Validité d'une BRep

P. Pansu

27 juillet 2000

1 Motivation

Dans CATIA ou ACIS, un objet 3D est représenté par son bord, i.e. une collection de morceaux de surfaces normalement orientées.

Question. A quelle condition une collection de morceaux de surfaces borde-t-elle un objet ?

Dans ce chapitre, on donne une réponse à cette question dans le cas simple où les surfaces sont planes (cf [H]).

1.1 Approche informelle en dimension 2

On se donne une collection finie $\sigma_1, \ldots, \sigma_k$ de segments normalement orientés dans le plan. A quelle condition leur réunion P est elle le bord d'un ouvert X du plan ?

On aperçoit immédiatement des conditions nécessaires.

- l'extrémité d'un segment doit obligatoirement être l'extrémité d'au moins un autre segment ;
- plus généralement, en chaque point de P (extrémité ou non) doivent arriver un nombre pair de branches ;
- en un point p d'où partent plusieurs branches, les orientations normales doivent être compatibles au sens suivant : lorsqu'on tourne autour de p, on croise les normales alternativement dans le bon sens et à contresens.

Ces conditions nécessaires sont *locales*, i.e. elles ne concernent qu'un voisinage de chaque point. Elles ne sont pas suffisantes, comme le montre l'exemple suivant. Néanmoins, elles méritent d'être examinées de près, en vue de la généralisation à la dimension 3.

1.2 Lien (informel)

Si l'étude locale est simple, c'est parce qu'on peut décrire simplement un ensemble X bordé par une réunion de segments P au voisinage d'un point p. Pour $r > 0$ assez petit, $X \cap B(x, r)$ est une réunion de secteurs, i.e. de cônes sur des intervalles tracés sur le cercle $S(x, r)$. Ces intervalles forment ce qu'on appelle le *lien* (`link`) de p dans X. Le point p a aussi un lien dans le bord P de X, c'est le bord du lien dans X,

$$\mathrm{lien}(p, \partial X) = \partial \mathrm{lien}(p, X).$$

Le lien d'une réunion de segments P en un point p est un ensemble fini L contenu dans un cercle. Une orientation normale de P détermine une orientation normale de L. Si P borde dans le plan, L borde dans le cercle. On obtient donc une condition nécessaire où la dimension a diminué d'une unité.

Principe. Pour décortiquer une question locale, on passe aux liens, ce qui permet une récurrence sur la dimension.

1.3 Indice (informel)

On dit que P *borde localement* s'il satisfait la condition locale dégagée au paragraphe 1.1. Cette condition est utile mais n'est pas suffisante. Or il existe un truc vieux comme le monde pour décider si on est à l'intérieur ou à l'extérieur : on compte le nombre de portes qu'on a traversé.

Mathématiquement, cela se traduit comme suit. Si P borde un ouvert X, alors pour toute droite D du plan qui ne contient aucun des segments de P, $D \cap P$ borde $D \cap X$. De nouveau, on a ramené le problème en dimension 1, où il est facile à résoudre. $D \cap P$ est un ensemble fini muni d'une orientation normale, il borde si et seulement si lorsqu'on parcourt D on croise les normales alternativement dans le bon sens et à contresens. Un point de D est dans $D \cap X$ si et seulement si quand on parcourt une demi-droite portée par D, on croise une normale sortante de plus que de normale rentrante.

En général, étant donnés une réunion de segments P et une droite D ne contenant aucun des segments de P (on dit que D est *transverse* à P), la différence

$$\text{nombre de normales croisées dans le bon sens} - \text{nombre de normales croisées à contresens}$$

s'appelle *l'indice* de p par rapport à P, dans la direction D.

On montre que si P satisfait la condition locale du paragraphe 1.1, alors l'indice de P ne dépend pas du choix de la droite D. De plus, il est constant dans chaque composante connexe du complémentaire de P, donc il ne prend qu'un nombre fini de valeurs. Il prend au moins deux valeurs. Une condition nécessaire et suffisante pour que P borde un ouvert est que l'indice prenne exactement deux valeurs. C'est automatiquement le cas si P est connexe.

Théorème 1 *Soit P une réunion finie de segments dans le plan. On suppose que P borde localement et que P est connexe. Alors P borde un ouvert du plan.*

Plus que le résultat lui-même, ce sont les notions de lien, de transversalité et d'indice (voir [M]) qui sont intéressantes.

