Topologie et géométrie différentielle

P. Pansu

June 4, 2004

Chapter 1

Courbure des surfaces

1.1 Motivation

Cette fois, il s'agit de donner des conditions de raccord G^k pour des surfaces. De nouveau, on commence par attacher à une surface des invariants indépendants d'une paramétrisation : le plan tangent et la seconde forme fondamentale.

La section 1.2 donne la formule pour le calcul de l'aire d'une surface. La seconde forme fondamentale est introduite en section 1.3. Elle joue pour une surface le rôle que joue la courbure pour une courbe : elle contient l'information au 2ème ordre, indépendamment de tout choix de paramétrisation. C'est un objet plus complexe, une forme quadratique sur le plan tangent. On peut y penser comme à une fonction sur les directions (la courbure des sections par des plans perpendiculaires au plan tangent). Comme elle est quadratique, elle est en fait déterminée par un repère orthonormé du plan tangent (les directions principales) et deux nombres, les courbures principales (ou alternativement par la courbure moyenne et la courbure de Gauss).

La courbure de Gauss et la courbure moyenne ont chacune une interprétation géométrique. La courbure de Gauss donne l'aire de l'image de la surface par l'application de Gauss (section 1.4), tandis que la courbure moyenne intervient dans l'aire des surfaces équidistantes (section 1.5). La positivité de la courbure de Gauss traduit la convexité. L'annulation de la courbure moyenne caractérise les surfaces minimales, qui modélisent les films de savon. A la différence de la courbure moyenne, la courbure de Gauss est invariante par déformation isométrique : c'est un invariant intrinsèque de la surface. Borner la courbure d'une surface, c'est simplement borner les courbures principales. Cela joue un rôle dans la construction des congés par roulement d'une bille dans la gouttière formée par deux surfaces.

Les conditions de raccord G^1 et G^2 sont enfin obtenues en section 1.6.

1.2 Première forme fondamentale

Soit X une surface dans l'espace euclidien $\mathbf{R}^3$. Le plan tangent hérite de la structure euclidienne de l'espace ambiant. Etant donnée une paramétrisation locale $(u,v) \mapsto X(u,v)$, si

$$w = a\frac{\partial X}{\partial u} + b\frac{\partial X}{\partial v}$$

est un vecteur tangent, sa norme euclidienne est

$$\| w \|^2 = a^2 \| \frac{\partial X}{\partial u} \|^2 + 2ab\frac{\partial X}{\partial u} \cdot \frac{\partial X}{\partial v} + b^2 \| \frac{\partial X}{\partial v} \|^2 .$$

Si $t \mapsto c(t) = (u(t), v(t))$ est une courbe tracée dans le domaine des paramètres, la longueur de la courbe correspondante $\mapsto X(u(t), v(t))$ tracée sur la surface vaut

$$\mathrm{long}\,(X \circ c) = \int \sqrt{u'(t)^2 \parallel \frac{\partial X}{\partial u} \parallel^2 + 2u'(t)v'(t)\frac{\partial X}{\partial u} \cdot \frac{\partial X}{\partial v} + v'(t)^2 \parallel \frac{\partial X}{\partial v} \parallel^2}\, dt.$$

La forme quadratique (dépendant du point (u, v))

$$ds^2 = \parallel \frac{\partial X}{\partial u} \parallel^2 du^2 + 2\frac{\partial X}{\partial u} \cdot \frac{\partial X}{\partial v}\, dudv + \parallel \frac{\partial X}{\partial v} \parallel^2 dv^2$$

s'appelle parfois la *première forme fondamentale* de la surface X.

On note traditionnellement $E = \parallel \frac{\partial X}{\partial u} \parallel^2$, $G = \parallel \frac{\partial X}{\partial v} \parallel^2$, $F = \frac{\partial X}{\partial u} \cdot \frac{\partial X}{\partial v}$.

Elle sert non seulement au calcul des longueurs de courbes, mais aussi à celui des aires.

Définition 1 *L'*aire (`area`) *d'une surface $(u, v) \mapsto X(u, v)$ $(u, v) \in U$, est donnée par l'intégrale*

$$\mathrm{Aire}(X) = \int_U \parallel \frac{\partial X}{\partial u} \wedge \frac{\partial X}{\partial v} \parallel\; du\, dv.$$

L'aire ne dépend pas du choix de paramétrisation. Cela résulte de la formule de changement de variable dans les intégrales doubles. Remarquer que l'intégrand vaut

$$\parallel \frac{\partial X}{\partial u} \wedge \frac{\partial X}{\partial v} \parallel = \sqrt{EG - F^2}.$$

Exercice 1 *On paramètre la sphère unité par la latitude θ et la longitude ϕ. Ecrire cette paramétrisation. La normale orientée sort elle ou rentre-t-elle dans la sphère ? Ecrire la première forme fondamentale. Calculer la longueur d'un parallèle. Calculer l'aire de la sphère unité.*

Exercice 2 *Si P et Q sont deux points de la sphère unité de $\mathbf{R}^3$, on définit leur distance $d(P, Q)$ comme la borne inférieure des longueurs des courbes tracées sur la sphère qui relient P à Q. Montrer que $d(P, Q) = \mathrm{Arccos}(P \cdot Q)$, i.e. que la borne inférieure est atteinte par un des arcs du grand cercle passant par P et Q.*

Exercice 3 *Calculer l'aire d'une surface de révolution générale, puis dans le cas particulier du tore de révolution dont la méridienne est un cercle de rayon r_2 dont le centre est situé à distance $r_1 > r_2$ de l'axe.*

Noter que le vecteur $\frac{\partial X}{\partial u} \wedge \frac{\partial X}{\partial v}$ est orthogonal au plan tangent, et non nul par hypothèse. Il détermine donc une orientation normale du plan tangent. C'est l'*orientation déterminée par la paramétrisation* $(u, v) \mapsto X(u, v)$. Le *vecteur unitaire normal orienté* à X est

$$\Gamma(X(u, v)) = \frac{\frac{\partial X}{\partial u} \wedge \frac{\partial X}{\partial v}}{\parallel \frac{\partial X}{\partial u} \wedge \frac{\partial X}{\partial v} \parallel}.$$

1.3 Seconde forme fondamentale

La courbure d'une courbe plane en un point P est un nombre indépendant d'un choix de paramétrisation. On la définit à partir d'une paramétrisation canonique, l'abscisse curviligne. Voici une autre définition possible, reposant sur un autre choix de paramétrisation canonique. Soit $\tau(P)$ le vecteur tangent unitaire et $\nu(P)$ le vecteur normal unitaire. Dans le repère $(P, \tau(P), \nu(P))$, la courbe est un graphe $t \mapsto (t, f(t))$, où $f(0) = f'(0) = 0$. Alors f admet le développement limité à l'ordre 2

$$f(t) = \frac{1}{2}\kappa(P)t^2 + o(t^2)$$

en 0 (exercice du chapitre sur les courbes) et on pourrait partir de ce développement limité pour définir la courbure en P. La même idée va nous guider pour définir la courbure d'une surface.

