Université Paris-Sud
DESS d'Ingéniérie Mathématique 2000/2001

Examen de topologie et géométrie différentielle

4 avril 2001, durée 3 heures
Les documents et calculettes sont autorisés

I

Etude d'une famille à 2 paramètres de courbes B-splines
Soient a et θ des réels. On note $\gamma^{a,\theta}$ la courbe B-spline de degré 3 vissée aux extrémités associée au polygone de contrôle $P_0 = (0,0)$, $P_1 = (\cos(\theta), \sin(\theta))$, $P_2 = (a, 0)$, $P_3 = (\cos(-\theta), \sin(-\theta))$, $P_4 = (0,0)$.

1. Préciser quel vecteur de noeuds utiliserait DesignMentor pour cette courbe. Tracer sommairement le polygone de contrôle et la courbe $\gamma^{a,\theta}$ pour $a = -1$, $\theta = \pi/4$ et $a = -1$, $\theta = 3\pi/4$.

2. Comment obtient on $\gamma^{-a,\pi-\theta}$, $\gamma^{a,-\theta}$ à partir de $\gamma^{a,\theta}$? Justifier.

Dans la suite, on suppose que $0 < \theta < \pi/2$.

3. Montrer que la courbe $\gamma^{a,\theta}$ possède une symétrie. Montrer que la courbe $\gamma^{a,\theta}$ traverse son axe de symétrie en $(0,0)$ et en exactement un autre point, qu'on notera $A^{a,\theta}$ ou simplement A.

4. Montrer que A est dans l'enveloppe convexe de P_1, P_2 et P_3. En déduire que lorsque a décrit $\mathbf{R}$, A décrit l'axe Ox.

5. Dans cette question, on suppose que $a > 0$. Montrer que la courbe $\gamma^{a,\theta}$ est convexe. Sans calculs, montrer que si $a = \cos(\theta)$, alors $A = P_2$.

6. Pour quelles valeurs de a et de θ la courbe $\gamma^{a,\theta}$ vue comme courbe fermée est-elle de classe G^2 ?

II

Etude d'un polyèdre curviligne.
On repère les points de la sphère unité S par leur latitude $\theta \in [-\pi/2, \pi/2]$ et leur longitude $\phi \in \mathbf{R}/2\pi\mathbf{Z}$. On oriente S par la normale sortant de la boule unité. On considère 7 points de S :

	P_0	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6
latitude θ	$\pi/2$	$\pi/4$	0	0	0	0	$-\pi/2$
longitude ϕ	0	$\pi/4$	$-\pi/2$	0	$\pi/4$	$\pi/2$	0

On définit deux polygones sphériques de dimension 1 normalement orientés Q et Q' par la liste de leurs arêtes orientées.

Q	(P_0, P_1), (P_0, P_2), (P_3, P_0), (P_5, P_0), (P_1, P_3), (P_1, P_5), (P_4, P_1), (P_2, P_3), (P_3, P_6), (P_5, P_4), (P_6, P_5)
Q'	(P_0, P_1), (P_0, P_2), (P_3, P_0), (P_5, P_0), (P_3, P_1), (P_1, P_5), (P_1, P_4), (P_2, P_3), (P_3, P_6), (P_5, P_4), (P_6, P_5)

1. Sur deux figures différentes, dessiner les polygones Q et Q' et indiquer par une flèche l'orientation normale de chaque arête.

2. Montrer que l'un des polygones Q et Q' ne borde aucun polygone sphérique de dimension 2. Hachurer sur la figure le polygone L bordé par l'autre polygone.

3. Soit C le cône de sommet l'origine sur L, F le cône sur quart de méridien (P_0, P_3), D la demi-droite OP_3. Quelle est l'orientation induite sur D par F vue comme facette de C ?

4. Soit C' l'intersection de C avec la boule unité fermée $\overline{B}$, soit $F' = F \cap \overline{B}$ et $D' = D \cap \overline{B}$. Quel sont le prédécesseur et le successeur de la coarête (F', D') dans l'ordre circulaire sur les coarêtes de la facette F' de C' ?

