Université Paris-Sud 2000/2001
DESS d'Ingéniérie Mathématique

EXAMEN DE TOPOLOGIE ET GÉOMÉTRIE DIFFÉRENTIELLE
5 avril 2002, durée 3 heures
Les documents et calculettes sont autorisés

I

On cherche à modéliser grossièrement la déformation de la section d'un pneu de voiture sous le poids de la voiture. La route est représentée par le plan Oxy. Le plan de symétrie de la roue est le plan Oyz. On s'intéresse à la section par le plan Oxz. La jante est modélisée par deux disques de rayon R situés dans les plans $\{x = \pm 1\}$, d'axe la droite $\{z = R + h,\, y = 0\}$. Lorsque le poids de la voiture est nul, $h = 1$ et le pneu est représenté par la moitié extérieure d'un tore d'axe $\{z = R + 1,\, y = 0\}$. Sa section, dans le plan Oxz, est un demi cercle de rayon 1, tangent en O à Ox et en $(1, 1)$ à la section de la jante, i.e. un segment vertical. Tirant parti de la symétrie, on étudie seulement la moitié de la section située dans le demi-plan $\{x \geq 0,\, y = 0\}$. Lorsque le poids de la voiture est nul, il s'agit d'un quart de cercle.

1. On paramètre le quart de cercle comme une NURBS $t \mapsto X(t)$ de degré 2. Quel vecteur de noeud, quel polygone de contrôle, quels poids faut-il choisir ? Donner l'expression de $X(t)$ en fonction de t. Pour quelle valeur $\hat{t}$ le point $X(\hat{t})$ se trouve-t-il sur l'axe de symétrie du quart de cercle ? Faire un dessin.

2. En vue de déformer le quart de cercle, on insère un noeud en $\hat{t}$. Quel est le nouveau vecteur de noeuds ? On pose $P_0 = (0, 0)$, $P_1 = (\sqrt{2} - 1, 0)$, $P_2 = (1, \sqrt{2} - 1)$, $P_3 = (1, 1)$, $w_0 = 1$, $w_1 = 1$, $w_2 = \sqrt{2}$, $w_3 = 2$. Ecrire le polygone de contrôle pour la B-spline dans $\mathbf{R}^3$ dont la NURBS de degré 2 est la projection centrale. *Facultatif :* au moyen de l'algorithme de de Casteljau/de Boor, vérifier que la NURBS coïncide bien avec le quart de cercle.

3. Dans les 5 questions suivantes, on garde les poids de la question 2 mais on modifie le polygone de contrôle (P'_0, P'_1, P'_2, P'_3). Montrer que la NURBS de degré 2 correspondante reste tangente au côté $P'_1 P'_2$ en son milieu. Est-elle de classe C^2 en ce point ?

4. Soit $h \in]0, 1]$. Déterminer tous les polygones de contrôle (P'_0, P'_1, P'_2, P'_3) tels que la NURBS correspondante modélise la moitié de la section d'un pneu

- tangent à la jante située à distance h du sol ;
- tangent à la route ;
- ne pénétrant pas dans la route.

5. Combien vaut la courbure de la courbe en $(0, 0)$. A quelle condition est-elle non nulle ?

6. On suppose que les conditions obtenues aux questions 4 et 5 sont satisfaites. Montrer que la courbe n'a pas de points doubles.

7. Dessiner sommairement la NURBS correspondant au polygone $P'_0 = (0, 0)$, $P'_1 = (2, 0)$, $P'_2 = (1, 1/2)$, $P'_3 = (1, 3/4)$.

8. Dans cette question, on garde le polygone de contrôle de la question 6 mais on change les poids (qui doivent rester strictement positifs). En jouant sur les poids, peut-on faire en sorte que la courbe se raccorde G^2 à la jante ?

