Partiel de géométrie différentielle, durée 2h

March 4, 2003

On s'intéresse aux courbes NURBS de degré 2 dans le plan dont le polygone de contrôle est

$$P_0 = (1,0), \quad P_1 = (1,1), \quad P_2 = (0,1),$$

et le vecteur de noeuds $(0,0,0,1,1,1)$.

1. De combien de paramètres une telle courbe c dépend-elle ?

2. Donner l'expression en coordonnées cartésiennes (x,y) de la symétrie orthogonale σ par rapport à la première bissectrice.

3.a. Pour quelles valeurs des poids la NURBS est-elle une courbe de Bézier ? Dans cette question et la suivante, on se place dans ce cas. Montrer que la courbe est symétrique par rapport à la première bissectrice. Déterminer la fonction $\phi : [0,1] \to [0,1]$ telle que $\sigma(c(t)) = c(\phi(t))$.

3.b. Tracer le polygone de contrôle pour la dérivée et la courbe dérivée.

4. Pour quelles valeurs des poids la NURBS est-elle un quart de cercle ? Dans ce cas, écrire la paramétrisation $t \mapsto c(t)$ explicitement. Déterminer la fonction $\psi : [0,1] \to [0,1]$ telle que $\sigma(c(t)) = c(\psi(t))$. Pour quelle valeur de t $c(t)$ se trouve-t'il sur la première bissectrice ?

5. On revient au cas général (poids strictement positifs quelconques). Montrer que la courbe c est convexe, qu'elle n'admet pas de point double et coupe la première bissectrice en un point exactement.

6. Calculer $c(t)$ et vérifier que $\sigma(c(t)) = c(\dfrac{(1-t)w_0}{(1-t)w_0 + tw_2})$.

7. Déterminer $\hat{t} = \hat{t}(w_0, w_1, w_2)$ tel que $c(\hat{t})$ soit sur la première bissectrice.

8. Calculer $c(\hat{t})$ en fonction des poids. Montrer que, lorsqu'on fait tendre l'un des poids vers $+\infty$ en fixant les deux autres, $c(\hat{t})$ admet une limite. En déduire que, dans chacun des trois cas, la courbe (en tant que sous-ensemble du plan) converge vers un polygone.

Corrigé du Partiel du 27 février 2003

1. Une fois spécifié le polygone de contrôle et le vecteur de noeuds, il ne reste plus que 3 paramètres, les poids w_0, w_1 et w_2. Comme multiplier les 3 poids simultanément par un même nombre ne change pas la NURBS, il n'y a en réalité que 2 degrés de liberté. Si on ne tient pas compte de la paramétrisation, il n'y a qu'un seul degré de liberté. En effet, un degré de liberté est consommé par des reparamétrisations projectives de l'intervalle $[0, 1]$.

2. $\sigma(x, y) = (y, x)$.

3. La NURBS est une courbe B-spline si et seulement si les poids sont tous égaux. Dans ce cas, vu le choix du vecteur de noeuds, la courbe est en fait une courbe de Bézier.

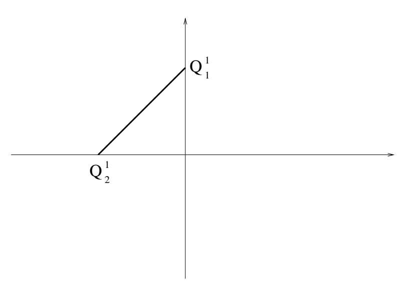
Vecteur de noeud symétrique, polygone de contrôle symétrique, entraîne que la courbe est symétrique. Plus précisément, le cours donne

$$\sigma(c(t)) = c(1 - t).$$

3.b. Les points de contrôle pour la dérivée sont

$$Q^1_1 = 2(P_1 - P_0) = (0, 2), \quad Q^1_2 = 2(P_2 - P_1) = (-2, 0).$$

La courbe dérivée est le segment $Q^1_1 Q^1_2$ parcouru à vitesse constante.



Polygone de contrôle pour la dérivée (question 3.b.)

4. La NURBS est un arc de cercle si $w_1 = w_0$ et $w_2 = 2w_0$. Dans ce cas,

$$c(t) = (\frac{1 - t^2}{1 + t^2}, \frac{2t}{1 + t^2}).$$

On cherche $u = \psi(t)$ tel que

$$\frac{1 - t^2}{1 + t^2} = \frac{2u}{1 + u^2} \quad \frac{2t}{1 + t^2} = \frac{1 - u^2}{1 + u^2}.$$

De la seconde équation, on tire
$$u^2 = (\frac{1-t}{1+t})^2.$$
Comme $u \geq 0$, on trouve
$$u = \psi(t) = \frac{1-t}{1+t}.$$

Si $c(t)$ est sur la première bissectrice, alors $\sigma(c(t)) = c(t)$ donc
$$\frac{1-t}{1+t} = t,$$
ce qui donne
$$t = \frac{1}{1+\sqrt{2}}.$$

5. Comme le polygone de contrôle est convexe, la théorème de diminution de la variation donne que la courbe est convexe, i.e. contenue dans le bord de son enveloppe convexe.

