Orientations

P. Pansu

27 juillet 2000

1 Motivation

Orienter une surface, c'est se donner un bit d'information supplémentaire : choisir en un point de la surface l'un des deux vecteurs unitaires normaux. Si la surface doit faire partie du bord d'un objet, elle héritera automatiquement d'une telle orientation (convention de la *normale sortante*). C'est pourquoi l'orientation joue un rôle dans la représentation BRep des objets.

Le bord d'une surface à bord orientée, et plus généralement, d'un polygone plan orienté, hérite lui-même d'une orientation. C'est ainsi que les arêtes d'une même face d'un polyèdre viennent avec un ordre circulaire, qui constitue un mode de représentation commode.

On commence par traiter le cas des surfaces lisses, puis celui des polyèdres, i.e. des objets dont le bord est contenu dans une collection finie de plans affines, et enfin on traite les polyèdres curvilignes, i.e. les objets bordés par des surfaces deux à deux transverses.

2 Orientations normale et tangente

2.1 Orientation normale

Il s'agit de formaliser l'idée qu'un objet est d'un seul côté de son bord. Le problème de savoir si une collection de surfaces borde un objet est mieux posé si on prescrit pour chaque surface de quel côté on veut trouver l'objet.

Définition 1 *Orienter normalement une surface X en un point P, c'est choisir l'un des deux vecteurs unitaires orthogonaux au plan tangent $T_P X$. Un choix d'orientation normale en P détermine un choix d'orientation normale au voisinage de P. Une* orientation normale *de X consiste à choisir une orientation normale en chaque point de X, qui soit constante au voisinage de chaque point.*

Exemple. Une équation locale f d'une surface X détermine une orientation normale localement : on choisit pour normale le champ de vecteurs $\nabla f / |\nabla f|$. Noter que $-f$ est aussi une équation locale de X, qui définit l'orientation opposée.

Exemple. Une paramétrisation locale $(u, v) \mapsto X(u, v)$ une orientation normale localement : on choisit pour normale le champ de vecteurs $\frac{\partial X}{\partial u} \wedge \frac{\partial X}{\partial v}$. Noter qu'échanger u et v change l'orientation.

Remarque. De proche en proche, on peut essayer d'orienter X toute entière. Ce n'est pas toujours possible : il existe des surfaces *non orientables*.

Exemple. La sphère unité est orientable, elle possède deux orientations, celle donnée en chaque point P par $\Gamma(P) = P$, et l'orientation opposée donnée en chaque point P par $\Gamma(P) = -P$. La première est celle déterminée par l'équation $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 1$, la seconde est celle déterminée par la paramétrisation locale par la latitude et la longitude.

Exemple. Considérons la surface paramétrée par

$$(u,v) \mapsto \begin{pmatrix} (1+v\cos\frac{u}{2})\cos u \\ (1+v\cos\frac{u}{2})\sin u \\ v\sin\frac{u}{2} \end{pmatrix}$$

où $u \in \mathbf{R}$, $v \in]-1,1[$. C'est une surface *réglée*, i.e. obtenue en déplaçant un segment de droite (paramétré par v). Elle est entièrement décrite lorsque u décrit l'intervalle $[0,2\pi[$. En effet,

$$X(u+2\pi,v) = X(u,-v).$$

Cependant

$$\frac{\partial X}{\partial u} \wedge \frac{\partial X}{\partial v}(u+2\pi,v) = -\frac{\partial X}{\partial u} \wedge \frac{\partial X}{\partial v}(u,v)$$

donc il y a une ambiguïté pour choisir une normale orientée en un point $P = X(u,v) = X(u,-v)$: doit-on choisir $\frac{\partial X}{\partial u} \wedge \frac{\partial X}{\partial v}(u+2\pi,v)$ ou $\frac{\partial X}{\partial u} \wedge \frac{\partial X}{\partial v}(u,v)$? On peut montrer qu'il n'existe pas de choix localement constant de normale orientée. Cette surface (appelée bande de Möbius), n'est pas orientable.