1.4 Plan de la suite du chapitre

Il s'agit de donner des définitions et des démonstrations rigoureuses des faits mentionnés jusqu'ici, et de les généraliser à la dimension 3 (et aux dimensions supérieures, ça ne coûte pas plus cher). Les preuves sont données pour servir de référence, mais ne sont pas à connaître, car elles sont souvent peu effectives. Les questions algorithmiques sont traitées dans le cours d'A. Lichnewsky.

1. Lien
2. Collier
3. Transversalité
4. Indice

2 Lien

Rappel. On utilisera plusieurs fois le résultat suivant du chapitre *Faces et orientations*.

Théorème 2 *Un fermé propre de $\mathbf{R}^n$ est un polyèdre si et seulement si son bord est un polyèdre.*

2.1 Cônes

Définition 1 *On note S^{n-1} la sphère de centre 0 et de rayon 1 dans $\mathbf{R}^n$. Soit $x \in \mathbf{R}^n$. Si $L \subset S^{n-1}$, le* cône `cone)` *de base X et de sommet x, noté* $\text{cône}(x, L)$, *est la réunion des demi-droites d'origine x et dirigées par des vecteurs $\theta \in L$.*

Exemple. Le cône cône(x, L) est un espace affine de dimension k si et seulement si L est une *hypersphère* de dimension $k-1$ (on parle de *grand cercle* si $k=2$).

Exemple. Si C est un cône de sommet x, alors $C = \text{cône}\,(x, L)$ où L est l'intersection de C avec la sphère unité centrée en x.

Exercice 2 Bord d'un cône *Vérifier que* $\partial\text{cône}\,(x, L) = \text{cône}\,(x, \partial L)$.

2.2 Géométrie sphérique

On transporte sur la sphère les notions euclidiennes via les cônes.

Définition 3 *Une partie $X \subset S^{n-1}$ est un* polyèdre *(resp.* convexe*) si* cône(x, L) *est un polyèdre (resp. convexe). En particulier, un polyèdre sphérique est compact.*

Remarques. Un polyèdre de la sphère S^2 est un cas particulier de polyèdre curviligne. En effet, un cône polyédral est une union d'intersections d'hyperplans passant par l'origine, et les plans passant par l'origine sont transverses à la sphère unité. D'autre part, du théorème 2, il résulte qu'un compact L de la sphère est un polyèdre sphérique si et seulement si son bord l'est.

Exercice 4 Lien d'un orthant *Dessiner le sous-ensemble L de la sphère tel que le cône sur L soit un orthant.*

Exercice 5 Triangle sphérique *Sur la sphère unité de $\mathbf{R}^3$, soit $\theta_1 = (0, 0, 1)$ le pôle nord, soit $\theta_2 = (1, 0, 0)$ le point de l'équateur de longitude nulle et soit $\theta_3 = (0, 1, 1/\sqrt{2})$ le point de longitude 90^0 et de latitude 45^0. Dessiner l'enveloppe convexe de ces trois points sur la sphère.*

On parle aussi de cônes en géométrie sphérique, i.e. contruits à l'intérieur de la sphère avec des arcs de grands cercles. En effet, comme les segments de droite dans l'espace euclidien, les arcs de grands cercles de longueur inférieure à π sont des *géodésiques*, i.e. sont les courbes de longueur minimum entre leurs extrémités.

Un grand cercle dans la sphère S^{n-1} est l'intersection de la sphère avec un 2-plan. Si θ et θ' sont deux vecteurs unitaires orthogonaux, la courbe $t \mapsto \cos(t)\theta + \sin(t)\theta'$ est la paramétrisation d'un grand cercle d'origine θ et de vitesse initiale θ'. Si $0 \le t \le \pi$, la distance sphérique de θ à $\cos(t)\theta + \sin(t)\theta'$ est exactement t.

Si on fait varier t de 0 à π, on décrit un demi-grand-cercle, ou *méridien*. Les vitesses initiales méridiens issus du point θ de la sphère sont donc contenues dans *l'équateur* $S_\theta^{n-2} = \{\theta' \; ; \; \theta \cdot \theta' = 0, \; |\theta'| = 1\}$.