II

On étudie le raccord de deux cônes le long d'une directrice. On note $O = (0,0,0)$, $S = (0,0,-1)$, $M = (0,-1,-1)$. Soit C le cône de sommet S, à base circulaire, contenant les points M et O, et dont l'axe se trouve dans le plan Oyz. On choisit l'orientation normale sortante. On se donne une courbe régulière $t \mapsto \sigma(t) = (x(t), y(t), 0)$, $t \in [0, +\infty[$, dans le plan Oxy, issue de O, et on note C' le cône de sommet S sur σ, i.e. la réunion des demi-droites $O\sigma(t)$. Le plan Oxy est orienté par sa normale $(0,0,1)$. On oriente le cône C' au point O par la normale à σ dans Oxy.

1. Donner une équation de C. Le plan Oxy est-il transverse à C ? On note $C_- = C \cap \{z \leq 0\}$. Donner une paramétrisation de l'intersection c de C et de Oxy compatible avec l'orientation induite comme bord de C_-. Calculer la courbure de c au point O.

2. Paramétrer C'. A quelle condition sur σ la surface C' est-elle régulière en dehors de S ? Déterminer son plan tangent le long de la demi-droite SO.

3. On note $C_1 = C \cap \{x \geq 0\}$. Quelle est l'orientation induite sur la demi-droite SO vue comme partie du bord de C_1 ? vue comme bord de C' ? A quelle condition les surfaces C_1 et C' se raccordent-elle G^1 le long de leur bord commun ?

4. Déterminer les courbures principales de C en O (il n'est pas indispensable de calculer). En déduire les courbures principales en chaque point de la demi-droite SO.

5. On suppose que la condition de raccord G^1 obtenue en 3 est satisfaite. Calculer les courbures principales de C' le long de O. A quelle condition les surfaces C_1 et C' se raccordent-elle G^2 le long de leur bord commun ?

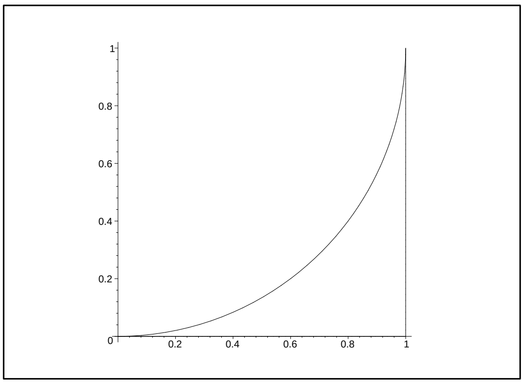
6. On suppose la condition obtenue en 4 satisfaite. Soit Π un plan ne passant pas par S. Montrer que la courbe d'intersection $\Pi \cap (C_1 \cup C')$ est de classe G^2. Comparer avec le résultat de la question 1.

Université Paris-Sud
DESS d'Ingéniérie Mathématique 2000/2001

Corrigé de l'examen de topologie et géométrie différentielle
5 avril 2002, durée 3 heures

I

1. Il s'agit d'une courbe de Bézier rationnelle de degré 2, donc le vecteur de noeuds est $(0,0,0,1,1,1)$. Les points de contrôle sont les deux extrémités du quart de cercle, $P_0 = (0,0)$ et $P_2 = (1,1)$ et le point d'intersection des tangentes, $P_1 = (1,0)$. Les poids sont $w_0 = w_1 = 1$ et $w_2 = 2$.



Pour calculer la paramétrisation obtenue, on peut utiliser l'algorithme de de Casteljau dans $\mathbf{R}^3$. Le polygone de contrôle dans $\mathbf{R}^3$ est

$$R_0 = (w_0, w_0P_0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad R_1 = (w_1, w_1P_1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad R_2 = (w_2, w_2P_2) = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Comme il s'agit d'une courbe de Bézier, les coefficients valent tous t, donc

$$R_1^1 = (1-t)R_0 + tR_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ t \\ 0 \end{pmatrix}, \quad R_2^1 = (1-t)R_1 + tR_2 = \begin{pmatrix} 1+t \\ 1+t \\ 2t \end{pmatrix},$$

d'où la courbe de Bézier dans $\mathbf{R}^3$

$$Y(t) = R_2^2 = (1-t)R_1^1 + tR_2^1 = \begin{pmatrix} 1+t^2 \\ 2t \\ 2t^2 \end{pmatrix},$$

et $X(t)$ est la projection centrale de $Y(t)$, soit

$$X(t) = \begin{pmatrix} \frac{2t}{1+t^2} \\ \frac{2t^2}{1+t^2} \end{pmatrix}.$$

L'axe de symétrie du quart de cercle est la droite d'équation $x+y=1$. Le point $X(t)$ se trouve dessus si et seulement si