1.3.1 Courbure d'un graphe

Soit f une fonction sur $\mathbf{R}^2$ qui s'annule avec ses 2 dérivées partielles en $(0,0)$. Considérons son graphe $(x,y) \mapsto (x,y,f(x,y))$. C'est une surface dont le plan tangent en $P=(0,0,0)$ est le plan des coordonnées x et y. f admet un développement limité à l'ordre 2 en $(0,0)$ de la forme

$$f(x,y) = px^2 + 2qxy + ry^2 + o(x^2+y^2).$$

La forme quadratique $2(px^2+2qxy+ry^2)$ sur le plan tangent va tenir lieu de courbure du graphe au point P. La courbure d'une surface n'est pas seulement un nombre, mais une forme quadratique (3 composantes indépendantes).

1.3.2 Paramétrisation d'une surface par son plan tangent

Soit X une surface normalement orientée. Alors (voir la preuve du théorème **??**) X est le graphe d'une fonction définie sur son plan tangent en P. Plus précisément, il existe une unique fonction f sur T_PX telle que l'application

$$T_PX \to \mathbf{R}^3, \quad v \mapsto P + v + f(v)\Gamma(P)$$

soit une paramétrisation locale de X.

Définition 2 *La partie principale q du développement limité à l'ordre 2 de f en 0 est une forme quadratique sur T_PX, définie indépendamment de tout choix de paramétrage de X. On appelle $II = 2q$ la* seconde forme fondamentale de X en P.

Remarque. Changer l'orientation normale de la surface change le signe de la seconde forme fondamentale.

Exercice 4 *Calculer la seconde forme fondamentale de la sphère unité au pôle nord.*

Exercice 5 *Soit $t \mapsto c(t)$ une courbe tracée dans le plan horizontal $\{z=0\}$ de $\mathbf{R}^3$. Soit C le cylindre droit sur c, i.e. la réunion des droite verticales coupant la courbe c. Calculer la seconde forme fondamentale du cylindre C en l'un de ses points.*

1.3.3 Courbures principales, directions principales, sections normales

Définition 3 *Il existe un unique endomorphisme symétrique S du plan tangent T_PX tel que pour tout $v \in T_PX$, $II(v) = v \cdot S(v)$. Les valeurs propres k_1, k_2 de S s'appellent les* courbures principales *de X en P et les droites propres de S s'appellent les* directions principales. *Une courbe tracée sur X dont la vitesse est en chaque point une direction principale s'appelle une* ligne de courbure. *La trace de S s'appelle la* courbure moyenne (`mean curvature`) *et le déterminant de S la* courbure de Gauss (`Gauss curvature`).

Soit (e_1, e_2) une base orthonormée formée de vecteurs propres de S (i.e. de directions principales). Dans cette base, la forme quadratique II_P s'écrit

$$II(a_1e_1 + a_2e_2) = a_1^2k_1 + a_2^2k_2$$

où k_1 et k_2 sont les courbures principales. Alors

- II est non dégénérée si et seulement si les deux courbures principales sont non nulles ;
- II est définie positive si et seulement si $k_1 > 0$ et $k_2 > 0$;
- II possède 2 droites isotropes si et seulement si $k_1k_2 < 0$;

L'intersection du plan (orienté) passant par P et dirigé par τ et ν est une courbe, et sa courbure en P vaut par définition $II(\tau)$. Si $\tau(\theta)$ fait un angle θ avec e_1, alors

$$II(\tau(\theta)) = k_1^2 \cos(\theta)^2 + k_2^2 \sin(\theta)^2.$$

Par conséquent, les courbures principales sont les valeurs extrèmes de la courbure des sections planes, elles sont atteintes par les directions principales.

La courbure moyenne s'écrit $h = \mathrm{tr}(S) = k_1 + k_2$, la courbure de Gauss $K = \det(S) = k_1 k_2$. On en donnera plus loin des interprétations géométriques.

1.3.4 Intersection avec le plan tangent

Soit P un point de la surface X. Soit ν le vecteur unitaire normal orienté en P.

Si II_P est définie positive (resp. définie négative), il résulte du développement limité que la fonction f garde un signe constant au voisinage de P, et ne s'annule qu'en P.

Le lieu des zéros (vecteurs isotropes) de la forme quadratique II_P dans le plan tangent donne une idée de l'intersection de la surface X avec son plan tangent. En effet, si II_P est non dégénérée, le lemme de Morse (voir [MM]) garantit qu'il existe un difféomorphisme local du plan tangent, fixant l'origine et dont la différentielle à l'origine est l'identité, envoyant l'intersection $T_P X \cap X$ sur le cône isotrope de II_P.

Proposition 4
- *si II_P est définie positive (resp. définie négative), la surface X est entièrement au-dessus (resp. au-dessous) de son plan tangent au voisinage de P ;*
- *si II_P change de signe, alors $T_P X \cap X$ coïncide au voisinage de P avec la réunion de deux courbes transverses en P, et chacune est tangente à une* direction asymptotique *de II_P, i.e. une droite isotrope.*

Par conséquent, si la courbure de Gauss est strictement positive, la surface reste d'un seul côté de son plan tangent. Si au contraire la courbure de Gauss est strictement négative, la surface traverse son plan tangent.

En particulier, si X est le bord d'un convexe, alors la courbure de Gauss de X est positive ou nulle. Sa seconde forme fondamentale relative à la normale sortante est en chaque point une forme quadratique négative ou nulle.