Définition 6 *Etant donné $\theta \in S^{n-1}$ et $L \subset S_\theta^{n-2}$, le* cône *de sommet θ et de base L est la réunion des méridiens issus de θ et dont la vitesse initiale est prise dans L.*

Exercice 7 Cônes dans la sphère *Dans $\mathbf{R}^3$, soit $\theta = (0, 0, 1)$ le pôle nord de la sphère unité. Soit L l'ensemble des points de l'équateur de longitude multiple de 15^0. Soit L' l'ensemble des points de l'équateur de longitude comprise entre 0 et 15^0. Dessiner le cône de sommet θ et de base L (resp. L').*

Exercice 8 Faces d'un polyèdre sphérique *Soit L un polyèdre sphérique. Vérifier que si F est une face de F de dimension k, alors* cône$(0, F)$ *est une face de* cône$(0, L)$ *de dimension $k+1$.*

2.3 Lien

Définition 9 *Soit P un polyèdre de $\mathbf{R}^n$ (resp. de S^n). Soit $x \in P$. Il existe $r > 0$ et un polyèdre L de S_x^{n-1} tel que*

$$B(x,r) \cap P = B(x,r) \cap \text{cône}\,(x, L).$$

Ce polyèdre s'appelle le lien *de P en x et est noté* $\text{lien}(x, P)$.

Preuve.

Cas de $\mathbf{R}^n$, P convexe, $x = 0$. Le polyèdre P est défini par des inégalités de la forme $\{y \cdot v_j \leq t_j\}$ où $j \in J$. Soit J_0 l'ensemble de celles qui sont actives en 0, i.e. telles que $t_j = 0$. On définit L par $\text{cône}\,(0, L) = \{y \cdot v_j \leq 0,\ j \in J_0\}$ et r par $r = \min\{|t_j|/|v_j|\ ;\ j \notin J_0\}$. Alors $B(0,r) \cap P = B(0,r) \cap \text{cône}\,(0, L)$.

Cas de S^n, P convexe, $x = \theta$. Le cône convexe $\text{cône}\,(0, P)$ est défini par des inégalités de la forme $\{y \cdot v_j \leq 0\}$ où $j \in J$. Soit J_0 l'ensemble de celles qui sont actives en θ, i.e. telles que $\theta \cdot v_j = 0$. On définit $L \subset S_\theta^{n-2}$ par $\text{cône}\,(0, L) = \{y \in \theta^\perp\ ;\ y \cdot v_j \leq 0,\ j \in J_0\}$ et r par $r = \min\{\text{Arcsin}(\theta \cdot v_j)\ ;\ j \notin J_0\}$.

Cas général ($\mathbf{R}^n$ ou S^n). P est une réunion de polyèdres convexes P_j. On néglige ceux qui ne contiennent pas x. Pour les autres, il existe un rayon $r_j > 0$ tel que $B(x, r_j) \cap P_j = B(x,r) \cap \text{cône}\,(x, L_j)$. Si $r = \min\{r_j\}$,

$$B(x,r) \cap P = \bigcup_j B(x,r) \cap P_j = \bigcup_j B(x,r) \cap \text{cône}\,(x, L_j) = B(x,r) \cap \text{cône}\,(x, L)$$

où

$$L = \bigcup_j L_j$$

est un polyèdre. ∎

Exercice 10 Bord d'un lien *Vérifier que* $\text{lien}(x, \partial P) = \partial \text{lien}(x, P)$.

Exercice 11 Critère local de convexité *Montrer qu'un polyèdre P est convexe si et seulement si P est connexe et pour tout $x \in P$,* $\text{lien}(x, P)$ *est contenu dans une hémisphère.*

Indication. Montrer d'abord que si $[x, y]$ est un segment entièrement contenu dans P, alors $[x, y] \cap \partial P \subset \{x, y\}$.

Proposition 12 *Soit P un polyèdre normalement orienté de $\mathbf{R}^n$ et $x \in P$. Le lien* $\text{lien}(x, P)$ *hérite d'une orientation normale.*

Preuve. On peut supposer que P est le cône $\text{cône}\,(x, L)$ où $L = \text{lien}(x, P)$. Soit F une face de dimension $n - 2$ de L. Alors F contient un ouvert de l'intersection de la sphère avec un hyperplan H de $\mathbf{R}^n$, donc engendre H. Le cône $\text{cône}\,(x, F)$ est une face de dimension $n - 1$ de P, contenue dans H. Soit ν sa normale orientée. C'est un vecteur orthogonal à Hdonc une orientation normale à F. ∎

2.4 Caractérisation locale des polyèdres compacts

C'est une sorte de réciproque de la proposition qui définit le lien.

Proposition 13 *Soit X un compact de $\mathbf{R}^n$ ou S^n. Alors X est un polyèdre si et seulement si pour tout $x \in P$, il existe $r > 0$ et un polyèdre L de S_x^{n-1} tel que*

$$B(x,r) \cap P = B(x,r) \cap \text{cône}\,(x, L).$$

Preuve.