III

Raccord de 2 surfaces le long d'une droite

Soit C le cercle unité du plan $\{z = 0\}$, $C^+ = C \cap \{y \geq 0\}$ et $C^- = C \cap \{y \leq 0\}$. Soit X_1 la réunion des droites passant par le point $p = (1, 0, 1)$ et coupant C^+. Soit X_2 la réunion des droites coupant orthogonalement la droite d'équations $\{y = 0,\, z = 1\}$ et coupant C^-.

1. Ecrire des paramétrisations $(u, v) \mapsto X_1(u, v)$ et $(u, v) \mapsto X_2(u, v)$ de sorte que $u \mapsto X_1(u, 0)$ et $u \mapsto X_2(u, 0)$ soient des paramétrisations de C^+ (resp. C^-). A quelle condition sur (u, v) ces paramétrisations sont elles non dégénérées ? Montrer que X_1 n'est pas une surface à bord au voisinage du point p. Qu'en est-il de X_2 ?

2. Montrer que les surfaces X_1 et X_2 se raccordent G^1 le long de la demi-droite $D = \{x = 1,\, y = 0,\, z < 1\}$.

3. Calculer la courbure de Gauss de X_1 et de X_2.

4. Soit $q = (1, 0, z)$ un point de D. Calculer la courbure de l'intersection de X_1 (resp. X_2) avec le plan passant par q, orthogonal à la droite D. Les surfaces X_1 et X_2 se raccordent elles G^2 le long de D ?

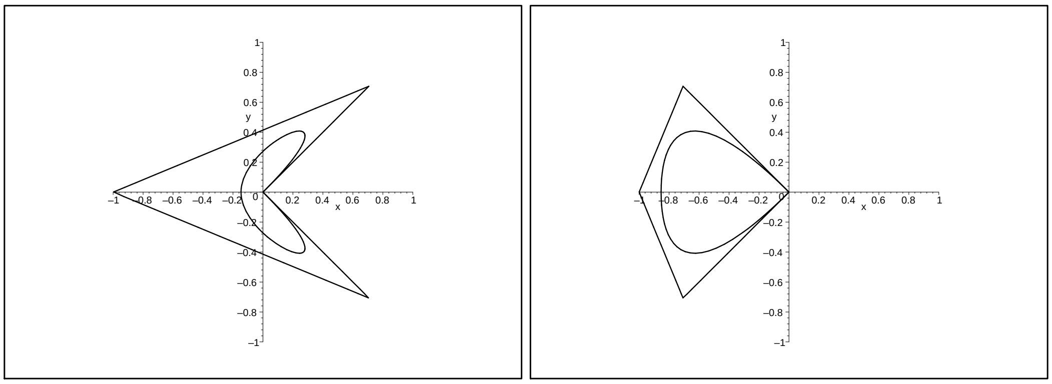
Université Paris-Sud 2000/2001
DESS d'Ingéniérie Mathématique

Corrigé de l'examen de topologie et géométrie différentielle

4 avril 2001, durée 3 heures

I

1. Si $m+1$ est le nombre total de noeuds et k le degré, le nombre de points de contrôle pour une courbe vissée aux extrémités est $m-k$. Ici, $k=3$ et $m-k=5$ donc $m=8$. Les noeuds extrêmes sont de multiplicité $k+1=4$. DesignMentor place les noeuds extrêmes en 0 et en 1, soit $t_0=\cdots=t_3=0$, $t_5=\cdots=t_8=1$. DesignMentor distribue les noeuds internes de façon uniforme, donc $t_4=1/2$. Le vecteur de noeuds obtenu est $(0,0,0,O,1/2,1,1,1,1)$.



Polygone et courbe B-spline pour deux valeurs de θ

2. Soit s la symétrie par rapport à l'axe $0y$ et σ la symétrie par rapport à l'axe $0x$. Alors s envoie le polygone de contrôle de $\gamma^{a,\theta}$ sur celui de $\gamma^{-a,\pi-\theta}$ et σ envoie le polygone de contrôle de $\gamma^{a,\theta}$ sur celui de $\gamma^{a,-\theta}$. Comme s et σ sont affines, elles envoient respectivement $\gamma^{a,\theta}$ sur $\gamma^{-a,\pi-\theta}$ et $\gamma^{a,-\theta}$.

