.

Exercice 14. Soit $f : [0,1] \to [0,1]$ une fonction. Montrer qu'elle admet au moins un point fixe lorsque f est continue, puis lorsque f est seulement supposée croissante (on pourra dans ce cas considérer l'ensemble $\{x\in[0,1]\ ,\ f(x)\leq x\}$).

Exercice* 15. Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. On note $g : [a,b]\to\mathbb{R}$ la fonction définie par $g(x) = \sup_{t\in[a,x]} f(t)$. Montrer que g est la plus petite fonction *croissante* majorant f. Vérifier que g est continue.