Par hypothèse, X est localement un polyèdre. Il suffit de mettre ensemble ces modèles locaux.

Du recouvrement de X par les boules $B(x, r/2)$ on extrait un recouvrement fini $B(x_j, r_j/2)$ tel que dans la boule de rayon double, P coïncide avec le cône sur un polyèdre L_j. Soit Π un polyèdre tel que

$$B(0,1/2) \subset \Pi \subset B(0,1).$$

On pose $\Pi_j = x_j + r_j\Pi$ et $P_j = \Pi_j \cap \text{cône}\,(x_j, L_j)$. Alors P_j est un polyèdre contenu dans X. Aussi P_j contient $X \cap B(x_j, r_j/2)$. Par conséquent $X = \bigcup_j P_j$ est un polyèdre. ■

2.5 Orientation induite sur le lien

Définition 14 *Une orientation normale d'une hypersphère S de S^n consiste à choisir l'un des deux vecteurs unitaires orthogonaux à l'hyperplan* cône $(0, S)$ *de $\mathbf{R}^{n+1}$).*

Soit P un polyèdre de S^n. Une orientation normale de P consiste à se donner une orientation normale de chaque face de dimension $n-1$ de P.

Proposition 15 *Soit P un polyèdre de $\mathbf{R}^n$ ou de S^n et $x \in P$. Le lien* $\text{lien}(x, P)$ *hérite d'une orientation normale.*

Preuve. On peut supposer que P est le cône $\text{cône}\,(x, L)$ où $L = \text{lien}(x, P)$. Soit F une face de dimension $n-2$ de L. Alors F contient un ouvert de l'intersection de la sphère avec un hyperplan H de $\mathbf{R}^n$, donc engendre H. Le cône $\text{cône}\,(x, F)$ est une face de dimension $n-1$ de P, contenue dans H. Soit ν sa normale orientée. C'est un vecteur orthogonal à Hdonc une orientation normale à F. ■

Terminologie. On dira qu'un polyèdre normalement orienté P *borde* s'il existe un polyèdre Q tel que $\partial Q = P$ et l'orientation naturel de ∂Q coïncide avec celle donnée sur P.

Exemple. Si P est un polyèdre normalement orienté qui borde, alors tous ses liens bordent.

3 Collier

Définition 16 *Soit P un polyèdre normalement orienté de $\mathbf{R}^n$ ou de S^n. Un* collier (`collar`) *est un polyèdre Q tel que $\partial Q = P \cup P'$ où P est un polyèdre disjoint de P.*

Il faut voir Q comme une tentative prometteuse de construire un polyèdre de bord P.

Terminologie. On dit qu'un polyèdre normalement orienté P *borde localement* si tous ses liens bordent.

Proposition 17 *Soit P un polyèdre normalement orienté de $\mathbf{R}^n$ ou de S^n. Alors P admet un collier si et seulement si P borde localement.*

Preuve. Dans le cas où P est compact. Par hypothèse, pour tout $x \in P$, le lien en x borde, i.e. il existe un polyèdre M dans la sphère tel que $\partial M = \text{lien}(x, P)$, orientation normale comprise.

Comme en 2, on recouvre P par un nombre fini de boules $B(x_j, r_j/2)$ telles que P soit un cône dans la boule deux fois plus grande. Par hypothèse, $L_j = \partial M_j$. On pose $Q_j = \Pi_j \cap \text{cône}\,(x_j, M_j)$ et $Q = \bigcup_j Q_j$.

Si $x \in P$, alors au voisinage de x Q coïncide avec $\bigcup_j \text{cône}\,(x_j, M_j)$ donc $\partial Q \subset \bigcup_j \text{cône}\,(x_j, L_j) \subset P$. Ceci prouve que $P' = \partial Q \setminus P$ est fermé. D'après la caractérisation locale des polyèdres (proposition 13), P' est un polyèdre.