2.2 Orientation tangente

Définition 2 *Orienter une courbe en un point P, c'est choisir entre les deux vecteurs tangents unitaires en P.*

Orienter une surface X en un point P, c'est décider quelles sont les bases orthonormées du plan tangent T_PX qu'on veut appeler directes. Un choix d'orientation en P détermine un choix d'orientation au voisinage de P. Une orientation tangente *de X consiste à choisir une orientation en chaque point de X, qui soit constante au voisinage de chaque point.*

Si on fixe une orientation de l'espace ambiant, une orientation normale détermine une orientation tangente. En effet, si $\Gamma(P)$ est la normale choisie en P,

- dans le plan : la tangente orientée $\tau(P)$ est telle que la base $(\Gamma(P),\tau(P))$ soit directe ;
- dans l'espace, une base (e_1,e_2) de T_PX est directe si $\Gamma(P) = e_1 \wedge e_2$.

Exemple. Si le cercle unité dans le plan est orienté normalement par $\Gamma(p) = p$, alors $\tau(p)$ s'obtient en tournant p de $\pi/2$, ce qui correspond au sens trigonométrique.

Exemple. Si la sphère unité de $\mathbf{R}^3$ est orientée normalement en $p = (1,0,0)$ par $\Gamma(p) = p$, alors la base $((0,1,0),(0,0,1))$ du plan tangent en p est directe.

3 Orientations induites

3.1 Dans le plan et l'espace

Soit D un fermé de $\mathbf{R}^n$ dont le bord est une surface X. On suppose que D est l'adhérence de son intérieur. Alors D est localement d'un seul côté de X et X hérite d'une orientation normale par la *normale sortante*.

Exemple. Le disque unité $D = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2\,;\, x^2+y^2 \leq 1\}$ a pour bord le cercle unité orienté normalement par $\Gamma((x,y)) = (x,y)$. L'orientation tangente induite sur le cercle est le sens trigonométrique.

Exemple. Le bord du carré unité $K = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2\,;0 \leq x \leq 1,\, O \leq y \leq 1\}$ est constitué de 4 segments joignant les 4 sommets $O = (0,0)$, $P = (1,0)$, $Q = (1,1)$ et $R = (0,1)$. La normale sortante le long du segment OP est $(0,-1)$. Le vecteur unitaire orientant ce segment est donc $P-O$.

Exemple. La boule unité $B = \{P \in \mathbf{R}^3\,;\, x^2+y^2+z^2 \leq 1\}$ a pour bord la sphère unité orientée normalement par $\Gamma(P) = P$.

3.2 Surfaces à bord

Définition 3 *Une* surface à bord `(surface with boundary)` *est une partie de* $\mathbf{R}^3$ *qui peut localement être redressée sur un plan ou un demi-plan. Le bord* `(boundary)` *est formé des points qui lors du redressement sont envoyés sur le bord d'un demi-plan. Le plan tangent* $T_P X$ *est défini en tout point (même aux points du bord).*

Par définition, une surface à bord X peut-être localement prolongée au-delà de son bord, i.e. au voisinage d'un point P du bord, il existe une surface Y et une fonction f définie au voisinage de P telles que la différentielle $d_P f$ ne soit pas identiquement nulle sur l'espace tangent $T_P Y$, et $X = \{Q \in Y\,;\, f(Q) \leq 0\}$ au voisinage de P.

Exemple. L'hémisphère nord $H = \{P \in \mathbf{R}^3\,;\, x^2 + y^2 + z^2 \leq 1,\, z \geq 0\}$ est une surface à bord. Vérifions le au voisinage du point $(1,0,0)$. Le difféomorphisme

$$(x,y,z) \mapsto (x - \sqrt{1-y^2-z^2}, y, z)$$

redresse l'hémisphère nord sur le demi-plan $\{x = 0,\, z \geq 0\}$.

Exercice 4 *Soit* F *un fermé propre de* $\mathbf{R}^3$*. On suppose qu'au voisinage du point* P *de* F*, le bord de* F *est contenu dans la réunion de deux surfaces transverses* X_1 *et* X_2*. Montrer que 2 cas se présentent. Au voisinage de* P*,*

- *ou bien* ∂F *est l'une des surfaces* X_1 *ou* X_2 *;*
- *ou bien* $\partial F = X_1 \cup X_2$ *;*
- *ou bien* $F \cap X_1$ *et* $F \cap X_2$ *sont des surfaces à bord.*

3.3 Orientation induite sur le bord d'une surface

Soit X une surface à bord dans $\mathbf{R}^3$, munie d'une orientation tangente.