3. Le vecteur de noeuds satisfait $t_{8-i}=1-t_i$. Par conséquent, les fonctions B-splines cubiques sont symétriques : $B_{i,3}(t)=B_{5-i,3}(1-t)$. Le polygone de contrôle satisfait $P_{4-i}=\sigma(P_i)$. Par conséquent pour tout $t\in[0,1]$,

$$\sigma(\gamma^{a,\theta}(t))=\gamma^{a,\theta}(1-t).$$

Ecrivons $\gamma^{a,\theta}(t)=((x(t),y(t))$. Comme $\gamma^{a,\theta}$ est tangente au côté P_0P_1 en P_0, $y'(0)>0$ donc il existe $t\in]0,1[$ tel que $y(t)>0$. Alors $y(1-t)=-y(t)<0$. Par conséquent, la fonction y change de signe sur $]0,1[$.

Le polygone de contrôle traverse l'axe $0x$ une seul fois (en P_2). Par conséquent, la fonction y ne change de signe qu'une seule fois. Par symétrie, c'est en $t=1/2$ que cela se produit, donc $A=\gamma^{a,\theta}(1/2)$.

4. En général, pour une courbe B-spline X de degré k, si $t\in[t_i,t_{i+1}[$, $X(t)$ est dans l'enveloppe convexe de $k+1$ points $P_{i-k},\ldots,P_i$. Si $k\geq 1$, en un noeud simple, une fonction B-spline supplémentaire s'annule. Par conséquent $X(t_{i+1})$ est dans l'enveloppe convexe de $P_{i-k+1},\ldots,P_i$. Ici, $k=3$, $i=3$, $t_{i+1}=1/2$, donc $A=\gamma^{a,\theta}(1/2)$ est dans l'enveloppe convexe de P_1, P_2 et P_3.

Cela s'écrit

$$A = \alpha P_1 + \beta P_2 + \gamma P_3$$

où α, β et γ sont des valeurs de fonctions B-splines indépendantes de a et de θ, strictement positives. Par conséquent l'abscisse de A est une fonction affine strictement croissante de a, donc une bijection de $\mathbf{R}$ sur $\mathbf{R}$. Ceci prouve que A décrit entièrement l'axe des x.

5. Si $0 < \theta < \pi/2$, le polygone de contrôle est convexe, donc la courbe $\gamma^{a,\theta}$ est convexe.

Si $a = \cos\theta$, les points P_1, P_2 et P_3 sont sur une même droite verticale. Le point A est à l'intersection de cette droite et de l'axe des x, donc en P_2.

6. Pour que le raccord en $P_0 = P_4$ soit G^1, il faut que les côtés P_3P_4 et P_0P_1 soient alignés et de même sens, ce qui entraîne que $\theta = \pi/2$ modulo π.

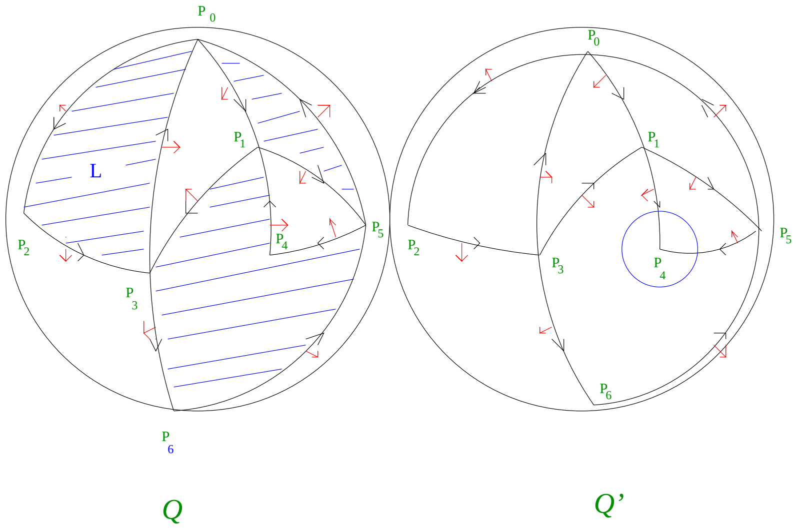
Inversement, supposons que $\theta = \pi/2$ (l'autre cas s'y ramène par la question 2). Comme le noeud $1/2$ est simple, la courbe $\gamma^{a,\theta}$ est de classe C^2 au voisinage de $1/2$, donc sur $]0,1[$.