1.3.5 Courbes tracées sur une surface

Lemme 5 *Soit $t \mapsto Y(t)$ une courbe tracée sur la surface X. Soit $P = Y(0) \in X$, $\tau = Y'(0) \in T_P X$. Alors $II_P(\tau)$ est la composante normale à X de l'accélération $Y''(0)$.*

Preuve. Notons $c(t)$ la projection orthogonale de $Y(t) - P$ sur le plan vectoriel $T_P X$. Ecrivons X comme le graphe d'une fonction f définie sur son plan tangent. Alors pour tout t proche de 0,

$$Y(t) = P + c(t) + f(c(t)\nu = P + t\tau + \frac{t^2}{2} Y''(0) + o(t^2)$$

mais aussi

$$Y(t) = P + t\tau + \frac{t^2}{2}(c''(0) + II(\tau)\nu) + o(t^2)$$

donc $II_P(\tau)$ est la composante normale à X de l'accélération. ∎

Exercice 6 *Supposons que la surface X contient la droite D. Montrer que D est une direction asymptotique de X*

1.3.6 Calcul des courbures principales

Proposition 6 *Soit $(u,v)\mapsto X(u,v)$ une surface paramétrée. La seconde forme fondamentale au point $X(u,v)$ est la forme quadratique sur le plan tangent (engendré par $\frac{\partial X}{\partial u}(u,v)$ et $\frac{\partial X}{\partial v}(u,v)$) peut se calculer comme suit.*

$$II_{X(u,v)}(a\frac{\partial X}{\partial u}(u,v)+b\frac{\partial X}{\partial v}(u,v))=a^2A+2abB+b^2C$$

où

$$\begin{aligned}
A &= \| \frac{\partial X}{\partial u}(u,v)\wedge\frac{\partial X}{\partial v}(u,v)\|^{-1}\ \det(\frac{\partial^2 X}{\partial u^2}(u,v),\frac{\partial X}{\partial u}(u,v),\frac{\partial X}{\partial v}(u,v)),\\
B &= \| \frac{\partial X}{\partial u}(u,v)\wedge\frac{\partial X}{\partial v}(u,v)\|^{-1}\ \det(\frac{\partial^2 X}{\partial u\partial v}(u,v),\frac{\partial X}{\partial u}(u,v),\frac{\partial X}{\partial v}(u,v)),\\
C &= \| \frac{\partial X}{\partial u}(u,v)\wedge\frac{\partial X}{\partial v}(u,v)\|^{-1}\ \det(\frac{\partial^2 X}{\partial v^2}(u,v),\frac{\partial X}{\partial u}(u,v),\frac{\partial X}{\partial v}(u,v)).
\end{aligned}$$

Preuve. On considère la courbe $t\mapsto Y(t)=X(u+at,v+bt)$ tracée sur la surface. Ses dérivées sont

$$Y'(t)=a\frac{\partial X}{\partial u}(u+at,v+bt)+v\frac{\partial X}{\partial v}(u+at,v+bt)$$

et

$$Y''(0)=a_2\frac{\partial^2 X}{\partial u^2}(u,v)+2ab\frac{\partial^2 X}{\partial u\partial v}(u,v)+b^2\frac{\partial^2 X}{\partial v^2}(u,v).$$

Par conséquent

$$\begin{aligned}
II_{X(u,v)}(a\frac{\partial X}{\partial u}(u,v) &+ b\frac{\partial X}{\partial v}(u,v))II(Y'(0))\\
&= Y''(0)\cdot\nu\\
&= \| \frac{\partial X}{\partial u}(u,v)\wedge\frac{\partial X}{\partial v}(u,v)\|^{-1}\ \det(Y''(0),\frac{\partial X}{\partial u}(u,v),\frac{\partial X}{\partial v}(u,v))\\
&= a_2A+2abB+b^2C.
\end{aligned}$$

Exercice 7 *Soit X le paraboloïde hyperbolique d'équation $z=xy$. Calculer sa seconde forme fondamentale, ses courbures principales. Quelles sont les directions asymptotiques ? On utilisera deux systèmes de coordonnées différents, $(u,v)\mapsto X(u,v)=(u,v,uv)$ et $(u',v')\mapsto X_1(u',v')=(u'/v',v',u')$ et on comparera les résultats obtenus.*

Exercice 8 *Soit c une courbe tracée dans le plan $\{z=0\}$. Soit $V=(0,0,1)$, soit X le cône de sommet V et de base c. Calculer sa seconde forme fondamentale. Quelle est sa signature ?*

Exercice 9 *Soit c une courbe tracée sur la sphère unité. Soit X le cône de sommet l'origine et de base c. Calculer sa seconde forme fondamentale.*

Corollaire 7 *Soit $(u,v)\mapsto X(u,v)$ une surface paramétrée, munie de l'orientation normale déterminée par la paramétrisation. Notons*

$$E\,du^2+2F\,du\,dv+G\,dv^2 \quad \textit{et} \quad A\,du^2+2B\,du\,dv+C\,dv^2$$

la première et la seconde forme fondamentales. La matrice dans la base $(\frac{\partial X}{\partial u},\frac{\partial X}{\partial v})$ de l'endomorphisme symétrique S qui relie les deux formes quadratiques est le produit

$$\begin{pmatrix}E & F\\ F & G\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}A & B\\ B & C\end{pmatrix}$$

(elle n'est pas nécessairement symétrique). Les courbures principales sont les valeurs propres de cette matrice et les directions principales ses droites propres. En particulier, la courbure de Gauss est donnée par la formule

$$K(X(u,v)) = \frac{AC - B^2}{EG - F^2}.$$

Preuve. Soient $w = a\frac{\partial X}{\partial u} + b\frac{\partial X}{\partial v}$ et $w = a'\frac{\partial X}{\partial u} + b'\frac{\partial X}{\partial v}$ deux vecteurs tangents à X au point $X(u,v)$. Leur produit scalaire s'écrit au moyen de la première forme fondamentale,

$$w' \cdot w = \begin{pmatrix} a' & b' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}.$$

L'endomorphisme symétrique S est défini par la relation

$$II_{X(u,v)}(w', w) = w' \cdot S(w).$$

Sa matrice M satisfait donc

$$\begin{aligned} w' \cdot S(w) &= \begin{pmatrix} a' & b' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} M \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a' & b' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & B \\ B & C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \end{aligned}$$

d'où l'équation matricielle

$$\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} M = \begin{pmatrix} A & B \\ B & C \end{pmatrix}.$$

Comme les valeurs propres d'un endomorphisme se calculent à partir de sa matrice dans n'importe quelle base, les courbures principales sont les valeurs propres de M.

Enfin

$$\begin{vmatrix} E & F \\ F & G \end{vmatrix} \det(M) = \begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix}$$

donc

$$K = \det(S) = \det(M) = \frac{AC - B^2}{EG - F^2}. \blacksquare$$

Exercice 10 *Soit X la surface de révolution décrite par une courbe plane située dans un plan vertical (la* méridienne*) qu'on fait tourner autour de l'axe des z. Paramétrer X, calculer les courbures principales et les directions principales. Traiter le cas particulier du tore de révolution de méridienne circulaire.*

Exercice 11 *Soit c une courbe gauche sans point d'inflexion. Dans le plan affine passant par $c(t)$ et orthogonal à la tangente à c, on trace un cercle de rayon ϵ. Soit X la surface de décrite par ce cercle. En utilisant le repère de Frenet de c, paramétrer X, calculer l'aire, l'intégrale par rapport à l'élément d'aire de la courbure de Gauss ainsi que de sa valeur absolue, les courbures principales et les directions principales.*

1.3.7 Contact d'ordre 2

Soit X une surface. Parmi tous les plans affines passant par P, le plan $\pi = P + T_P X$ est le seul qui approche le la surface au sens suivant : il existe un difféomorphisme ϕ tel que $\phi(P) = P$, $d_P\phi$ est l'identité et $X = \phi(\pi)$ au voisinage de P. Ce difféomorphisme est construit dans la preuve du théorème **??**.