Le bord hérite d'une orientation normale par la normale sortante : en chaque point P du bord ∂X, c'est le vecteur unitaire $\delta(P)$ tangent à X en P, orthogonal à $T_P \partial X$, qui pointe vers l'extérieur de X.

On en déduit une orientation de la tangente à ∂X : c'est le vecteur unitaire $\tau(P)$ tangent à ∂X tel que la base $(\Delta(P), \tau(P))$ de $T_P X$ soit directe.

Si l'orientation tangente de X provient d'une orientation normale $p \mapsto \Gamma(P)$, alors en tout point P de ∂X,

$$\Delta(P) \wedge \tau(P) = \Gamma(P).$$

Exemple. Soit X le demi-plan $X = \{P \in \mathbf{R}^3\,;\, z = 0,\, x \leq 0\}$ orienté normalement par $\Gamma(P) = (0,0,1)$. Le long du bord, la normale sortante est $H(P) = (1,0,0)$. Le vecteur unitaire tangent orienté au bord est $\tau(P) = (0,1,0)$.

Exercice 5 *On munit l'hémisphère nord* $H = \{P \in \mathbf{R}^3\,;\, x^2+y^2+z^2 \leq 1,\, z \geq 0\}$ *de l'orientation normale sortante de la boule unité. Quelle est l'orientation tangente induite sur le bord ? Ecrire une paramétrisation du bord compatible avec cette orientation.*

Exercice 6 *Soit* F *un fermé propre de* $\mathbf{R}^3$*. On suppose qu'au voisinage du point* P *de* F*, le bord de* F *est contenu dans la réunion de deux surfaces transverses* X_1 *et* X_2*. On suppose que* $F \cap X_1$ *et* $F \cap X_2$ *sont des surfaces à bord au voisinage de* P *(voir exercice 4). On oriente* X_1 *et* X_2 *par la normale sortante. Montrer que les orientations induites par les surfaces à bord* $F \cap X_1$ *et* $F \cap X_2$ *sur leur bord* $X_1 \cap X_2$ *sont opposées.*

4 Cycles

Les notions d'orientation normale et tangente, d'orientation induite sur le bord, se généralisent aux surfaces et courbes lisses par morceaux, i.e. aux *polyèdres curvilignes.* Une orientation d'un polyèdre curviligne de dimension 2 consiste à se donner une orientation de chaque facette.

Les notions de facettes, d'arêtes et de sommets ne seront définies rigoureusement qu'en section 9. Néanmoins, elles sont suffisamment intuitives pour qu'on puisse définir sans précaution exagérée les *coarêtes* et les *cycles.*

On considère des polygones curvilignes tracés sur une surface X. Si σ est une arête, une orientation de σ revient à choisir un ordre entre les extrémités de σ. Pour une arête orientée $\sigma = [p, q]$, on appelle x *l'extrémité initiale* de σ et y *l'extrémité finale* de σ.

Soit P un polygone curviligne tracée sur une surface orientée X. On munit le bord de P de l'orientation tangente donnée par la convention 2. Alors chaque arête orientée $\sigma = [p, q]$ de P possède un unique *successeur* $[q, r]$, défini comme suit. L'intersection de Q avec une courbe fermée simple entourant q assez petite est une réunion d'intervalles orientés M du cercle. L'un de ces intervalles a σ pour extrémité initiale. Son extrémité finale correspond à une arête $[q, r]$ de P.

On a donc construit une permutation de l'ensemble des arêtes qui constituent P.

Définition 7 *Chaque orbite de cette permutation s'appelle un* cycle d'arêtes `(loop)`.

Attention, les cycles ne sont pas les composantes connexes de P.

En dimension 3, le bord d'un polyèdre curviligne est normalement orienté. Chaque facette hérite donc d'une orientation tangente. La décomposition en cycles du bord de chaque facette est donc bien définie. C'est par un ou plusieurs cycles d'arêtes que les facettes d'un objet 3D sont décrites dans ACIS ou CATIA.