La symétrie σ renverse l'orientation de la courbe et change l'orientation du plan donc préserve la courbure. Par conséquent, la courbure de $\gamma^{a,\theta}$ en 0 et en 1 sont égales. Cela prouve que le raccord est G^2.

On conclut que la courbe $\gamma^{a,\theta}$ est de classe G^2 si et seulement si $\theta = \pi/2$ modulo π.

II

1.



2. Dans le polygone Q', il arrive deux arêtes au sommet P_4 et aucune ne repart. Par conséquent le polygone Q' ne borde pas. En revanche, Q borde le polygone L hachuré sur la figure ci-dessus.

3. La normale sortant de C le long de la facette F est le vecteur $(0, 1, 0)$. En marchant sur F (la tête vers les $y > 0$) le long de D en direction de l'origine, on trouve F sur sa gauche. Par conséquent, l'orientation induite est de P_3 vers O.

4. Les arêtes de F' sont les rayons OP_3 et OP_0 et le quart de cercle P_0P_3. En marchant le long du bord de F' (la tête vers les $y > 0$), on rencontre successivement P_3, O et P_0. Par conséquent, le successeur de la coarête (F', P_3O) est (F', OP_2) et son prédecesseur (F', P_2P_3).

III

1. La droite passant par le point $(\cos u, \sin u, 0)$ de C^+ et $(1,0,1)$ peut être paramétrée par

$$v \mapsto (1-v)\begin{pmatrix}\cos u\\ \sin u\\ 0\end{pmatrix} + v\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}(1-v)\cos u + v\\ (1-v)\sin u\\ v\end{pmatrix}$$

d'où la paramétrisation du cône X_1

$$(u,v) \mapsto X_1(u,v) = \begin{pmatrix}(1-v)\cos(u) + v\\ (1-v)\sin u\\ v\end{pmatrix}$$

pour $u \in [0,\pi]$, $v \in \mathbf{R}$.

Notons Δ la droite d'équations $\{y=0,\ z=1\}$. Soit $q=(m,0,1)$ un point de cette droite. Une droite passant par q et orthogonale à Δ est contenue dans le plan d'équation $\{x=m\}$. Si elle coupe le demi-cercle C^- en $(\cos u, \sin u, 0)$, nécessairement $m = \cos u$. Par conséquent, la droite passant par le point $(\cos u, \sin u, 0)$ de C^- et coupant Δ orthogonalement passe par le point $(\cos u, 0, 1)$ donc elle peut être paramétrée par

$$v \mapsto (1-v)\begin{pmatrix}\cos u\\ \sin u\\ 0\end{pmatrix} + v\begin{pmatrix}\cos u\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\cos u\\ (1-v)\sin u\\ v\end{pmatrix}$$

d'où la paramétrisation du cônoïde X_2

$$(u,v) \mapsto X_2(u,v) = \begin{pmatrix}\cos u\\ (1-v)\sin u\\ v\end{pmatrix}$$

où $u \in [-\pi, 0]$ et $v \in \mathbf{R}$.

Les deux expressions donnent bien des paramétrisations de C^+ et C^- lorsque $v=0$, comme prescrit dans l'énoncé.

On calcule

$$\frac{\partial X_1}{\partial u} \wedge \frac{\partial X_1}{\partial v} = (1-v)\begin{pmatrix}\cos u\\ \sin u\\ 1-\cos u\end{pmatrix}$$

qui s'annule si et seulement si $v=1$. On conclut que la paramétrisation X_1 est dégénérée exactement au point p.

On calcule

$$\frac{\partial X_2}{\partial u} \wedge \frac{\partial X_2}{\partial v} = \begin{pmatrix}(1-v)\cos u\\ \sin u\\ \sin^2 u\end{pmatrix}$$

qui s'annule si et seulement si $u=0$ ou π et $v=1$. On conclut que la paramétrisation X_1 est dégénérée exactement aux points p et $(-1,0,1)$.

