Université Paris-Sud 1999/2000
S3SMP

EXAMEN DE GÉOMÉTRIE ALGORITHMIQUE
5 avril 2000, durée 3 heures

I

On construit un prisme à base triangulaire dans l'espace et on trace le lien en l'un de ses sommets.

1. On considère le triangle T de sommets $O = (,0,0,0)$, $A = (0,1,0)$ et $B = (-1,1,0)$. Ecrire des équations et inéquations qui définissent T. Soit P le prisme droit de hauteur 1 sur T, i.e. la réunion des translatés de T par des vecteurs de la forme $(0,0,z)$, $0 \leq z \leq 1$. Dessiner P. Combien a-t-il de sommets, d'arêtes, de facettes ?

2. On oriente le bord de P par la normale sortante. Quelle est l'orientation induite sur la facette T ? Quelle est l'orientation tangente induite sur le bord de T (on l'exprimera par un ordre cyclique sur les sommets de T) ?

3. Dessiner le lien de P en O. Combien a-t-il de sommets ? Donner les coordonnées (latitude,longitude) des sommets (l'origine des latitudes est l'équateur, contenu dans le plan $\{z = 0\}$, l'origine des longitude est le méridien contenu dans le demi-plan $\{y = 0,\ x > 0\}$).

4. Parmi les plans qui contiennent les facettes de P, lesquels sont transverses à la sphère unité ?

II

On étudie une famille de NURBS dans le plan. Soit $a > -1$ un paramètre réel. On pose $p_0 = (-1,0)$, $p_1 = (a,0)$, $p_2 = (0,-a)$, $p_3 = (0,1)$ et on s'intéresse aux courbes B-splines de degré $k = 2$ ou 3 associées à ce polygone de contrôle, à des poids w_i strictement positifs et à des vecteurs de noeuds dont les noeuds extrêmes sont de multiplicité $k+1$.

1. Soit X_k une telle courbe. Montrer que si $-1 < a \leq 0$, X_k est convexe. Montrer que la courbe X_k possède au plus un point double. On suppose le vecteur de noeuds et les vecteur des poids symétriques, de sorte que la courbe soit symétrique par rapport à un axe. Quel est cet axe ? Montrer que si X_k possède un point double, celui-ci se trouve forcément sur l'axe de symétrie.

2. Quel est le signe de la courbure de X_k en p_0, en p_3 ? En déduire que si $a > 0$, la courbe X_k n'est pas convexe.

3. On suppose que $k = 3$, que les poids valent 1 et que le vecteur de noeuds est 00001111. En utilisant l'algorithme de de Casteljau, calculer $X_3(t)$ pour $t \in [0,1[$. Pour quelles valeurs de $a > -1$ et t le vecteur vitesse $X_3'(t)$ s'annule-t-il ? Pour cette valeur de a, tracer sommairement la courbe.

III

On dessine la pointe d'une vis à bois. Il s'agit de tracer dans l'espace une courbe de Bézier cubique qui se raccorde GC^2 à une hélice d'axe vertical de pas ϵ et tracée sur un *cylindre de rayon 1. Le* pas *d'une vis est la distance dont avance la vis lorsqu'on lui donne un tour de tournevis.*

On commence par construire une courbe plane, la projection de cette courbe sur un plan horizontal.

1. *Modèle.* Soit c_0 la courbe plane d'équation polaire $\{r = \cos(\theta/2)\,;\, 0 \leq \theta \leq \pi\}$. Paramétrer c_0 puis calculer sa courbure. Change-t-elle de signe ? Quelles sont ses valeurs en $\theta = 0$ et $\theta = \pi$? Tracer sommairement la courbe c_0.

2. *On construit une courbe de Bézier cubique ayant grosso modo le même aspect que c_0.*

2.a. Soit $k > 0$. Montrer qu'il existe dans le plan une unique courbe de Bézier cubique c, paramétrée par $[0, 1]$, qui part de $p = (1, 0)$ avec tangente parallèle à l'axe des y et aboutit en $q = (0, 0)$ avec tangente parallèle à l'axe des x, dont la courbure en p vaut 1 et dont la courbure en q vaut k. Montrer que cette courbe est convexe.

2.b *Application numérique.* On pose $k = 8/3$. Dessiner le polygone de contrôle de c (on remarquera que $8(1 + \frac{1}{2}) = 27k^2(\frac{1}{2})^4$). Posant $t = 1/2$, placer sur la figure tous les points intermédiaires p_i^j de l'algorithme de de Casteljau. Tracer sommairement la courbe c.

3. Dans l'espace, on considère l'hélice tracée sur le cylindre vertical d'axe Oz, de rayon 1, de pas ϵ, passant par le point $P = (1, 0, 0)$. Quelle est sa tangente, son plan osculateur (en donner une équation), sa courbure au point P ? On *notera* H l'intersection de l'hélice avec le demi-espace $\{z \leq 0\}$.

4. On note toujours c la courbe plane construite en 2.a. Montrer qu'il existe une unique courbe de Bézier cubique $t \mapsto X_3(t) = (c(t), f(t))$ telle que
en $t = 0$, le raccord avec la demie hélice H est de classe GC^2 ;
en $t = 1$, la tangente admet $(1, 0, \beta)$ pour vecteur directeur.
Calculer ses points de contrôle.

IV

On étudie la surface réglée engendrée par la famille des binormales à une courbe.

Soit $u \mapsto c(u)$, $u \in I$, une courbe gauche paramétrée par son abscisse curviligne. On suppose que c n'a pas de point d'inflexion. On note $b(u)$ la binormale au point $c(u)$, et on considère la droite $D(u)$ passant par $c(u)$ et de vecteur directeur $b(u)$.

1. Paramétrer la surface X réunion des droites $D(u)$, $u \in I$. Lorsque la courbe c est plane, quelle sorte de surface obtient-on ? La paramétrisation choisie est-elle non dégénérée ? Calculer l'élément d'aire dA.

3. Calculer la première forme fondamentale de X ainsi que les termes B et C de la seconde forme fondamentale. Calculer la courbure de Gauss K. La surface X traverse-t-elle son plan tangent en tout point ?

4. Montrer que l'intégrale

$$\int\int_X K\, dA$$

est convergente, et calculer cette intégrale.