Une arête appartient toujours à plusieurs facettes, et possède un successeur (différent) dans chaque facette. C'est pourquoi ACIS possède la structure de donnée dite

Définition 8 *Dans un polyèdre curviligne, une* coarête `(coedge)` *est la donnée d'une arête orientée (symbolisée par ses deux étrémités dans l'ordre) et d'une facette orientée qui la contient dans son bord.*

Le successeur d'une coarête est uniquement défini. Les coarêtes forment donc des cycles. Chacun de ces cycles décrit une partie du bord d'une facette.

Exercice 9 *Soit K le cube unité de $\mathbf{R}^3$, K' son translaté de vecteur $(1, 1, 1/2)$ et P le polyèdre $K \cup K'$. On oriente les facettes de P par la normale sortante. Déterminer les coarêtes $((A, B), F)$ telles que $A = (1, 1, 1/2)$ et $B = (1, 1, 1)$.*

5 Polyèdres, points de vue CSG et BRep

L'objet de cette section et des suivantes est de donner les définitions et énoncés précis qui manquent dans la section précédente.

5.1 Point de vue CSG

Définition 10 *Un* polyèdre convexe `(convex polyhedron)` *de* $\mathbf{R}^n$ *est l'intersection d'un nombre fini de demi-espaces fermés. Autrement dit, un polyèdre convexe est défini par une nombre fini d'inégalités linéaires larges.*

Exemple. L'orthant `(orthant)` $\{X_i \geq 0\}$ s'appelle quadrant en dimension 2.

Exemple. Le cube `(cube)` $\{0 \leq X_i \leq 1\}$ s'appelle carré en dimension 2.

Exemple. Le simplexe standard `(standard simplex)` $\{X_i \geq 0, \ \sum X_i = 1\}$.

Exemple. Etant donné $n+1$ points de $\mathbf{R}^n$ non contenus dans un hyperplan, leur enveloppe convexe est un *simplexe* (`simplex`), i.e. l'image du simplexe standard par une bijection affine.

Remarque. Un polyèdre convexe a une dimension, celle du sous-espace affine qu'il engendre. P est de dimension n si et seulement si sont intérieur int(P) est non vide.

Définition 11 *Un* polyèdre (`polyhedron`) *de* $\mathbf{R}^n$ *est la réunion d'un nombre fini de polyèdres convexes. Autrement dit, un polyèdre est défini par une nombre fini de quatificateurs et d'inégalités linéaires larges. Un polyèdre est dit* propre *s'il est égal à l'adhérence de son intérieur :* $P = \mathrm{clos}(\mathrm{int(P)})$.

Proposition 12 *La classe des polyèdres est stable par réunion, intersection, produit, projection, cylindre, cône. Elle est invariante par tranformation affine.*

Preuve. Immédiat. ∎

Remarque. La réunion de deux polyèdres propres est propre. Ce n'est pas le cas de l'intersection en général.

5.2 Point de vue BRep

Définition 13 *Si* X *est une partie de* $\mathbf{R}^n$*, on note* $\partial X = \mathrm{clos}(X) \setminus \mathrm{int(X)}$ *son bord et* X^* *l'adhérence du complémentaire de* X.

Lemme 14 *Soit* X *une partie fermée de* $\mathbf{R}^n$ *dont le bord est contenu dans la réunion d'un nombre fini d'hyperplans. Alors* X^* *et* $(X^*)^* = \mathrm{clos}(\mathrm{int(X)})$ *sont des polyèdres propres.*

Preuve. Soit X un fermé dont le bord est contenu dans un nombre fini d'hyperplans H_j. Soit U une composante connexe du complémentaire de la réunion des H_j. Alors $X \cap U$ est fermé dans U. Mais comme ∂X est disjoint de U, $X \cap U$ est ouvert dans U. Par connexité, ou bien U est disjoint de X, ou bien U est contenu dans X. Remarquer que l'adhérence de U est un polyèdre convexe. Notons P la réunion des adhérences des composantes U qui sont contenues dans X. Alors $P \subset X$ et P est un polyèdre. Montrons que P contient l'intérieur de X. Si x est un point intérieur de X, il existe un segment $[x, y]$ contenu dans X et dont l'intersection avec la réunion des hyperplans H_j est réduite à x. La composante U de y est contenue dans X, donc $x \in [x, y] \subset \mathrm{clos}(U) \subset P$, et on conclut que $\mathrm{int(X)} \subset P$. On a donc montré que $P = \mathrm{clos}(\mathrm{int(X)})$ est un polyèdre.