Supposons que c passe 2 fois par un point p. Soit D la droite passant par p, de pente 1. Alors la variation de c par rapport à D vaut au moins 2. La variation du polygone de contrôle par rapport à D vaut au plus 1, donc la variation de c par rapport à D vaut au plus 1, contradiction.

Comme la première bissectrice sépare P_0 de P_1, toute courbe reliant ces points doit la couper. La variation du polygone de contrôle par rapport à la première bissectrice vaut 1, donc la variation de c par rapport à D vaut au plus 1. Par conséquent, il y a exactement un point d'intersection.

6. Comme on connaît les fonctions de Bézier, on peut calculer directement la courbe de Bézier dans $\mathbf{R}^3$ dont c est la projection centrale.
$$\begin{aligned} Y(t) &= (1-t)^2 \begin{pmatrix} w_0 \\ w_0 \\ 0 \end{pmatrix} + 2t(1-t) \begin{pmatrix} w_1 \\ w_1 \\ w_1 \end{pmatrix} + t^2 \begin{pmatrix} w_2 \\ 0 \\ w_2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} w_0(1-t)^2 + 2w_1 t(1-t) + w_2 t^2 \\ w_0(1-t)^2 + 2w_1 t(1-t) \\ 2w_1 t(1-t) + w_2 t^2 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$
d'où
$$c(t) = (\frac{w_0(1-t)^2 + 2w_1 t(1-t)}{w_0(1-t)^2 + 2w_1 t(1-t) + w_2 t^2}, \frac{2w_1 t(1-t) + w_2 t^2}{w_0(1-t)^2 + 2w_1 t(1-t) + w_2 t^2}).$$
Si $u = \frac{(1-t)w_0}{(1-t)w_0 + tw_2}$, alors $1-u = \frac{tw_2}{(1-t)w_0+tw_2}$. Par conséquent, après simplication par $(1-t)w_0 + tw_2$, le dénominateur de $c(u)$ vaut
$$\begin{aligned} d(u) &= w_0(tw_2)^2 + 2w_1(1-t)w_0 tw_2 + w_2((1-t)w_0)^2 \\ &= w_0 w_2(w_0(1-t)^2 + 2w_1 t(1-t) + w_2 t^2) \end{aligned}$$
soit $w_0 w_2$ fois le dénominateur de $c(t)$. Quant aux numérateurs, ils valent respectivement
$$w_0(tw_2)^2 + 2w_1(1-t)w_0 tw_2 = w_0 w_2(w_2 t^2 + 2w_1 t(1-t))$$

et

$$2w_1(1-t)w_0tw_2 + w_2((1-t)w_0)^2 = w_0w_2(2w_1t(1-t) + w_0(1-t)^2),$$

ce qui donne bien

$$\sigma(c(t)) = c(\frac{(1-t)w_0}{(1-t)w_0 + tw_2}).$$

7. Il s'agit de trouver t tel que les coordonnées de $c(t)$ soient égales. Cela donne

$$2w_1t(1-t) + w_0(1-t)^2 = w_2t^2 + 2w_1t(1-t),$$

d'où

$$w_0(1-t)^2 = w_2t^2,$$

i.e.

$$\sqrt{w_0}(1-t) = \sqrt{w_2}t,$$

et enfin

$$\hat{t} = \frac{\sqrt{w_0}}{\sqrt{w_0} + \sqrt{w_2}}.$$

Autre méthode : comme $\sigma(c(\hat{t})) = c(\hat{t})$, nécessairement,

$$\hat{t} = \frac{(1-\hat{t})w_0}{(1-\hat{t})w_0 + \hat{t}w_2},$$

ce qui conduit évidemment au même résultat.

8. On calcule les coordonnées

$$x(\hat{t}) = y(\hat{t}) = \frac{\sqrt{w_0w_2} + 2w_1}{2\sqrt{w_0w_2} + 2w_1}.$$

Si w_0 et w_1 sont fixés et w_2 tend vers $+\infty$, la limite est $1/2$. Si w_2 et w_1 sont fixés et w_0 tend vers $+\infty$, la limite est $1/2$. Dans les deux cas, la courbe, qui est contenue dans le triangle $P_0P_1P_2$, est coincée entre P_0P_2 et une droite parallèle à P_0P_2 qui tend vers P_0P_2, donc elle converge vers le segment P_0P_2.

Si w_0 et w_2 sont fixés et w_1 tend vers $+\infty$, la limite est 1. La courbe c étant convexe, elle ne pénêtre pas dans le triangle $P_0c(\hat{t})P_2$. La courbe est coincée entre le polygone de contrôle P_0P_1, P_1P_2 et le polygone à deux côtés $P_0c(\hat{t})$, $c(\hat{t})P_2$ qui converge vers lui, donc elle converge vers le polygone de contrôle.