Soit $y \in P$ un point très proche de x, tel que $dim T_y P = n-1$. Posons $y(t) = y + t\nu$ où ν est la normale orientée à P en y. Alors $y(t) = x_j + \rho_j(t)\theta_j(t)$ où la courbe $t \mapsto \theta_j(t)$ tracée sur la sphère est normale à L_j en $\theta_j(0)$ donc pour t petit, $\theta_j(t) \notin M_j$. Par conséquent $y(t) \notin Q$, ce qui prouve que $y \in \partial Q$. Par densité, on conclut que $P \subset \partial Q$. ■

4 Tranversalité

4.1 Définition générale

Définition 18 *Soient P et Q deux polyèdres de $\mathbf{R}^n$ ou de S^n. On dit que P et Q sont* transverses (`transversal`), *et on* note $P\pitchfork Q$, *si en tout point x de $P \cap Q$, les espaces tangents satisfont*

$$T_xP + T_xQ = \mathbf{R}^n \ (resp. = T_xS^n).$$

Exemple. Dans $\mathbf{R}^2$, soit P le carré unité et Q la demi-droite $\{y = 1/2,\ x \geq 0\}$. Alors $P \cap Q$ est le segment $[x, y]$ où $x = (0, 1/2)$ et $y = (1, 1/2)$. P et Q sont transverses exactement aux points de $]x, y]$.

Exercice 19 Transversalité de deux cubes *Soit P le cube unité de $\mathbf{R}^3$ et $Q_v = P + v$ le cube obtenu en translatant P du vecteur v. Montrer que P et Q_v sont transverses si et seulement si $v \notin \partial P$.*

4.2 Transversalité à un sous-espace affine

Proposition 20 *Soient P un polyèdre et A un sous-espace affine de de dimension k de $\mathbf{R}^n$. Alors P est transverse à A si et seulement si A ne rencontre aucune face de dimension inférieure ou égale à $n - k - 1$ de P.*

Preuve. Soit F une face de P de dimension $\leq n - k - 1$. Pour tout $x \in A \cap F$,

$$dim(T_xP + T_xA) \leq dim(T_xP) + dim(T_xA) \leq n - 1$$

donc P n'est pas transverse à A en x.

Inversement, soit A un espace affine non transverse à P et soit F une face de P de dimension minimale qui coupe A non transversalement. Supposons que $dim(F) \geq n - k$. Comme $dim(T_xA + T_xF) \leq n - 1$, $dim(T_xA \cap T_xF) \geq 1$, donc $A \cap F$ contient un segment de droite. L'intersection $A \cap F$ rencontre donc une facette de F, nécessairement non transversalement, contradiction. On conclut que $dim(F) \leq n - k - 1$. ∎

Proposition 21 *Soient P un polyèdre et A un sous-espace affine de dimension k de $\mathbf{R}^n$. Si P est transverse à A, alors chaque face de dimension ℓ de $A \cap P$ est l'adhérence d'une composante connexe de l'intersection de A avec l'intérieur d'une face de dimension $\ell + n - k$ de P.*

Preuve. Soit x un point de $A \cap P$ tel que $dim(T_xP) = \ell + n - k$. L'hypothèse de transversalité permet de choisir un repère (non orthonormé) d'origine x et tel que $A = \mathbf{R}^k$ et $\mathbf{R}^{n-k}$ soit contenu dans T_xP. Dans ces coordonnées, au voisinage de l'origine, P concide avec le produit de $A \cap P$ avec le facteur $\mathbf{R}^{n-k}$. En effet, par défintion de l'espace tangent, si $v \in A$ et $v' \in \mathbf{R}^{n-k}$ sont des vecteurs assez petits, $v + v'$ est dans P si et seulement si $v = v + v' - v'$ est dans P, i.e. si et seulement si $v \in A \cap P$. Par conséquent, $T_xP = T_x(A \cap P) \oplus \mathbf{R}^{n-k}$ donc $dim(T_x(A \cap P) = \ell$. On a donc montré que $(A \cap P)^{\ell} = A \cap (P^{n-k+\ell})$.

Par définition, $P^{n-k+\ell}$ est une réunion disjointe d'intérieurs de faces de dimension $n - k + \ell$ de P. Si F est une ℓ-face de $A \cap P$, alors F est l'adhérence de U où U est une composante connexe de $(A \cap P)^{\ell} = A \cap (P^{n-k+\ell})$, alors U est une composante connexe de l'intersection de A avec l'intérieur d'une face de dimension $n - k + \ell$ de P. ∎

4.3 Transversalité et bord

Proposition 22 *Soient P un polyèdre et A un sous-espace affine de $\mathbf{R}^n$. Si ∂P est transverse à A, alors le bord (relatif) de $A \cap P$ dans A est $A \cap \partial P$.*

Preuve. Si $x \in \partial_A(A \cap P)$, alors il existe une suite x_n de points de $A \setminus P$ qui converge vers x. En particulier, $x \in \partial P$.