Comme $\partial X^* \subset \partial X$, ∂X^* est lui aussi contenu dans une réunion finie d'hyperplans, donc $X^* = \mathrm{clos}(\mathrm{int(X^*)})$ est un polyèdre. ∎

Théorème 1 *Soit* X *un fermé de* $\mathbf{R}^n$*. Alors* X *est un polyèdre si et seulement si son bord* $\partial X = X \setminus \mathrm{int(X)}$ *est un polyèdre.*

Preuve. Soit P un polyèdre. Alors $P = \bigcup P_j$ où P_j est un polyèdre convexe, $P_j = \bigcap E_{j,k}$ où $E_{j,k}$ est un demi-espace fermé. Alors $\partial P_j \subset \bigcup_k \partial E_{j,k}$ donc $\partial P \subset \bigcup_{j,k} \partial E_{j,k}$ est contenu dans la réunion d'un nombre fini d'hyperplans. D'après le lemme 14, P^* est un polyèdre donc $\partial P = P \cap P^*$ est un polyèdre.

Inversement, soit X un fermé tel que ∂X est un polyèdre. Etant d'intérieur vide, ∂X est une réunion de polyèdres convexes contenus dans des sous-espaces affines de dimension $\leq n-1$, donc a fortiori dans des hyperplans, et le lemme 14 donne que $\mathrm{clos}(\mathrm{int(X)})$ est un polyèdre. On conclut que $X = \mathrm{clos}(\mathrm{int(X)}) \cup \partial X$ est un polyèdre. ∎

Remarque. Si on se donne le bord, la méthode de construction de P suggérée dans cette preuve passe par la détermination de toutes les composantes connexes du complémentaire d'une famille d'hyperplans. Or il s'agit là d'un calcul lourd.

6 Opérations booléennes nettoyées

Définition 15 *Soit F un fermé. L'opération $F \mapsto (F^*)^*$ s'appelle le* nettoyage. *Les opérations booléennes nettoyées agissent sur les fermés propres. Elles sont engendrées par le complémentaire nettoyé $F \mapsto F^*$, la réunion et l'intersection nettoyée F, $G \mapsto (F \cap G)^*$.*

Exercice 16 *Montrer que si F et G sont des fermés propres, $(F^* \cap G^*)^* = F \cup G$.*

Il résulte du lemme 14 que les opérations booléennes nettoyées agissent sur les polyèdres propres.

7 Faces

7.1 Cas des polyèdres convexes

Soit P est un polyèdre convexe de $\mathbf{R}^3$, défini par des inéquations $\{y \cdot v_j \leq t_j\}$. L'intérieur de P est constitué des points satisfaisant aux inégalités strictes. Puis viennent les points où une seule des égalités est réalisée (ou bien plusieurs égalités proportionnelles). Pour ces points, il reste deux degrés de liberté, ils forment l'intérieur (relatif) des facettes de dimension 2 de P. Les points où deux égalités indépendantes sont réalisées forment les arêtes, etc...

Formellement, si P est défini par des inéquations $\{y \cdot v_j \leq t_j\}$, un point x de P se trouve dans une face dont la dimension est $n - \ell$ où ℓ est la dimension du sous-espace vectoriel engendré par celles des inéquations qui sont actives en x, i.e. par les v_j tels que $x \cdot v_j = t_j$.

7.2 Espace tangent

La définition suivante formalise l'idée de degrés de liberté pour un polyèdre quelconque.

Définition 17 *Soit P un polyèdre de $\mathbf{R}^n$. Soit x un point de P. L'*espace tangent *à P en x, noté T_xP est le plus grand sous-espace vectoriel T ayant la propriété suivante : il existe $r > 0$ tel que pour tout vecteur $v \in T$ de norme $< r$, la translation de vecteur v envoie $B(x,r) \cap P$ dans $B(x, 2r) \cap P$.*

Remarque. Cette notion est invariante par transformations affines. L'espace tangent à un produit est le produit des espaces tangents.