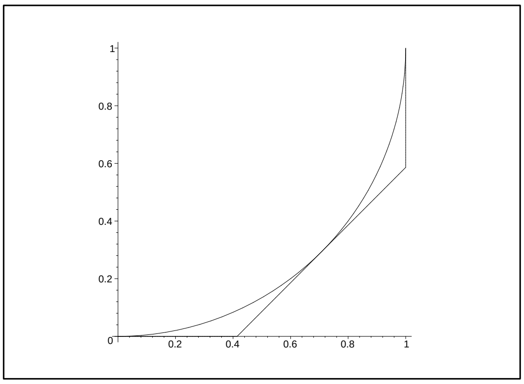
$$\frac{2t}{1+t^2}+\frac{2t^2}{1+t^2}=1$$

équation qui possède deux solutions, $t=-1\pm\sqrt{2}$. Seule la solution $\hat{t}=-1+\sqrt{2}$ est dans l'intervalle $[0,1]$.

2. Le nouveau vecteur de noeuds est $(0,0,0,\sqrt{2}-1,1,1,1)$. Le nouveau polygone de contrôle dans $\mathbf{R}^3$ est

$$R_0=(w_0,w_0P_0)=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\quad R_1=(w_1,w_1P_1)=\begin{pmatrix}1\\\sqrt{2}-1\\0\end{pmatrix},$$

$$R_2=(w_2,w_2P_2)=\begin{pmatrix}\sqrt{2}\\\sqrt{2}\\2\sqrt{2}-2\end{pmatrix},\quad R_3=(w_3,w_3P_3)=\begin{pmatrix}2\\2\\2\end{pmatrix}.$$



Les coefficients qui rentrent dans l'algorithme de de Casteljau sont

$$\omega_{3,2}=\frac{t-\sqrt{2}+1}{2-\sqrt{2}},\quad \omega_{2,2}=t,\quad \omega_{1,2}=\frac{t}{\sqrt{2}-1},\quad \omega_{3,1}=\frac{t-\sqrt{2}+1}{2-\sqrt{2}},\quad \omega_{2,1}=\frac{t}{\sqrt{2}-1}.$$

Il vient

$$R_1^1=(1-\frac{t}{\sqrt{2}-1})R_0+\frac{t}{\sqrt{2}-1}R_1=\begin{pmatrix}1\\t\\0\end{pmatrix},\quad R_2^1=(1-t)R_1+tR_2=\begin{pmatrix}1+(\sqrt{2}-1)t\\\sqrt{2}-1+t\\(2\sqrt{2}-2)t\end{pmatrix},$$

$$R_3^1=\frac{1-t}{2-\sqrt{2}}R_2+\frac{t-\sqrt{2}+1}{2-\sqrt{2}}R_3=\begin{pmatrix}1+t\\1+t\\2t\end{pmatrix},$$

$$R_2^2=(1-\frac{t}{\sqrt{2}-1})R_1^1+\frac{t}{\sqrt{2}-1}R_2^1=\begin{pmatrix}1+t^2\\2t\\2t^2\end{pmatrix}=Y(t),$$

$$R_3^2=\frac{1-t}{2-\sqrt{2}}R_2^1+\frac{t-\sqrt{2}+1}{2-\sqrt{2}}R_3^1=\begin{pmatrix}1+t^2\\2t\\2t^2\end{pmatrix}=Y(t),$$

ce qu'on voulait vérifier.