Inversement, soit x un point de $A \cap P$ qui n'est pas dans le bord relatif. Alors il existe un voisinage de x dans A qui est entièrement contenu dans P. En particulier, $T_xA \subset T_xP$. Supposons que $x \in \partial P$. Comme A et ∂P sont transverses, cela entrane que $T_xP = \mathbf{R}^n$, i.e. que x est un point intérieur à P, contradiction. On conclut que $x \notin \partial P$. ∎

Proposition 23 *Soient P un polyèdre normalement orienté et A un sous-espace affine de $\mathbf{R}^n$. Si P est transverse à A, alors $A \cap P$ hérite d'une orientation normale. Si $P = \partial Q$ et l'orientation normale de P est celle du bord de Q, alors l'orientation normale de $A \cap P$ est celle du bord de $A \cap Q$.*

Preuve. Soit k la dimension de A. Soit x un point de $A \cap P$ tel que $dim(T_x(A \cap P)) = k-1$. Alors x est intérieur à une facette de P, donc la normale $\nu(x)$ est bien définie. Comme l'espace tangent T_xA n'est pas contenu dans T_xP, $\nu(x)$ n'est pas orthogonal à T_xA, et sa projection orthogonale $\pi(x)$ sur A est un vecteur non nul orthogonal à $T_x(A \cap P)$, cela détermine l'orientation normale $\nu_A(x) = \pi(x)/|\pi(x)|$ de $A \cap P$.

Si $P = \partial Q$, alors au voisinage de x, Q est défini par l'inéquation $\{z \cdot \nu(x) \leq 0\}$. Pour $z \in A$, $z \cdot \nu(x) = z \cdot \pi(x)$ donc au voisinage de x dans A, l'inéquation $\{z \cdot \nu_A(x) \leq 0\}$ définit bien $A \cap Q$. ∎

4.4 Généricité de la transversalité

Définition 24 *Soit P un polyèdre de $\mathbf{R}^n$. Soit $p \notin P$. Etant donné un vecteur unitaire θ, on note D_θ la droite passant par p et dirigée par θ. Alors l'ensemble des vecteurs $\theta \in S^{n-1}$ tels que D_θ ne soit pas transverse à P est un polyèdre d'intérieur vide de S^{n-1}, qu'on* note $Sing(p, P)$.

Preuve. Le cône de sommet 0 sur $Sing(p, P)$ est la réunion de deux cônes, le cône sur la réunion des faces de dimension $n-2$ de $P - p$, et son opposé. ∎

Proposition 25 *Soit P un polyèdre de $\mathbf{R}^n$. Soit $p \notin P$ et D une droite passant par p et transverse à P. Etant donné un vecteur unitaire θ orthogonal à D, on note A_θ le plan passant par p et dirigé par D et θ. Alors l'ensemble des vecteurs $\theta \in S^{n-2}$ tels que A_θ ne soit pas transverse à P est contenu dans un polyèdre d'intérieur vide de S^{n-2}.*

Preuve. Soit π la projection orthogonale sur l'hyperplan affine H orthogonal à D passant par P. Notons Q la réunion des projections des faces de dimension $n-3$ de P. Soit $\theta \in S^{n-2}$ un vecteur unitaire orthogonal à D. Si la droite D_θ est transverse à Q (ce qui est le cas pour θ hors du polyèdre d'intérieur vide $Sing(p, Q)$), alors $D_\theta \cap Q = \emptyset$, donc $A_\theta = \pi^{-1}D_\theta$ ne rencontre pas les $n-3$-faces de P, donc A_θ est transverse à P, d'après la proposition 20. ∎

5 Indice

Définition 26 *Soit P un polyèdre normalement orienté de $\mathbf{R}^n$. Soit $p \notin P$ et θ un vecteur unitaire tel que la demi-droite D_θ^+ passant par p et dirigée par θ soit transverse à P. La demi-droite D_θ^+ coupe P en un nombre fini de points x tels que $dim(T_xP) = n-1$, donc la normale $\nu(x)$ est bien définie. On* note $\mathrm{ind}\,(p, P, \theta)$ *le nombre de points d'intersection de D_θ^+ avec P, où chaque point d'intersection x est compté avec le signe (+) si le produit scalaire $\theta \cdot \nu(x) > 0$ et avec le signe (-) si $\theta \cdot \nu(x) < 0$.*