Exercice 18 *Soit Q le polyèdre de $\mathbf{R}^3$ défini par les inéquations $\{x_i \geq 0, \sum x_i \leq 1\}$. Soit Q' le polyèdre obtenu en translatant S du vecteur $(1/3, 1/3, 1/3)$. On pose $P = Q \cup Q'$. Déterminer pour chaque point de P son espace tangent.*

Exercice 19 *Soit C un cône polyédral de sommet 0. Vérifier qu'il existe un cône polyédral $C' \subset (T_0C)^\perp$ tel que C soit le produit de C' et de l'espace affine T_0C.*

7.3 Faces

Définition 20 *Soit P un polyèdre de $\mathbf{R}^n$. Une* face de dimension *k de P est l'adhérence d'une composante connexe de l'ensemble des points où l'espace tangent est de dimension k.*

Une face de dimension 0 s'appelle un sommet (`vertex`), *une face de dimension 1 une* arête (`edge`), *une face de dimension $n-1$ une* facette (`facet`).

Cette définition n'est pas constructive. En revanche, elle a le mérite de ne dépendre que de l'ensemble P et non du procédé qui a permis de construire P.

Proposition 21 *Soit P un polyèdre de $\mathbf{R}^n$. Toute face de dimension k de P est un polyèdre propre et connexe d'un sous-espace affine de dimension k. Le nombre total de faces est fini.*

Preuve.
Soit $P = \bigcup_j P_j$ où les P_j sont des polyèdres convexes. Soit $P_j = \bigcap_k E_{j,k}$ où les $E_{j,k}$ sont des demi-espaces fermés. A chaque $E_{j,k}$ est associée une partition en trois sous-ensembles : l'intérieur de $E_{j,k}$, le complémentaire de $E_{j,k}$ et le bord de $E_{j,k}$. Considérons la partition de $\mathbf{R}^n$ engendrée par toutes ces partitions, i.e. chaque pièce, baptisée *face virtuelle ouverte* est une intersection d'hyperplans et de demi-espaces ouverts. Chaque face virtuelle ouverte (il y en a un nombre fini) est l'intérieur d'un polyèdre convexe d'un sous-espace affine, donc possède une dimension.

Montrons que si $x \in P$ appartient à une face virtuelle ouverte V de dimension k, alors $T_x V \subset T_x P$. Comme la partition est finie, la réunion des faces virtuelles ouvertes dont l'adhérence contient x est un voisinage de x. Soit V' l'une de ces faces virtuelles ouvertes. Montrons par l'absurde que $V \subset \mathrm{clos}(V')$. Sinon, il existe un hyperplan $\partial E_{j,k}$ séparant un point y de V' d'un point z de V. Par exemple, $\mathrm{int(E_{j,k})}$ contient y et $E^c_{j,k}$ contient z. Alors $E_{j,k}$ contient V' donc contient x donc contient V, contradiction. On conclut que $V \subset \mathrm{clos}(V')$. En particulier, la translation par un vecteur tangent à V assez petit envoie un voisinage de x dans $\mathrm{clos}(V)$ dans $\mathrm{clos}(V)$. Comme P est une réunion de faces comme V', ceci montre que $T_x V \subset T_x P$.

Soit P^k le lieu des points de P où la dimension de l'espace tangent vaut k. L'application $x \mapsto T_x P$ est localement constante sur P^k. Fixons une composante U de P^k et notons A l'espace affine $x + T_x P$, indépendant du choix de x dans U. Alors A contient U et U est un ouvert de A.

Si y est dans l'adhérence de U mais n'est pas dans U, alors $dim T_y P < k$. Par conséquent y est contenu dans une face virtuelle ouverte de dimension $< k$. Ceci montre que $\mathrm{clos}(U) \setminus U$ est contenu dans une réunion finie d'hyperplans de A, donc d'après le lemme 14, U est un polyèdre. ∎

Proposition 22 *Chaque face de dimension k est une réunion d'adhérences de faces virtuelles ouvertes de dimension k.*

Preuve.
Cas où $k = n$. Les faces virtuelles ouvertes de dimension n sont simplement les composantes du complémentaire des hyperplans $\partial E_{j,k}$. On a vu dans la preuve de la proposition 1 que la réunion des adhérences de celles de ces faces virtuelles qui rencontrent P est clos(int(P)). Or int(P) est le lieu des points où $dim(T_x P) = n$.

