Interrogation écrite

1

On photographie (caméra à distance finie, direction de visée horizontale) un paysage comportant les ruines d'un temple grec. La scène est jonchée de tronçons de colonnes, certaines debout, d'autres couchées. Chaque colonne est, en première approximation, un cylindre à base circulaire coupé par des plans orthogonaux à son axe.

a. Vue en perspective, une section de colonne verticale est représentée par une ellipse. Il y a t'il des cas où on peut aisément déterminer la direction de son grand axe ? L'excentricité de cette ellipse dépend-elle de la hauteur de la colonne ?

b. On considère une rangée de colonnes de même hauteur, alignées le long de la droite de visée. Les sections des colonnes, vues en perspective, sont-elles homothétiques ?

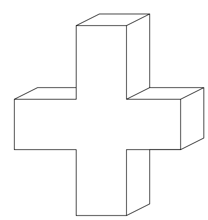
c. Qu'en est-il si les colonnes sont alignées le long d'une droite parallèle à mais distincte de la droite de visée ? Les ellipses sont elles asymptotiquement homothétiques ?

d. Est-il possible qu'une colonne couchée soit représentée par un cercle ?

e. La photo est prise de nuit, au flash (le flash est situé sur l'appareil photo). Le marbre des colonnes est non réfléchissant. Quelle partie du fût d'une colonne est-elle la plus lumineuse ?

2

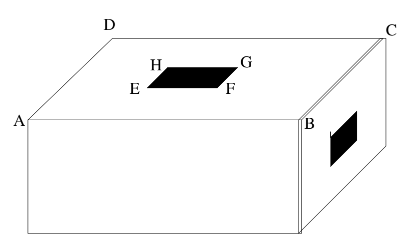
Dans un cube, on perce deux poches débouchantes de section carrée, de sorte que la matière retirée forme un objet en forme de croix (voir figure ci-contre).



a. Dessiner le cube percé.

b. Combien a t'il de sommets ? d'arêtes ? de faces ? Que vaut la caractéristique d'Euler-Poincaré de son bord ?

c. On pose le cube percé sur une table. On nomme A à H les sommets de la face supérieure $\mathcal{F}$, comme dans la figure ci-contre. Quel est l'ordre cyclique sur les arêtes de la boucle intérieure de $\mathcal{F}$?



Corrigé de l'interrogation écrite

1

a. Lorsque l'axe d'une colonne verticale coupe la droite de visée, l'ensemble de la figure (colonne, axe de visée, écran) est symétrique par rapport à un plan vertical, donc la vue de la section est symétrique par rapport à une droite verticale. L'ellipse étant aplatie dans la direction $O'y'$, le grand axe est $O'x'$. L'ellipse est réduite à un segment si le plan de la section passe par la caméra. Par conséquent, l'excentricité de cette ellipse dépend de la hauteur de la colonne.

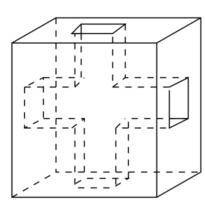
b. Non. Chaque section de colonne est inscrite dans un carré dont deux cotés sont parallèles à la direction de visée. Sa vue en perspective, est inscrite dans un trapèze, projection du carré. Si les différentes ellipses étaient homothétiques, les diagonales de ces trapèzes formeraient deux familles de droites parallèles. Or ces diagonales sont des projections de diagonales de carrés qui sont parallèles dans un plan horizontal. Les projections sont donc concourantes (elles ont le même point de fuite). Par conséquent, les projections de sections de colonnes alignées ne sont pas homothétiques. Elles le sont toutefois asymptotiquement.

c. Si les colonnes sont alignées le long d'une droite parallèle à mais distincte de la droite de visée, les projections des sections ne sont pas plus homothétiques, mais elles restent asymptotiquement homothétiques : l'excentricité converge.

d. Une colonne dont l'axe est la droite de visée se projette sur un cercle. On pourrait penser que d'autres colonnes partagent cette propriété, car se déplacer vers le haut aplatit l'ellipse dans la direction $O'y'$, alors que faire tourner l'axe autour d'un axe vertical aplatit l'ellipse dans l'autre sens. Le calcul montre qu'il n'en est rien.

e. D'après la loi de Lambert, l'éclairement émis par une surface diffusante est proportionnel à $\vec{L} \cdot \vec{N}$ où $\vec{L}$ est la direction de la source lumineuse et $\vec{N}$ la normale. L'éclairement est donc maximal lorsque $\vec{N}$ est colinéaire à $\vec{L}$, i.e. lorsque la surface est perpendiculaire au segment la reliant à la caméra. C'est donc le long de la droite qui, en perspective, se superpose à l'axe de la colonne, que le fût est le plus lumineux.

2



a. Voir figure.

b. On trouve $S = 32$, $A = 48$, $F = 16$. 12 faces sont des polygones, de caractéristique 1, et les 4 autres sont bordées par deux boucles, donc leur caractéristique vaut 0. On conclut que la caractéristique d'Euler-Poincaré du bord vaut -4.

c. L'ordre cyclique sur les arêtes de la boucle intérieure de $\mathcal{F}$ est $HGFE$.