5.1 Invariance de l'indice

Lemme 27 *Soit P un polyèdre normalement orienté qui borde localement. Soit $p \notin P$. Soient θ et θ' deux vecteurs unitaires distincts, et A le plan passant par p qu'ils engendrent. On suppose que les droites D_θ, D'_θ et le plan A sont transverses à P. Alors $ind(p,P,\theta) = \mathrm{ind}\,(p,P,\theta')$.*

Preuve. D'après la proposition 17, P possède un collier Q. On peut supposer qu'il ne contient pas p (retirer un petit polyèdre contenant p dans son intérieur). Quitte à remplacer P par $P \cap A$, on peut supposer que $n = 2$. En effet, $A \cap P$ satisfait presque toutes les hypothèses du lemme. L'hypothèse incomplète est que A soit transverse à ∂Q. Cela n'a pas d'importance car seule la partie P du bord de Q joue un rôle dans l'argument.

Soit θ une direction telle que D_θ ne soit pas transverse à P (cela ne se produit que pour un nombre fini de valeurs de θ). Montrons que pour $\theta' < \theta < \theta''$ assez proches de θ et de part et d'autre de θ, $ind(p,P,\theta') = \mathrm{ind}\,(p,P,\theta'')$. Soit $[x,y]$ une composante connexe de $D_\theta \cap P$ et U un voisinage tubulaire de $[x,y]$ qui ne rencontre pas $\partial Q \setminus P$. On fixe deux segments centrés sur Q et orthogonaux à D_θ, l'un avant x et l'autre après y. Pour θ' assez proches de θ, ces deux segments coupent $D_{\theta'}$ en $x_{\theta'}$ et $y_{\theta'}$ (idem pour $D_{\theta''}$ de l'autre côté). On obtient un trapèze $T = x_{\theta''}y_{\theta''}y_{\theta'}x_{\theta'}$ tel que $T \cap P \subset D_{\theta'} \cup D_{\theta''}$.

Notons i' (resp. i'') la contribution de l'ouvert U à l'indice $ind(p,P,\theta')$ (resp. $\mathrm{ind}\,(p,P,\theta'')$, i.e. le nombre de points avec signes de l'intersection $P \cap D_{\theta'} \cap U$ (resp. $P \cap D_{\theta''} \cap U$). Alors $i'' - i'$ est le nombre de points avec signes de $T \cap P$, où le signe $s(z)$ associé à un point d'intersection z est égal au signe de $\theta'' \cdot \nu(z)$ si $z \in D_{\theta''}$ et son opposé si $z \in D_{\theta'}$. Parcourons T dans le sens

$$x_{\theta''} \to y_{\theta''} \to y_{\theta'} \to x_{\theta'} \to x_{\theta''}.$$

Alors le signe $s(z)$ vaut $+1$ si en passant z on sort de Q, et -1 si on rentre dans Q. D'après la proposition 22, l'intersection $T \cap Q$ est une réunion disjointe de segments dont les extrémités sont les points de $T \cap P$. Par conséquent, chaque signe rencontré compense précédent, et la somme $i'' - i'$ est nulle. En sommant sur toutes les composantes de $D_\theta \cap P$, on trouve que $\mathrm{ind}\,(p,P,\theta'') - \mathrm{ind}\,(p,P,\theta') = 0$.

Lorsque θ varie entre deux valeurs singulières (i.e. de $Sing(p,P)$, chaque point d'intersection de $P \cap D_\theta$ varie continment et l'indice est constant. On conclut que l'indice ne dépend pas de la direction θ. ∎

Définition 28 *Soit P un polyèdre normalement orienté. On suppose que P borde localement. Alors l'indice $ind(p,P,\theta)$ ne dépend pas du choix du vecteur $\theta \in S^{n-1} \setminus Sing(p,P)$, on l'appelle* l'indice de p par rapport à P.

Preuve. Soient θ, $\theta' \in S^{n-1} \setminus Sing(p,P)$. Soit U (resp. U') l'ouvert de S^{n-1} formé des vecteurs θ'' tels que le plan $A_{\theta,\theta''}$ engendré par θ et θ'' (resp. $A_{\theta',\theta''}$ engendré par θ' et θ'') soit transverse à P. Comme le complémentaire de U (resp. U') est contenu dans un polyèdre d'intérieur vide (proposition 25), $U \cap U' \setminus Sing(p,P)$ est non vide. Choisissons $\theta'' \in U \cap U' \setminus Sing(p,P)$. Alors d'après le lemme 27, $ind(p,P,\theta) = \mathrm{ind}\,(p,P,\theta'')$ et $ind(p,P,\theta'') = \mathrm{ind}\,(p,P,\theta')$. donc $ind(p,P,\theta) = \mathrm{ind}\,(p,P,\theta')$. ∎

Lemme 29 *Soit P un polyèdre normalement orienté. On suppose que P borde localement. Alors l'indice $p \mapsto ind(p,P,\theta)$ est localement constant sur le complémentaire de P.*

Preuve. Soit p un point du complémentaire de P. Soit θ un vecteur unitaire tel que $\theta \notin Sing(p,P)$. Alors pour q suffisamment proche de p, $\theta \notin Sing(q,P)$. En effet, la condition $D \pitchfork P$ est ouverte par rapport à D.