Cela a pour conséquence le fait que le plan π épouse la surface : si $M \in X$ est voisin de P, il existe $M' \in \pi$ tel que

$$\| M - M' \| \leq \epsilon(\| M - P \|)$$

où la fonction ϵ satisfait $\lim_{x\to 0} x^{-1}\epsilon(x) = 0$. En effet, comme $d_P(\phi^{-1}) = id$, pour $M \in X$ voisin de P,
$$\phi^1(M) = P + (M - P) + o(\| M - P \|)$$
donc $M' = \phi^1(M) \in \pi$ et $\| M - M' \| = o(\| M - P \|)$.

L'exemple du plan tangent suggère une notion de contact plus générale.

Définition 8 *Deux surfaces X_1 et X_2 ont un* contact d'ordre k *au point P s'il existe un difféomorphisme local ϕ envoyant X_1 and X_2 et admettant en P un développement limité de la forme*

$$\phi(M) = P + o(\| M - P \|^k).$$

Exemple. Deux surfaces ont un contact d'ordre 1 en P si et seulement si elles contiennent P et ont même plan tangent en P.

En effet, la condition de contact à l'ordre 0 est que $P \in X_1 \cap X_2$. S'il y a contact à l'ordre 1, le difféomorphisme ϕ a une différentielle en P égale à l'identité, donc $T_P X_2 = d_P\phi(T_P X_1) = T_P X_1$. Inversement, si les surfaces X_1 et X_2 ont même plan tangent en P, elles ont chacune un contact d'ordre un avec le même plan affine, donc elles ont un contact d'ordre 1 entre elles.

Proposition 9 *Deux surfaces X_1 et X_2 ont un contact d'ordre 2 au point P si et seulement si elles contiennent P, y ont même plan tangent et même seconde forme fondamentale.*

Preuve. Composer une paramétrisation d'une surface avec un difféomorphisme tangent à l'ordre 2 à l'identité en P ne change pas les dérivées secondes en P, donc ne change pas la seconde forme fondamentale, proposition 6.

Inversement, supposons que X_1 et X_2 ont même plan tangent et même seconde forme fondamentale en P. Choisissons des coordonnées cartésiennes d'origine P et telles que le plan tangent commun en P ait pour équation $\{z = 0\}$. Ecrivons X_1 et X_2 comme des graphes au-dessus de leur plan tangent commun, i.e. utilisons les paramétrisations

$$(u, v) \mapsto X_1(w) = (u, v, f_1(u, v)) \quad \text{et} \quad (u, v) \mapsto X_2(w) = (u, v, f_2(u, v)).$$

pour X_1 et X_2. Posons
$$\phi(x, y, z) = (x, y, z + f_2(x, y) - f_1(x, y)).$$
Alors ϕ est un difféomorphisme local de $\mathbf{R}^3$ qui fixe P et dont la différentielle en P est l'identité. Il envoie X_1 sur X_2. L'égalité des secondes formes fondamentales entraîne que le développement limité à l'ordre 2 de $f_2 - f_1$ est de la forme

$$(f_2 - f_1)(x, y) = o(x^2 + y^2)$$

donc celui de ϕ est de la forme

$$\phi(x, y, z) = (x, y, z) + o(x^2 + y^2 + z^2).$$

i.e.
$$\phi(M) = P + (M - P) + o(\| M - P \|^2).$$
donc il y a contact à l'ordre 2. ∎

Exercice 12 *Montrer qu'une surface a en un point P un contact d'ordre 2 avec un plan si et seulement si la seconde forme fondamentale II_P est nulle. Montrer qu'une surface a en un point P un contact d'ordre 2 avec une sphère si et seulement si en P les courbures principales sont égales et non nulles.*

1.4 L'application de Gauss

Définition 10 *Soit X une surface normalement orientée dans $\mathbf{R}^3$. L'application de X dans la sphère unité S^2 qui à un point P associe le vecteur unitaire normal orienté $\Gamma(P)$ s'appelle l'*application de Gauss (`Gauss map`).

Remarque. Si X est une surface normalement orientée de classe C^k, l'application de Gauss est de classe C^{k-1}.

1.4.1 Dérivée de l'application de Gauss

Lemme 11 *Soit $t \mapsto c(t)$ une courbe tracée sur une surface X, telle que $c(0) = P et\, c'(0) = \tau$. Soit $\Gamma : X \to S^2$ l'application de Gauss. Alors pour tout vecteur tangent $w \in T_P X$,*

$$(ddt\Gamma(c(t))) \cdot w = -II(\tau, w)$$

où on a encore noté II la forme bilinéaire symétrique associée à II. En particulier,

$$ddt\Gamma(c(t)) \cdot \tau = -II(\tau).$$

Preuve. Prolongeons la paramétrisation $t \mapsto c(t)$ en une paramétrisation locale $(t, u) \mapsto X(t, u)$ de X telle que $\frac{\partial X}{\partial u} = w$ (c'est toujours possible). Notons $\Gamma(t, u) = \Gamma(X(t, u))$. Comme pour tout t, $\frac{\partial X}{\partial u} \cdot \Gamma(t, u) = 0$, il vient

$$\frac{\partial X}{\partial u} \cdot \frac{\partial \Gamma}{\partial t} + \Gamma \cdot \frac{\partial^2 X}{\partial u^2} = 0$$

i.e.

$$(ddt\Gamma(c(t))) \cdot w = -G \cdot \frac{\partial^2 X}{\partial u^2} = -II(\tau, \frac{\partial X}{\partial u}) = -II(\tau, w)$$

d'après la proposition 6. ∎

Corollaire 12 *La seconde forme fondamentale est la dérivée de l'application de Gauss. Plus précisément, notons S l'endomorphisme symétrique de l'espace tangent $T_P X$ tel que pour tout vecteur tangent w $II_P(w) = S(w) \cdot w$. Alors l'espace tangent $T_{\Gamma(P)} S^2 = \Gamma(P)^\perp = T_P X$ et $S = -d\Gamma$.*

Théorème 1 *L'intégrale de la courbure de Gauss par rapport à l'élément d'aire est l'aire de l'image de l'application de Gauss. En particulier, pour une surface compacte et sans bord, l'intégrale de la courbure de Gauss est un multiple entier de l'aire de la sphère unité,*

$$\int_X K \, dA = 4\pi\delta.$$

Le nombre δ (au signe près) est la moitié de la caractéristique d'Euler de X, et ne dépend que de la topologie de X.

