Université Paris-Sud
DESS d'Ingéniérie Mathématique 2002/2003

Interrogation écrite
14 mars 2003, durée 1 heure
Les documents et calculettes sont autorisés

Soient $a > b > 0$ *des paramètres réels. On étudie l'ellipse* X *d'équation* $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$. *On note* $P_0 = (a, 0)$. *On oriente* X *par la normale sortante.*

1. Dans cette question seulement, on prend $a = 2$ et $b = 3/2$. Tracer sommairement X en indiquant le sens de parcours.

2. Paramétrer X par des fonctions trigonométriques, de façon compatible avec l'orientation choisie, et en déduire une expression de la courbure en tout point de X. Que vaut la courbure en P_0 ? Quel est son signe ? Pouvait-on le prévoir ?

3. Trouver une application affine $T : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ qui envoie le cercle unité sur X. En déduire une paramétrisation de X comme NURBS. Donner le degré, le vecteur de noeuds, le polygone de contrôle et les poids. En déduire la valeur de la courbure de X en P_0.

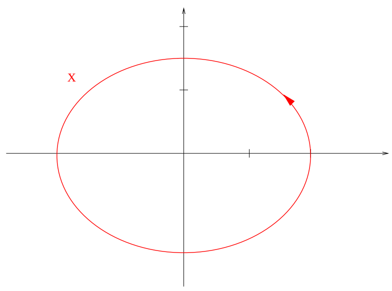
4. Quelle est l'aire de la face plane de bord X ?

5. En utilisant la formule qui donne la courbure d'une courbe plane donnée par une équation, calculer la courbure de X en chaque point, puis au point P_0.

Université Paris-Sud
DESS d'Ingéniérie Mathématique 2002/2003

Corrigé de l'interrogation écrite
14 mars 2003, durée 1 heure

1. Voir figure 1.



L'ellipse X pour $a = 2$ et $b = 3/2$

2. La paramétrisation $t \mapsto c(t) = (a\cos t, b\sin t)$ est compatible avec l'orientation par la normale sortante. On calcule

$$c'(t) = (-a\sin t, b\cos t), \quad c''(t) = (-a\cos t, -b\sin t),$$

d'où

$$\begin{aligned}\kappa &= \frac{det(c', c'')}{|c'|^3} \\ &= \frac{ab}{(a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t)^{3/2}} \\ &= \frac{1}{a^2b^2(\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4})^{3/2}}.\end{aligned}$$

En particulier, la courbure au point P_0 vaut a/b^2. Elle est positive, ce qui est cohérent avec le fait que l'ellipse tourne vers la gauche. C'est aussi cohérent avec le fait que X est le bord d'un convexe orienté par la normale sortante.

3. La bijection linéaire T définie par $T(x, y) = (ax, by)$ envoie le cercle unité sur X. Le cercle est la NURBS de degré 2, de vecteur de noeuds $(0, 0, 0, 1, 1, 1)$, de polygone de contrôle $P'_0 = (1, 0)$, $P'_1 = (1, 1)$, $P'_2 = (0, 1)$, de poids $w_0 = 1$, $w_1 = 1$ et $w_2 = 2$, i.e.

$$X_2(t) = \frac{\sum B_{i,2}(t) w_i P'_i}{\sum B_{i,2}(t) w_i}.$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned}T(X_2(t)) &= T(\frac{\sum B_{i,2}(t) w_i P'_i}{\sum B_{i,2}(t) w_i}) \\ &= \frac{\sum B_{i,2}(t) w_i T(P'_i)}{\sum B_{i,2}(t) w_i}\end{aligned}$$

donc l'ellipse est la NURBS de degré 2, de vecteur de noeuds $(0, 0, 0, 1, 1, 1)$, de polygone de contrôle $P_0 = T(P'_0) = (a, 0)$, $P_1 = T(P'_1) = (a, b)$, $P_2 = T(P'_2) = (0, b)$, de poids $w_0 = 1$, $w_1 = 1$ et $w_2 = 2$.

La courbure en P_0 est donnée par

$$\begin{aligned}
\kappa(P_0) &= \frac{1}{2}\frac{1}{1}\frac{1\times 2}{1}\frac{det(P_0P_1,P_1P_2)}{|P_0P_1|^3}\\
&= \frac{ab}{b^3}=\frac{a}{b^2}.
\end{aligned}$$

On retrouve fort heureusement la même valeur qu'en 2.

4. On applique la formule de changement de variable dans les intégrales doubles au difféomorphisme $T : D \to E$ qui envoie le disque unité D sur l'intérieur E de l'ellipse. Il vient

$$\begin{aligned}
Aire(E) &= \iint_D det(T)\,dx\,dy\\
&= \pi det(T) = \pi ab.
\end{aligned}$$

5. Pour une courbe définie comme $F^{-1}(0)$, normalement orientée par $\frac{\nabla F}{|\nabla F|}$, la courbure est donnée par

$$\kappa = \frac{d^2F(\tau)}{|\nabla F|}$$

où $\tau = J\frac{\nabla F}{|\nabla F|}$ est le vecteur unitaire tangent orienté. Comme

$$J\nabla F = (-\frac{\partial F}{\partial y},\frac{\partial F}{\partial x}),$$

il vient

$$\begin{aligned}
\kappa &= \frac{d^2F(J\nabla F)}{|\nabla F|^3}\\
&= \frac{\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(\frac{\partial F}{\partial y})^2 - 2\frac{\partial^2 F}{\partial x\partial y}\frac{\partial F}{\partial x}\frac{\partial F}{\partial y} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}(\frac{\partial F}{\partial x})^2}{((\frac{\partial F}{\partial x})^2+(\frac{\partial F}{\partial y})^2)^{3/2}}.
\end{aligned}$$

Dans le cas de l'ellipse X,

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{2x}{a^2},\quad \frac{\partial F}{\partial y} = \frac{2y}{b^2},$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = \frac{2}{a^2},\quad \frac{\partial^2 F}{\partial x\partial y} = 0,\quad \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = \frac{2}{b^2}$$

d'où

$$\begin{aligned}
\kappa &= \frac{\frac{2}{a^2}(\frac{2y}{b^2})^2 + \frac{2}{b^2}(\frac{2x}{a^2})^2}{((\frac{2x}{a^2})^2+(\frac{2y}{b^2})^2)^{3/2}}\\
&= \frac{\frac{8}{a^2b^2}(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2})}{8(\frac{x^2}{a^4}+\frac{y^2}{b^4})^{3/2}}\\
&= \frac{1}{a^2b^2(\frac{x^2}{a^4}+\frac{y^2}{b^4})^{3/2}}.
\end{aligned}$$

On retrouve bien l'expression obtenue en 2.