3. Comme la courbe est de degré 2, en chaque noeud, elle est tangente à un côté de son polygone de contrôle (cours). Plus précisément, en $\sqrt{2}-1$, seulement deux valeurs de fonctions B-splines de degré 2 sont non nulles (il s'agit de $\alpha = B_{2,1}(\sqrt{2}-1)$ et $\beta = B_{2,2}(\sqrt{2}-1)$). Autrement dit,

$$X_2(\sqrt{2}-1) = \frac{\alpha w_1 P_1' + \beta w_2 P_2'}{\alpha w_1 + \beta w_2}.$$

Pour le polygone de contrôle $\mathbf{P}$, $X_2(\sqrt{2}-1)$ est le milieu de $[P_1, P_2]$. Cela signifie que

$$\alpha w_1 = \beta w_2.$$

Par conséquent, pour tout polygone de contrôle $\mathbf{P'}$,

$$X_2(\sqrt{2}-1) = \frac{\alpha w_1 P_1' + \beta w_2 P_2'}{\alpha w_1 + \beta w_2} = \frac{1}{2}P_1' + \frac{1}{2}P_2'$$

est le milieu du segment $[P_1', P_2']$.

Pour un polygone de contrôle général, la courbe n'est pas de classe C^2 aux noeuds. Elle peut l'être accidentellement (c'est le cas du quart de cercle).

4. Soit $h \in]0,1]$. La première condition signifie que $P_3' = (1,h)$ et que P_2' est sur la droite verticale passant par P_3', d'où $P_2' = (1,a)$ avec $a \leq h$. La deuxième condition signifie que $P_0' = (0,0)$ et que P_1' est sur la droite horizontale passant par P_0', d'où $P_2' = (b,0)$ avec $b \geq 0$. La troisième condition entraîne que la courbure de la courbe est ≥ 0 (sinon, la courbe serait dans le demi-plan $z < 0$ pour t assez petit), ce qui se traduit par $a \geq 0$. Inversement, si $a \geq 0$, la courbe est dans l'enveloppe convexe de son polygone de contrôle, donc entièrement dans le demi-plan $z \geq 0$. Les trois conditions imposées se traduisent donc par $P_2' = (1,a)$ avec $0 \leq a \leq h$ et $P_2' = (b,0)$ avec $b \geq 0$.

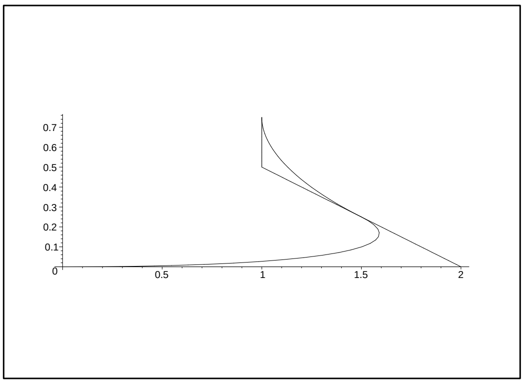
5. La courbure en $(0,0)$ vaut

$$\kappa = \frac{k}{k-1}\frac{t_4-t_2}{t_3-t_2}\frac{w_0 w_2}{w_1^2}\frac{2\,aire}{longueur^3} = \frac{2}{1}\frac{1}{\sqrt{2}-1}\frac{\sqrt{2}}{1}\frac{ab}{b^3} = \frac{2\sqrt{2}a}{(\sqrt{2}-1)b^2}$$

qui est non nulle si et seulement si $a > 0$.

6. Supposons que la courbe possède un point double $Q = (\alpha, \beta) = X_2(\tau) = X_2(\tau')$ où $\tau \neq \tau'$. La variation du polygone de contrôle par rapport à la droite $\{z = \beta\}$ vaut au plus 1. D'après la propriété de diminution de la variation, la variation de la courbe par rapport à la droite $\{z = \beta\}$ vaut au plus 1. Autrement dit, la fonction $z - \beta$ change de signe au plus une fois. Par conséquent, la fonction z est constante le long de la courbe entre τ et τ'. Cela entraîne que z est constante sur l'un des 2 intervalles $[0, \sqrt{2}-1]$ et $[\sqrt{2}-1, 1]$. C'est incompatible avec le fait que la tangente en 1 est verticale, ou que la courbure en 0 est strictement positive. On conclut qu'il n'y a pas de point double.