Si le cône X_1 était une surface à bord lisse au voisinage de p, son plan tangent en p contiendrait toutes les droites passant par p qui sont entièrement contenues dans X_1, or elle ne sont pas toutes coplanaires. On conclut que X_1 n'est pas lisse en p.

La surface X_2 n'est pas lisse non plus en p. *Voici comment on peut le montrer par l'absurde* (ce n'était pas demandé). *Si X_2 était lisse en p, son plan tangent T en p contiendrait toutes les limites de vecteurs tangents à X_2 en des points tendant vers p.*

Au point $X_2(u,v)$, le vecteur $\frac{\partial X_2}{\partial v}(u,v) = (0, -\sin(u), 1)$ est tangent à X_2, il tend vers $(0,0,1)$ quand u tend vers 0 et v vers 1, donc $(0,0,1) \in T$.

Au point $X_2(u,1)$, le vecteur $(\sin u)^{-1}\dfrac{\partial X_2}{\partial u}(u,1) = (-1,0,0)$ est tangent à X_2, il tend vers $(-1,0,0)$ quand u tend vers 0, donc $(-1,0,0) \in T$.

Au point $X_2(u, 1-\sin u)$, le vecteur $(\sin u)^{-1}\dfrac{\partial X_2}{\partial u}(u, 1-\sin u) = (-1, \cos(u), 0)$ est tangent à X_2, il tend vers $(-1,1,0)$ quand u tend vers 0, donc $(-1,1,0) \in T$.

Or ces trois vecteurs sont linéairement indépendants, contradiction. On conclut que X_2 n'est pas lisse en p.

2. Soit $q = (1,0,v) = X_1(0,v) = X_2(0,v)$ un point de D. La normale orientée à X_1 comme à X_2 en $X_1(u,v)$ est $(1,0,0)$, donc le plan tangent a pour équation $\{x = 0\}$. Dans ce plan, la normale à D sortant de X_1 est $signe(v-1)(0,1,0)$. La normale à D sortant de X_2 est $signe(1-v)(0,1,0)$. Elles sont opposées, donc la condition de raccord G^1 est satisfaite. En fait, les paramétrisations choisies se raccordent C^1.

3. On trouve que la courbure de Gauss de X_1 est identiquement nulle (c'est général pour les cônes). La courbure de Gauss de X_2 au point $X_2(u,v)$ vaut

$$\frac{\sin^2 u \cos^2 u}{((1-v)^2\cos^2 u + \sin^2 u + \sin^4 u)^2}.$$

Elle est nulle le long de D.

4. L'intersection de X_1 avec le plan horizontal de cote z est la courbe $u \mapsto X_1(u,z)$. On oriente le plan horizontal par la normale $N = (0,0,1)$. Alors la courbure de cette courbe plane devient

$$\frac{\det(\frac{\partial X_1}{\partial u}, \frac{\partial^2 X_1}{\partial u^2}, N)}{|\frac{\partial X_1}{\partial u}|^3} = \frac{1}{|1-z|}.$$

De même, l'intersection de X_2 avec le plan horizontal de cote z est la courbe $u \mapsto X_2(u,z)$, de courbure

$$\frac{\det(\frac{\partial X_2}{\partial u}, \frac{\partial^2 X_2}{\partial u^2}, N)}{|\frac{\partial X_2}{\partial u}|^3} = \frac{1-z}{\sqrt{(1-z)^2\cos^2 u + \sin^2 u}^{\,3}}.$$

Au point $q = (1,0,z)$, cette courbure vaut

$$\frac{signe(1-z)}{|1-z|^2}.$$

Ces courbures de sections planes normales aux surfaces s'interprètent comme les valeurs de la seconde forme fondamentale sur le vecteur tangent unitaire $\tau = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$ commun aux deux surfaces,

$$II_1(\tau) \quad \text{et} \quad II_2(\tau).$$

Elles ne coïncident qu'au point $(1,0,0)$, pas aux autres points de D, donc le raccord n'est pas G^2.