Par transversalité, chacun des points d'intersection de $D_{p,\theta}$ avec P varie continment avec P, donc le nombre de points avec signe est constant au voisinage de P. ∎

5.2 Conditions pour border

Théorème 3 *Soit P un polyèdre normalement orienté de $\mathbf{R}^n$. On suppose que P borde localement et que P est connexe. Alors P borde un unique polyèdre de $\mathbf{R}^n$.*

Preuve. Soient Q un collier pour P et Q' un collier pour le polyèdre P' (même polyèdre mais avec toutes les orientations normales renversées). Soit D une droite transverse à P coupant P en un point x. On oriente D au moyen de l'orientation normale $\nu(x)$. Pour $z \in D$, soit D_z la demi-droite positive portée par D d'origine z. Alors le nombre de points (avec signe) diminue d'une unité lorsqu'en parcourant D on traverse x. Par conséquent, l'indice prend au moins 2 valeurs.

Etant donné $p \notin P$, parcourons une demi-droite d'origine p et transverse à P. Soit x le premier point de P rencontré. Alors l'indice est constant sur $[p, x[$, et pour $z \in [p, x[$ assez proche de x, z est dans Q ou dans Q'. Par conséquent, les valeurs prises par l'indice sont celles prises sur Q, plus celles prises sur Q' (c'est-à-dire, les mêmes additionnées de 1).

Si P est connexe, l'intérieur de Q est connexe, donc l'indice est constant sur Q et prend exactement deux valeurs. Soient R et R' les deux ensembles de niveau de l'indice, de sorte que $Q \subset R$ et $Q' \subset R'$. Alors $P \subset \partial R \cap \partial R'$. Comme $\mathbf{R}^n$ est la réunion disjointe de R, R' et P, $P = \partial R = \partial R'$. D'après la proposition 2, clos(R) est un polyèdre, son bord est P. ∎

5.3 Cas où le polyèdre donné n'est pas connexe

Terminologie. On appelle *coquille* (`shell`) un polyèdre connexe qui borde localement.

D'après le théorème 3, une coquille borde un unique polyèdre. Pour un polyèdre formé de plusieurs coquilles, il y a une conditions supplémentaire à vérifier : que les choses se passent comme on l'attend le long de quelques demi-droites.

Proposition 30 *Soit P un polyèdre normalement orienté qui borde localement. Soit $D_1, \ldots, D_\ell$ une collection de demi-droites issues d'un point p, transverses à P, telle que chaque composante connexe de P rencontre l'une des droites D_i. Alors P borde un polyèdre contenant p si et seulement si chaque $P \cap D_i$ borde dans D_i un polyèdre qui contient p.*

Preuve. Si $P = \partial Q$, alors $P \cap D_i = \partial(Q \cap D_i)$ borde dans D_i.

Inversement, notons i l'indice du point p (il vaut 0 ou 1). Le long de chaque demi-droite D_i, l'indice ne prend que les valeurs i et $i-1$. Soit Q un collier pour P (proposition 17) et Q' un collier pour P avec orientation opposée. Par hypothèse, chaque composante connexe de Q (resp. Q') coupe une des demi-droite D_i, donc l'indice ne prend que les valeurs i et $i-1$ sur $Q \cup Q'$. Comme dans la preuve du théorème 3, l'ensemble de niveau de l'indice qui contient p est un polyèdre dont le bord est P. ∎

References

[H] Ch. HOFFMANN, *Geometric and solid modeling, an introduction.* Morgan Kaufmann, San Mateo CA, (1989).

[M] J. MILNOR, *Topology from the differentiable viewpoint.* The University Press of Virginia, (1965).

Laboratoire de Mathématique d'Orsay
U.M.R. 8628 du C.N.R.S.
Bâtiment 425
Université de Paris-Sud

91405 Orsay
France
Pierre.Pansu@math.u-psud.fr
http://www.math.u-psud.fr/~pansu