7. Voici la NURBS correspondant au polygone $P_0' = (0,0)$, $P_1' = (2,0)$, $P_2' = (1,1/2)$, $P_3' = (1,3/4)$.



8. La courbure de la NURBS en $(1, h)$ vaut

$$\kappa = \frac{k}{k-1}\frac{t_4-t_2}{t_4-t_3}\frac{w_1 w_3}{w_2^2}\frac{2\,aire}{longueur^3} = \frac{2(1-b)}{(2-\sqrt{2})(h-a)^2}\frac{w_1 w_3}{w_2^2} = -\frac{64}{2-\sqrt{2}}\frac{w_1 w_3}{w_2^2}$$

qui est strictement négatif quels que soient les valeurs (positives) des poids. Or la courbure du segment de droite qui représente la jante vaut 0. Il n'est donc pas possible de rendre le raccord G^2 en jouant sur les poids.

II

1. L'axe du cône C est nécessairement la bissectrice de $M-S$ et $O-S$. C'est la demi-droite d'origine S et de vecteur directeur $w = (0, -\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$. Un point $X = (x, y, z)$ est sur ce cône si et seulement si le vecteur unitaire $\frac{X-S}{|X-S|}$ fait avec w un angle égal à celui que font $M-S$ et $O-S$, soit $\pi/4$. Comme le produit scalaire de deux vecteurs unitaires est égal au cosinus de leur angle, la condition s'écrit

$$\frac{X-S}{|X-S|}\cdot w = (O-S)\cdot w = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

soit

$$-y+z+1 = \sqrt{x^2+y^2+(z+1)^2}.$$

Posons $F(x, y, z) = x^2 + y^2 + (z+1)^2 - (-y+z+1)^2$. Alors C est une moitié du lieu des zéros de F. On calcule le gradient

$$\nabla F = \begin{pmatrix} 2x \\ 2(z+1) \\ 2y \end{pmatrix}.$$

Le gradient de F s'annule seulement au point S. On en déduit que C est une surface régulière sauf au point S. Le plan tangent à C est horizontal si et seulement si le gradient est vertical, i.e. le long de la droite $\{x = 0,\ z = -1\}$ qui ne rencontre pas le plan Oxy. On conclut que Oxy est transverse à C. L'intersection c de C et de Oxy est donc régulière. Elle est définie par les équations $z = 0$ et $x^2 + 2y = 0$. C'est une parabole. La paramétrisation compatible avec l'orientation comme bord de C_- est $t \mapsto (t, -t^2/2, 0)$. En effet, au point O, la normale à la parabole dans le plan tangent à C

sortant de C_- est $(0,0,1)$, la normale orientée à C est $(0,1,0)$ donc la tangente orientée au bord de C_- est $(1,0,0)$. On s'en convainc également au moyen de la règle de la matière à gauche.

La courbure de la parabole c au point $(t,-t^2/2,0)$ est

$$\kappa = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -t & -1 \end{vmatrix}}{\sqrt{1+t^2}} = -\frac{1}{\sqrt{1+t^2}}.$$

Elle est strictement négative car la parabole est convexe.

2. Paramétrons C' par

$$(u,v) \mapsto X(u,v) = S + u(\sigma(v) - S) = \begin{pmatrix} ux(v) \\ uy(v) \\ u-1 \end{pmatrix}.$$

Alors

$$\frac{\partial X}{\partial u} = \begin{pmatrix} x(v) \\ y(v) \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \frac{\partial X}{\partial v} = \begin{pmatrix} ux'(v) \\ uy'(v) \\ 0 \end{pmatrix}, \frac{\partial X}{\partial u} \wedge \frac{\partial X}{\partial v} = \begin{pmatrix} -uy'(v) \\ ux'(v) \\ u(y'(v)x(v) - x'(v)y(v)) \end{pmatrix}.$$

Comme σ est régulière, sa vitesse ne s'annule pas, donc x' et y' ne s'annulent pas simultanément, et $\frac{\partial X}{\partial u} \wedge \frac{\partial X}{\partial v} \neq 0$ si $v \neq 0$. De plus, comme σ n'a pas de points doubles, C' n'en a pas non plus. On conclut que C' est régulière en dehors de S. On vérifie que le vecteur unitaire normal obtenu en O, i.e. lorsque $u = 1$ et $v = 0$, coïncide bien avec la normale à σ dans Oxy, donc que la paramétrisation choisie est compatible avec l'orientation imposée.