Preuve.

Voir [S], Volume III, Chapter 6, Theorem 10, page 428. ∎

Exercice 13 *Soit X une surface et π un plan de $\mathbf{R}^3$. Le* contour apparent dans X *est l'ensemble des points de X où la projection orthogonale sur π n'est pas une submersion. Montrer que le contour apparent dans X est une courbe lisse, sauf peut-être aux points où la courbure de Gauss s'annule. Le* contour apparent dans π *est la projection dans π du contour apparent dans X. Montrer que le contour apparent dans π est lisse sauf peut-être aux points où la normale à π est une direction asymptotique de X.*

1.4.2 Déformations isométriques

Définition 13 *Deux surfaces X_1 et X_2 sont dites* isométriques *s'il existe un difféomorphisme de l'une sur l'autre qui préserve la longueur des courbes. Autrement dit, qui préserve la première forme fondamentale.*

Exemple. Un cône, un cylindre et un plan sont localement isométriques. En effet, si C est le cylindre vertical de section une courbe plane horizontale c paramétrée par son abscisse curviligne, l'application

$$\mathbf{R}^2 \to C, \quad (u,v) \mapsto X(u,v) = (c(u), v)$$

est isométrique, car la première forme fondamentale dans cette paramétrisation se lit $du^2 + dv^2$.

Pour la même raison, si K est le cône de sommet l'origine s'appuyant sur une courbe c tracée sur la sphère unité et paramétrée par son abscisse curviligne, l'application

$$\mathbf{R}^2 \to K, \quad (s,r) \mapsto r\,c(s)$$

est isométrique.

Définition 14 *Soit X une surface, soient P et Q deux points de X. La* distance intrinsèque *entre P et Q est la borne inférieure des longueurs des courbes tracées sur X reliant P à Q.*

Exemple. Si X est la sphère unité, la distance intrinsèque est donnée par la formule

$$dist(P,Q) = \mathrm{Arccos}(P \cdot Q).$$

Voir exercice 2.

Théorème 2 *Soit X une surface, P un point de X. Pour $r > 0$, notons C_r le lieu des points de X dont la distance intrinsèque à P est exactement égale à r. Alors, pour r assez petit, C_r est une courbe. On a le développement limité*

$$\mathrm{long}\,(C_r) = 2\pi r - \frac{\pi}{3}K(P)r^3 + o(r^3)$$

où $K(P)$ est la courbure de Gauss en P.

Preuve. Voir [S], Volume III, chapter 2. ∎

Corollaire 15 *Un difféomorphisme isométrique entre deux surfaces préserve la courbure de Gauss.*

Exemple. La sphère n'est pas localement isométrique à un plan. On peut montrer que deux surfaces de même courbure constante sont toujours localement isométriques.

Géométrie riemannienne. On peut en fait donner une formule pour la courbure de Gauss en fonction de la première forme fondamentale seule, c'est le Theorema Egregium de Gauss. Plus généralement, l'étude des propriétés *intrinsèques* d'une surface munie d'une première forme fondamentale s'appelle la *géométrie riemannienne*, voir par exemple [GHL].

1.5 Surfaces équidistantes

Définition 16 *Soit X une surface normalement orientée. La* surface équidistante (`offset surface`) *X_ϵ est le lieu des points de la forme $P + \epsilon\Gamma(P)$ où $\Gamma(P)$ est le vecteur normal unitaire orienté en P.*

Lemme 17 *Soit $(u,v)\mapsto X(u,v)$ une paramétrisation locale d'une surface. Posons*

$$(u,v)\mapsto X_\epsilon(u,v)=X(u,v)+\epsilon\Gamma(X(u,v))$$

C'est une paramétrisation locale de la surface équidistante X_ϵ tant que le produit de ϵ et des courbures principales de X reste inférieur à 1.

Soit S l'endomorphisme qui relie la seconde forme fondamentale de X à la première. Soit M sa matrice dans la base $(\frac{\partial X}{\partial u},\frac{\partial X}{\partial v})$. Alors la première forme fondamentale de X_ϵ est donnée par la matrice

$$\begin{pmatrix}E_\epsilon & F_\epsilon\\ F_\epsilon & G_\epsilon\end{pmatrix}=(1-\epsilon M)^T\begin{pmatrix}E & F\\ F & G\end{pmatrix}(1-\epsilon M).$$

La seconde forme fondamentale de X_ϵ est donnée par la matrice

$$\begin{pmatrix}A_\epsilon & B_\epsilon\\ B_\epsilon & C_\epsilon\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}A & B\\ B & C\end{pmatrix}(1-\epsilon M).$$

En particulier, pour ϵ petit,

$$\mathrm{Aire}(X_\epsilon)=\mathrm{Aire}(X)-\epsilon\int_X h\,dA+\epsilon^2\int_X K\,dA$$

où h est la courbure moyenne et K la courbure de Gauss de X. La courbure de Gauss de X_ϵ vaut

$$K_\epsilon(P+\epsilon\Gamma(P))=\frac{K(P)}{1-\epsilon h(P)+\epsilon^2K(P)}.$$

Preuve. Soit $w=a\dfrac{\partial X}{\partial u}+b\dfrac{\partial X}{\partial v}$ un vecteur tangent à X en P. Soit $t\mapsto c(t)$ une courbe tracée sur X telle que $c(0)=P$ et $c'(0)=w$. La courbe

$$t\mapsto c_\epsilon(t)=c(t)+\epsilon\Gamma(c(t))$$

est tracée sur X_ϵ. Sa vitesse en $t=0$ vaut

$$w_\epsilon=c'(0)+\epsilon d_P\Gamma(c'(0))=w-\epsilon S(w)$$

d'après le corollaire 12. C'est un vecteur de T_PX. On conclut que les plans tangents T_PX et $T_{P+\epsilon\Gamma(P)}X_\epsilon$ coïncident, et que les normales sont égales,

$$\Gamma_\epsilon(P+\epsilon\Gamma(P))=\Gamma(P).$$

Soient k_1 et k_2 les courbures principales de X en P. Alors les valeurs propres de l'endomorphisme $id-\epsilon S$ de T_PX sont $1-\epsilon k_1$ et $1-\epsilon k_2$. Si $\epsilon k_1<1$ et $\epsilon k_2<1$, alors $id-\epsilon S$ est inversible donc

$$\frac{\partial X_\epsilon}{\partial u}=(id-\epsilon S)\frac{\partial X}{\partial u}\quad\text{et}\quad\frac{\partial X_\epsilon}{\partial v}=(id-\epsilon S)\frac{\partial X}{\partial v}$$

sont linéairement indépendants, X_ϵ est une surface au voisinage de $P+\epsilon\Gamma(P)$.