Cas général. Soit F une face de dimension k de P. Par définition, $F = \mathrm{clos}(U)$ où en chaque point x de U, $dim(T_x P) = k$. De plus, U est contenu dans un k-plan affine A. De plus, U est ouvert dans A. En remplaant P par $A \cap P$, on est ramené au cas précédent. ∎

Remarque. Les faces n'ont aucune raison d'être convexes.

Exemple. Dans le plan, soit Q le carré unité et P la réunion de Q et de ses translatés par $(1,0)$ et $(0,1)$. Il y a trois facettes virtuelles ouvertes de dimension 2 (trois carrés) mais une seule face de dimension 2, c'est P tout entier.

8 Orientation d'un polyèdre

Définition 23 *Une orientation normale d'une hyperplan H de $\mathbf{R}^n$ (resp. d'une hypersphère S de S^n) consiste à choisir l'un des deux vecteurs unitaires orthogonaux à H (resp. à l'hyperplan* cône $(0,S)$ *de $\mathbf{R}^{n+1}$).*

Soit P un polyèdre de $\mathbf{R}^n$. Une orientation normale de P consiste à se donner une orientation normale de chaque face de dimension $n-1$ de P.

8.1 Orientation induite sur le bord

Lemme 24 *Soit P un polyèdre de $\mathbf{R}^n$. Si $x \in P$ et $dim T_x P = n-1$, alors au voisinage de x, P coïncide avec un hyperplan ou un demi-espace.*

Preuve. En effet, au voisinage de x, P coïncide avec un cône produit de T_xP et d'un cône C' contenu dans une droite. Mais les seuls cônes contenus dans une droite sont les points, les demi-droites et la droite entière. ∎

Proposition 25 *Soit P un polyèdre propre de $\mathbf{R}^n$ ou de S^n. Le bord ∂P possède une orientation naturelle, donnée par le choix de la normale sortante.*

Preuve. Soit x un point de ∂P où l'espace tangent à ∂P est de dimension $n-1$. Comme P est propre, il existe des points intérieurs à P au voisinage de x. Par conséquent, au voisinage de x, P coïncide avec un demi-espace, donc la normale sortante est bien définie. Elle est localement constante le long du lieu des points où l'espace tangent à ∂P est de dimension $n-1$, donc on attache sans ambiguïté un vecteur normal à chaque face. ∎

Terminologie. On dira qu'un polyèdre normalement orienté P *borde* s'il existe un polyèdre Q tel que $\partial Q = P$ et l'orientation naturelle de ∂Q coïncide avec celle donnée sur P.

9 Polyèdres curvilignes

Intuitivement, un polyèdre curviligne propre est un fermé propre dont le bord est formé de morceaux de surfaces. On veut que ces surfaces partagent une propriété des plans : deux plans sont transverses ou confondus. Cela conduit à la notion de famille admissible. On appellera *domaine lisse* un fermé dont le bord est une surface lisse.

Définition 26 *Soit $\mathcal{F}$ une famille* finie *de courbes et de surfaces dans $\mathbf{R}^3$. On dit que $\mathcal{F}$ est* admissible *si les propriétés suivantes sont satisfaites.*

- *Stabilité par intersection : si $Y \in \mathcal{F}$ et $Y' \in \mathcal{F}$, alors $Y \cap Y' \in \mathcal{F}$.*
- *Transversalité : si $Y \in \mathcal{F}$ et $Y' \in \mathcal{F}$, alors ou bien $Y \subset Y'$, ou bien $Y' \subset Y$, ou bien Y et Y' sont transverses.*

Soit $\mathcal{G}$ une famille finie *de domaines lisses de $\mathbf{R}^3$. On dit que $\mathcal{G}$ est* admissible *si la famille formée des bords et de leurs intersections est admissible.*

9.1 Point de vue CSG

Définition 27 *Un* polyèdre curviligne *est un fermé de $\mathbf{R}^3$ obtenu par réunion et intersection d'une famille admissible de domaines lisses.*

Exemple. Soit f une fonction lisse sur $\mathbf{R}^2$ et $F = \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3;\, x^2+y^2 \leq 1,\, z \leq f(x,y,z)\}$. Alors F est un polyèdre curviligne. En effet, c'est l'intersection d'un cylindre plein K d'axe vertical et du domaine lisse D situé au-dessous du graphe de f. En chaque point du bord du cylindre, le plan tangent contient le vecteur $(1,0,0)$. En chaque point du graphe de f, le plan tangent, graphe de la différentielle de f, ne contient pas ce vecteur. Les plans tangents étant partout distincts, l'intersection est transverse, la famille $\mathcal{G} = \{K, D\}$ est admissible, donc $F = K \cap D$ est un polyèdre curviligne.