Le long de SO, $u = 0$, le plan tangent est engendré par $(0,0,1)$ et par $u\sigma'(0)$. Il est vertical et ne dépend pas de u.

3. L'orientation induite sur la demi-droite SO vue comme partie du bord de $C_1 = C \cap \{x \geq 0\}$ va de S vers O.

L'orientation induite sur la demi-droite SO vue comme partie du bord de C' va de O vers S.

Pour que les surfaces C_1 et C' se raccordent G^1 le long de leur bord commun (la demi-droite SO), il faut et il suffit que la vitesse en O de la courbe σ soit colinéaire et de même sens que $(1,0,0)$, i.e. que $x'(0) > 0$ et $y'(0) = 0$.

4. Par symétrie plane, le plan Oyz coupe perpendiculairement le cône C. Par conséquent, la demi-droite SO est une ligne de courbure, et la courbure principale correspondante est nulle. Par symétrie de révolution, le plan passant par O et orthogonal au vecteur w coupe le cône suivant un angle constant égal à $\pi/4$. Par conséquent, son intersection avec C (un cercle de rayon $1/\sqrt{2}$) est une ligne de courbure. La courbure principale correspondante vaut $\pm\sqrt{2}\sin(\pi/4) = \pm 1$. Le cône étant convexe mais orienté par la normale sortante, la courbure principale doit être négative ou nulle, donc elle vaut -1. On peut aussi écrire que la courbure principale vaut $II_O(\tau)$ où $\tau = (1,0,0)$ est une direction principale. Comme τ est tangent à l'intersection c de C avec le plan Oxy normal à C, $II_O(\tau)$ est la courbure de c, soit -1.

Le point $(0,0,u-1)$ est l'image de O par une homothétie de centre S et de rapport u qui envoie le cône C dans lui-même. Comme une courbure principale est homogène à l'inverse d'une longueur, on en déduit que les courbures principales de C en $(0,0,u-1)$ valent 0 et $-1/u$.

5. On calcule

$$E = x(v)^2 + y(v)^2 + 1, \quad F = u(x(v)x(v)' + y(v)y'(v)), \quad G = u^2(x'(v)^2 + y'(v)^2),$$

$$A = 0, \quad B = 0, \quad C = \frac{u(-x''(v)y'(v) + y''(v)x'(v))}{\sqrt{x'(v)^2 + y'(v)^2 + (x'(v)y(v) - y'(v)x(v))^2}}.$$

Pour simplifier le calcul, on peut supposer que $x'(0) = 1$. D'après 3, $y'(0) = 0$. Alors $k = -x''(0)y'(0) + y''(0)x'(0)$ est la courbure de σ en O. Le long de SO, i.e. lorsque $v = 0$,

$$\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} A & B \\ B & C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & k/u \end{pmatrix},$$

donc les courbures principales, valeurs propres de cette matrice diagonale, valent 0 et k/u.

On conclut que C_1 et C' se raccordent G^2 si et seulement si $k = -1$.

6. Le plan tangent à un cône passe toujours par le sommet du cône. Par conséquent, si Π est un plan ne passant pas par S, Π est partout transverse au cône $C_1 \cup C'$, qui est de classe G^2, donc l'intersection est une courbe régulière de classe G^2.

Prenons $\Pi = Oxy$. L'intersection de Π avec $C_1 \cup C'$ est la réunion d'une moitié de la parabole c et de la courbe σ. Comme elle est de classe G^2, les deux courbes ont la même courbure en O. C'est bien ce qu'on a trouvé en 1 et 5.