Par définition,

$$\begin{aligned}
&\begin{pmatrix}a & b\end{pmatrix}\begin{pmatrix}E_\epsilon & F_\epsilon\\ F_\epsilon & G_\epsilon\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\ b\end{pmatrix}\\
=\;& \|\, ddt(c(t)+\epsilon\Gamma(c(t)))\,\|^2\\
=\;& \|\,(1-\epsilon S)(w)\,\|^2\\
=\;& ((1-\epsilon M)\begin{pmatrix}a\\ b\end{pmatrix})^T\begin{pmatrix}A & B\\ B & C\end{pmatrix}(1-\epsilon M)\begin{pmatrix}a\\ b\end{pmatrix}\\
=\;& \begin{pmatrix}a & b\end{pmatrix}(1-\epsilon M)^T\begin{pmatrix}A & B\\ B & C\end{pmatrix}(1-\epsilon M)\begin{pmatrix}a\\ b\end{pmatrix}
\end{aligned}$$

donc

$$\begin{pmatrix} E_\epsilon & F_\epsilon \\ F_\epsilon & G_\epsilon \end{pmatrix} = (1-\epsilon M)^T \begin{pmatrix} A & B \\ B & C \end{pmatrix} (1-\epsilon M).$$

De même, d'après le lemme 11,

$$\begin{aligned} II_\epsilon(w_\epsilon) &= -ddt\Gamma_\epsilon(c_\epsilon(t)) \cdot w_\epsilon \\ &= -ddt\Gamma(c(t)) \cdot w_\epsilon \\ &= II(w, w_\epsilon). \end{aligned}$$

Matriciellement, cela s'écrit

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_\epsilon & B_\epsilon \\ B_\epsilon & C_\epsilon \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \\ = & \begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix})^T \begin{pmatrix} A & B \\ B & C \end{pmatrix} (1-\epsilon M) \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

c'est-à-dire,

$$\begin{pmatrix} A_\epsilon & B_\epsilon \\ B_\epsilon & C_\epsilon \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ B & C \end{pmatrix} (1-\epsilon M).$$

La densité par rapport à $du\,dv$ de l'élément d'aire sur X_ϵ est

$$\begin{aligned} \sqrt{E_\epsilon G_\epsilon - F_\epsilon^2} &= \sqrt{EG - F^2} \det(1-\epsilon M) \\ &= \sqrt{EG-F^2}(1-\epsilon k_1)(1-\epsilon k_2) \\ &= \sqrt{EG-F^2}(1-\epsilon h + \epsilon^2 K) \end{aligned}$$

où h est la courbure moyenne de X et K la courbure de Gauss de X en P. La formule pour l'aire de X_ϵ en résulte immédiatement. Celle pour la courbure de Gauss résulte du corollaire 7,

$$\begin{aligned} K_\epsilon(X_\epsilon(u,v)) &= \frac{A_\epsilon C_\epsilon - B_\epsilon^2}{E_\epsilon G_\epsilon - F_\epsilon^2} \\ &= \frac{(AC-B^2)\det(1-\epsilon M)}{(EG-F^2)\det(1-\epsilon M)\det((1-\epsilon M)^T)} \\ &= \frac{K(X(u,v))}{\det(1-\epsilon M)} \\ &= \frac{K(X(u,v))}{1-\epsilon h(X(u,v)) + \epsilon^2 K(X(u,v))}. \blacksquare \end{aligned}$$

1.5.1 Rayon d'injectivité normal

Comme pour une courbe dans le plan, à une surface normalement orientée X de $\mathbf{R}^3$ est associée l'application *exponentielle normale*

$$X \times]-\epsilon, \epsilon[\to \mathbf{R}^3, \quad (P,t) \mapsto P + t\Gamma(P).$$

C'est un difféomorphisme pour $\epsilon > 0$ assez petit (même argument que pour les courbes planes). Le plus grand $\epsilon > 0$ tel que l'exponentielle normale soit un difféomorphisme s'appelle le *rayon d'injectivité normal* de X.

Exemple. Soit c une courbe contenue dans un plan affine π et X le tube de rayon $\epsilon > 0$ autour de c (voir exercice 11). Soit i le rayon d'injectivité normal de la courbe plane c. Alors le rayon d'injectivité normal de X est $\min\{\epsilon, i-\epsilon\}$.

Soit X une surface fermée de classe C^k. Si i est le rayon d'injectivité normal de X, alors sur l'ensemble U des points de $\mathbf{R}^3$ situés à distance de X inférieure à i, la projection sur X est bien définie et de classe C^{k-1}. De même, la distance algébrique à X est de classe C^{k-1}. Si $0 < \epsilon < i$, le lieu des points situés à distance exactement ϵ de X est la réunion des deux surfaces équidistantes X_ϵ et $X_{-\epsilon}$. En particulier, on peut faire glisser une sphère de rayon ϵ sur la surface X, d'un côté ou de l'autre, sans jamais rencontrer d'obstacle.

1.5.2 Congés

Théorème 3 *Soient X_1, X_2 et X_3 trois surfaces de classe C^2 se coupant en un point P. On suppose que les normales en P sont linéairement indépendantes, i.e. que*

$$\alpha = \det(\Gamma_1(P), \Gamma_2(P), \Gamma_3(P)) > 0.$$

Soit M un majorant des courbures principales des trois surfaces en tous leurs points. On suppose que les trois surfaces sont contenues dans une boule de centre P et de rayon $L < \alpha/2M$. Soit $\epsilon < \alpha L/8$. Alors sur la boule $B(P, L/8)$, la distance algébrique δ_i à X_i est bien définie, et l'application de composantes $(\delta_1, \delta_2, \delta_3)$ est un difféomorphisme d'un voisinage de P sur $]-\epsilon, \epsilon[^3$. En particulier, le lieu des centres des sphères de rayon ϵ tangentes à X_1 et à X_2 est formé de 8 courbes qui s'arrêtent aux centres des 8 sphères tangentes simultanément aux 3 surfaces.