Exemple. Soit $F = \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3;\, x^2+y^2 \leq 1,\, z \geq 0,\, x^2+y^2+(1-z)^2 \geq 1\}$. Alors F n'est pas un polyèdre curviligne au sens de la définition ci-dessus. En effet, son bord contient un disque plan et une hémisphère qui sont tangents.

9.2 Point de vue BRep

Théorème 2 *Un* polyèdre curviligne, *c'est la donnée d'une famille admissible $\mathcal{F}$ de courbes et de surfaces de $\mathbf{R}^3$ et d'un fermé propre F de $\mathbf{R}^3$ dont le bord est contenu dans la réunion des éléments de $\mathcal{F}$.*

Preuve. Identique à celle du théorème 1. ∎

9.3 Cône tangent

Théorème 3 *Soit F un polyèdre curviligne de $\mathbf{R}^3$ et P un point de F. Il existe un cône polyédral C de sommet P et un homéomorphisme local ϕ tangent à l'identité en P tel que, au voisinage de P, $F = \phi(C)$.*

Preuve. Elle dépasse le cadre de ces notes. ∎

Terminologie. On appelle $C = C_P F$ le *cône tangent* à F en P.

Exemple. Le cône tangent à une sous-variété à bord de $\mathbf{R}^3$ en un point P de son bord est le demi-espace délimité par l'espace tangent en P au bord, et opposé à la normale sortante.

Remarque. Le cône tangent peut être obtenu comme limite des dilatés de F en P. Par conséquent, l'opération de prise du cône tangent commute avec les opérations booléennes. Cela couvre un grand nombre d'exemples.

Exemple. Soit $F = A \cup B$ où B est le demi-espace $\{z \leq 0\}$ et A l'intersection de la boule unité avec le demi-espace $\{y \geq 0\}$. Au point $P = (1, 0, 0)$, son cône tangent est la réunion $C \cup B$ où B est le quadrant $\{x \leq 1; y \geq 0\}$.

La signification du théorème 3 est que localement, rien ne distingue un polyèdre curviligne d'un polyèdre rectiligne. Par conséquent, de nombreuses définitions et résultats relatifs aux polyèdres rectilignes s'étendent presque sans changement aux polyèdres curvilignes.

Définition 28 *Soit F un polyèdre curviligne et P un point de F. L'*espace tangent *à F en P est par définition l'espace tangent au cône tangent $C_P F$ en P. Les faces, l'orientation sont alors définies comme pour les polyèdres rectilignes.*

Exemple. Même polyèdre (réunion d'un demi-espace et d'une demie boule). L'espace tangent au point $(1, 0, 0)$ est réduit à $\{0\}$. Voici la liste des faces.

2 sommets : $(1, 0, 0)$, $(-1, 0, 0)$.

3 arêtes : le segment, un demi-cercle horizontal et un demi-cercle vertcial reliant les 2 sommets.

3 facettes : le plan $\{z = 0\}$ privé d'un demi-disque, un demi-disque vertical, un quart de la sphère unité, chacun bordé par 2 arêtes.

Le quart de sphère est orienté par la normale sortant de la boule. L'orientation induite sur son bord (2 demi-cercles) consiste à suivre le demi-cercle horizontal de $(1, 0, 0)$ à $(-1, 0, 0)$ et le demi-cercle vertical de $(-1, 0, 0)$ à $(1, 0, 0)$.

Exercice 29 *Soit F l'intersection de la boule unité et du cylindre droit d'axe $\{x = 0, y = 1\}$et de rayon 1. Quel est son cône tangent au point $P = (0, 0, 1)$? Quel est son espace tangent en ce point ? Faire la liste des faces de F.*