Preuve. C'est le même argument que pour les courbes. Le seul point nouveau est que si un point Q de X_1 est proche de P, alors il existe une courbe tracée sur X_1, reliant P à Q, de longueur approximativement $\| P - Q \|$. On utilise une section plane. ■

Soient X_1 et X_2 deux surfaces normalement orientées de classe C^2 qui se coupent transversalement. Leur intersection est une courbe γ (ayant éventuellement plusieurs composantes connexes). On note X_1^+ la réunion des composantes connexes du lieu des points dont la distance algébrique à X_2 est ≥ 0 qui rencontrent γ. On définit X_2^+ de la même façon.

Un *congé* `(fillet)` est une surface X de classe G^1 qui coïncide avec $(X_1 \setminus X_1^+) \cup (X_2 \setminus X_2^+)$ en dehors d'un voisinage de γ.

Une méthode classique pour construire un congé consiste à considérer la famille des sphères de rayon $\epsilon < L/8$, borne donnée dans le théorème 3. Leur *enveloppe* est une surface tangente à X_1 (resp. à X_2) le long d'une courbe, la *cicatrice*. Cette enveloppe, lieu des points situés à distance ϵ de la courbe des centres, est un *tube* `(canal surface)`, voir l'exercice 11. Elle est réunion de cercles de rayon ϵ, et sa normale est le rayon du cercle. Par conséquent, le long de la cicatrice, le plan tangent du tube coïncide avec celui de la surface donnée, et le raccord est de classe G^1. Il n'est pas G^2 en général.

Une méthode plus générale consiste à faire rouler dans la gouttière entre deux surfaces une bille de rayon variable. Le congé est alors l'enveloppe d'une famille de sphères de rayon variable. C'est à nouveau la réunion de cercles situés dans des plans orthogonaux à la courbe des centres.

1.6 Conditions de raccord

On se donne une courbe γ dans $\mathbf{R}^3$ et deux surfaces orientées X_1 et X_2 de classe C^2, de même bord γ. On suppose que $X_1 \cap X_2 = \gamma$. On note X l'ensemble obtenu en recollant X_1 et X_2 le long de γ. On va donner des conditions nécessaires et suffisantes pour que X soit une surface de classe G^1 (resp. G^2). A l'ordre un, il faut la coïncidence des espaces tangents le long de γ (autrement dit, annuler une fonction). A l'ordre 2, il faut la coïncidence des secondes formes fondamentales (on verra que cela revient à annuler une fonction).

On a besoin d'un lemme d'analyse.

Lemme 18 *Soit γ une courbe plane de classe C^1, soit P un point de γ. Soit f une fonction continue sur un voisinage U de P, de classe C^1 sur $U \setminus \gamma$. Supposons que les dérivées partielles de f se prolongent par continuïté à γ. Alors f est de classe C^1 sur U.*

Preuve. Quitte à composer f avec un difféomorphisme, on peut supposer que γ est l'axe $\{y = 0\}$.

On note g_x et g_y les prolongements continus des dérivées partielles $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}$. On écrit

$$\begin{aligned} f(x+u,v) &- f(x,0) - ug_x(x,0) - vg_y(x,0) \\ &= \int_0^1 (u(g_x(x+tu,tv) - g_x(x,0)) + v(g_y(x+tu,tv) - g_y(x,0)))\,dt \\ &= o(\sqrt{u^2+v^2}). \blacksquare \end{aligned}$$

Théorème 4 *L'ensemble $X = X_1 \cup X_2$ est une surface de classe G^1 si et seulement si les orientations induites par X_1 et X_2 sur γ sont opposées, et en tout point de γ, les plans tangents à X_1 et X_2 coïncident.*

X est une surface de classe G^2 si et seulement si les orientations induites par X_1 et X_2 sur γ sont opposées, en tout point de γ, les plans tangents à X_1 et X_2 coïncident et les secondes formes fondamentales de X_1 et X_2 sur ce plan sont égales.

Preuve.

Les conditions énoncées ne dépendent que des dérivées premières (resp. premières et secondes) d'une paramétrisation de X, donc elles sont nécessaires.

Inversement, supposons que les orientations induites par X_1 et X_2 sur γ sont opposées et qu'en tout point de γ, les plans tangents à X_1 et X_2 coïncident. Plaçons nous au voisinage d'un point P de γ. Quitte à translater, on peut supposer que $P = 0$. Soit $T = T_PX_1 = T_PX_2$. Au voisinage de P, la projection orthogonale *pr* sur T est un difféomorphisme de X_i sur un fermé D_i dont le bord est $\gamma' = pr(\gamma)$. Comme D_1 et D_2 induisent des orientations opposées sur γ', ils sont de part et d'autre de γ', i.e. ils recouvrent un voisinage de 0 et leurs intérieurs sont disjoints. Ecrivons X_i comme le graphe d'une fonction f_i définie sur D_i. Alors f_1 et f_2 sont de classe C^2 et coïncident le long de γ'. A elles 2, elles constituent une fonction définie au voisinage de 0 dont le graphe est X au voisinage de P.

Fixons des coordonnées cartésiennes (x, y, z) telles que l'équation de T soit $\{z = 0\}$. Parmi les vecteurs orthogonaux au plan tangent à X_i en $(x, y, f(x, y))$, il y en a exactement un dont la 3ème composante vaut 1, il dépend continûment de x et y. Comme ce vecteur a pour composantes

$$(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f_i}{\partial y}, 1),$$

on conclut que les dérivées partielles de f se prolongent par continuïté à γ'. D'après le lemme 18, f est de classe C^1, dont X est de classe G^1 au voisinage de P..

Supposons de plus que X_1 et X_2 ont même seconde forme fondamentale en tout point de γ. Notons $X(u, v) = (u, v, f(u, v))$ dans les coordonnées choisies. On vient de voir que cette application est de classe C^1. Par conséquent, une fonction comme

$$(u, v) \mapsto II_{(u,v,f(u,v))}(\frac{\partial X}{\partial u})$$

est continue au voisinage de 0. Les dérivées secondes de X n'ont qu'une composante non nulle, la dérivée seconde de f, donc

$$\frac{\partial^2 X}{\partial u^2} = (0, 0, \| \frac{\partial X}{\partial u} \wedge \frac{\partial X}{\partial v} \| \, II_{(u,v,f(u,v))}(\frac{\partial X}{\partial u}))$$

est continue au voisinage de 0, ainsi que ses soeurs $\dfrac{\partial^2 X}{\partial v^2}$ et $\dfrac{\partial^2 X}{\partial u \partial v}$. D'après le lemme 18, $\frac{\partial X}{\partial u}$ et $\frac{\partial X}{\partial v}$ sont de classe C^1, donc X est de classe C^2. $\blacksquare$

Corollaire 19 *Soit γ une courbe de classe C^2 dans $\mathbf{R}^3$. Soient X_1 et X_2 deux surfaces orientées de classe C^2, de même bord γ et induisant sur γ des orientations opposées. On suppose que $X_1 \cap X_2 = \gamma$. On suppose que pour tout point P de γ, il existe des vecteurs $w_i \in T_PX_i$ transverses à γ et tels que*

1. *w_1, w_2 et la tangente τ à γ sont coplanaires ;*
2. *les secondes formes fondamentales II^1_P et II^2_P des deux surfaces prennent la même valeur sur le vecteur w_1.*

Alors la réunion $X_1 \cup X_2$ est une surface de classe G^2.

Preuve.
La condition 1) équivaut à l'égalité des plans tangents en tout point de γ, et entraîne donc la continuïté G^1.

Montrons que 2 des 3 composantes des secondes formes fondamentales sont alors automatiquement égales. Choisissons une paramétrisation $v \mapsto \gamma(v)$ de γ et prolongeons là en une paramétrisation $(u,v) \mapsto X_1(u,v)$ de X_1 de classe C^2 telle que $X_1(0,0) = P$ et $\frac{\partial X_1}{\partial u}(0,0) = w_1$. Notons ν le vecteur unitaire normal orienté au plan tangente commun aux deux surfaces le long de γ. Notons τ le vecteur unitaire tangent à γ en P. Alors

$$II^1_P(\tau) = \frac{\partial^2\gamma}{\partial v^2}(0) \cdot \nu(P) \quad \text{et} \quad II^1_P(\tau, w_1) = -\frac{\partial \nu}{\partial v}(0) \cdot w_1$$

d'après le lemme 11. On peut aussi prolonger la paramétrisation de γ en une paramétrisation $(u,v) \mapsto X_2(u,v)$ de X_1 de classe C^2 telle que $X_2(0,0) = P$ et $\frac{\partial X_2}{\partial u}(0,0) = w_1$, et on trouve

$$II^2_P(\tau) = \frac{\partial^2\gamma}{\partial v^2}(0) \cdot \nu(P) = II^1_P(\tau) \quad \text{et} \quad II^2_P(\tau, w_1) = -\frac{\partial \nu}{\partial v}(0) \cdot w_1 = II^1_P(\tau, w_1).$$

Par conséquent, si en plus $II^2_P(w_1) = II^1_P(w_1)$, alors les secondes formes fondamentales II^2_P et II^1_P sont égales. Le théorème 4 s'applique, et $X_1 \cup X_2$ est une surface de classe G^2 au voisinage de γ. ∎

Corollaire 20 *Soient X_1 et X_2 deux surfaces à bord de classe C^2, de même bord γ, et telles que $X_1 \cap X_2 = \gamma$. Pour que la réunion $X = X_1 \cup X_2$ soit une surface de classe G^2, il faut et il suffit que par tout point de γ, il passe une courbe de classe G^2, transverse à γ et entièrement contenue dans X.*

Preuve. La condition est clairement nécessaire. Inversement, étant donnée une courbe transverse à γ, de classe G^2 et contenue dans $X_1 \cup X_2$, on oriente les surfaces X_1 et X_2 au voisinage de γ de façon compatible, et on applique le corollaire 19 en choisissant pour $w_1 = w_2$ le vecteur vitesse de la courbe. ∎

Corollaire 21 *Soient X_1 et X_2 deux surfaces à bord de classe C^2, de même bord γ, et telles que $X_1 \cap X_2 = \gamma$. On suppose que γ n'est pas une ligne asymptotique de X_1. Pour que la réunion $X = X_1 \cup X_2$ soit une surface de classe G^2, il faut et il suffit que les courbures de Gauss de X_1 et de X_2 en tout point de γ coïncident.*

Preuve. Soit τ le vecteur unitaire tangent à γ et η la normale à γ dans X_1. La matrice de la seconde forme fondamentale de X_1 (resp. X_2) dans cette base est de la forme

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ b_1 & c_1 \end{pmatrix} (resp. \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ b_2 & c_2 \end{pmatrix})$$

où

$$a_1 = II_1(\tau) = -ddt\Gamma \cdot \tau = II_2(\tau) = a_2,$$
$$b_1 = II_1(\tau, \eta) = -ddt\Gamma \cdot \eta = II_2(\tau, \eta) = b_2.$$

Si les courbures de Gauss sont égales et si $a_1 \neq 0$,

$$a_1 c_1 - b_1^2 = a_2 c_2 - b_2^2$$

entraîne que $c_1 = c_2$ donc les secondes formes fondamentales coïncident. ∎

Exercice 14 *Soient* c_1 *et* c_2 *deux courbes, soit* $\epsilon > 0$ *et soient* X_1, X_2 *les tubes de rayon* ϵ *autour de* c_1 *et* c_2. *Montrer que* X_1 *et* X_2 *se raccordent* G^0 *si et seulement si les courbes* c_1 *et* c_2 *se raccordent* G^1. *Montrer que les tubes se raccordent* G^2 *si et seulement si les courbent se raccordent* G^2.

Bibliography

[F] G. FARIN, *Curves and surfaces for computer aided geometric design, a practical guide.* 2nd ed. Academic Press. Boston, Mass. (1990).

[N] G. FARIN, *NURBS. From projective geometry to practical use.* 2nd ed. A. K. Peters, Wellesley, Mass. (1999).

[GHL] S. GALLOT, D. HULIN, J. LAFONTAINE, *Riemannian geometry.* Universitext. Springer-Verlag, Berlin, (1990).

[H] Ch. HOFFMANN, *Geometric and solid modeling, an introduction.* Morgan Kaufmann, San Mateo CA, (1989).

[HL] J. HOSCHEK, D. LASSER, *Grundlagen der geometrischen Datenverarbeitung.* Teubner, Stuttgart (1989). `English translation :` *Fundamentals of computer aided geometric design.* A. K. Peters, Wellesley, Mass. (1993).

[K] R. KRESS, *Numerical Analysis.* Graduate Texts in Math. **181**. Springer, Heidelberg (1998).

[M] J. MILNOR, *Topology from the differentiable viewpoint.* The University Press of Virginia, (1965).

[MM] J. MILNOR, *Morse Theory.* Annals of Math. Studies, Princeton University Press, (1963).

[S] M. SPIVAK, *A comprehensive introduction to differential geometry.* 5 volumes. Publish or Perish, Berkeley CA. (1979).

[R] J.-J. RISLER, *Méthodes mathématiques pour la CAO.* Masson, Paris (1991).

Contents

Laboratoire de Mathématique d'Orsay
U.M.R. 8628 du C.N.R.S.
Bâtiment 425
Université de Paris-Sud
91405 Orsay
France
`Pierre.Pansu@math.u-psud.fr`
`http://www.math.u-psud.fr/~pansu`