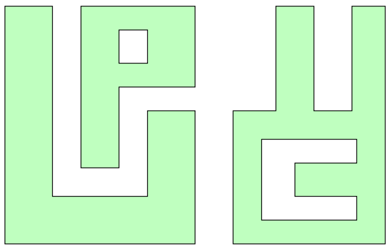
Université Paris-Sud 2002/2003
DESS d'Ingéniérie Mathématique

EXAMEN DE CONCEPTION ET VISUALISATION D'OBJETS
27 mars 2003, durée 3 heures
Les documents et calculettes sont autorisés

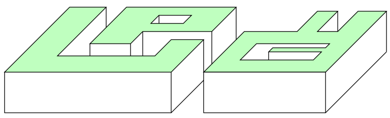
On fabrique une clé d'apparence ancienne. Le profil de la clef correspond à l'objet plan X ci-dessous.



1. Profil des dents

1. Combien l'objet X comporte-t'il de sommets, d'arêtes, de boucles, de faces connexes ? Quelle est sa caractéristique d'Euler ?

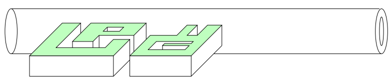
2. Soit Y l'objet obtenu en extrudant X sur une épaisseur ℓ. Que vaut la caractéristique d'Euler du bord ∂Y de Y ?



2. Dents de la clé

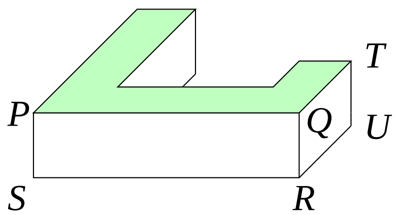
3. Le canon de la clé est un cylindre creux Z de longueur L. Que vaut la caractéristique d'Euler du bord ∂Z de Z ?

4. Soit $K = Y \cup^* Z$. Que vaut la caractéristique d'Euler du bord ∂K de K ? En déduire le genre de ∂K.



3. Canon avec dents

5. On s'intéresse à la dent représentée sur la figure ci-dessous.



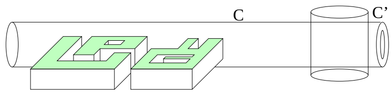
4. Une dent

Faire la liste des faces contenant l'arête QR. Pour chaque face, indiquer l'orientation qu'elle induit sur cette arête. Pour chaque coarête relative à QR (i.e. chaque couple $(QR, face)$, indiquer son successeur.

6. Dessiner le lien de la BRep ∂K au point T. Indiquer l'orientation induite.

7. On suppose déjà réalisées 7 esquisses contenant chacune une des boucles constituant le bord de X, ainsi que, dans un plan perpendiculaire au précédent, deux cercles constituant le bord de la section du cylindre creux Z. On travaille dans un logiciel de CAO qui dispose des features suivants : les opérations booléennes régularisées, l'extrusion et la poche. Le feature extrusion *extr* (resp. le feature poche *poche*) prend comme arguments un objet O (éventuellement vide), une boucle plane B et une longueur L et effectue la réunion (resp. la soustraction régularisée) de O avec l'extrusion de profondeur L de la face plane bordée par B. Trouver un procédé de conception de l'objet K et dessiner l'arbre CSG correspondant.

8. On note C le cylindre extérieur du canon de la clé et r son rayon. On complète la clé par un manche cylindrique d'épaisseur $e > r$ et de rayon $R \geq r$, d'axe orthogonal à celui de C (voir figure 5). On note C' la partie cylindrique du bord du manche. Suivant la valeur de R, dire si l'intersection $C \cap C'$ est ou non une réunion de courbes régulières disjointes.



5. Clé complète

9. La représentation en perspective de la figure 2 vous paraît-elle correcte ? Si non, quelle loi de la perspective est-elle violée ?

Université Paris-Sud
DESS d'Ingéniérie Mathématique 2002/2003

Corrigé de l'Examen de Conception et Visualisation d'Objets
27 mars 2003, durée 3 heures

1. 36 sommets, 36 arêtes, 5 boucles, 3 faces. F_1 est bordée par 1 boucle, F_2 et F_3 par 2 boucles. Par conséquent,

$$\chi(F_1) = 1, \quad \chi(F_2) = \chi(F_3) = 0,$$

d'où $\chi(X) = 1$.

2. Le bord de Y est constitué de 72 sommets, 108 sommets, 42 faces connexes dont 4 sont bordées par 2 boucles et 38 par une boucle. On a donc

$$\chi(\partial Y) = 72 - 108 + 38 = 2.$$

On peut aussi constater que ∂Y est constitué de 3 BRep homéomorphes à des surfaces connexes orientées de genres 0, 1 et 1 donc sa caractéristique d'Euler vaut 2.

3. ∂Z est homéomorphe à une surface connexe orientable de genre 0 donc sa caractéristique d'Euler vaut 0.

4. Soit $Y' = Y -^* Z$. Alors $\partial Y'$ ne diffère de Y que par 4 faces planes qui sont changées en faces cylindriques $f_1, \ldots, f_4$. Par conséquent $\chi(\partial Y') = \chi(\partial Y)$. $\partial Y' \cap \partial Z$ est la réunion de ces 4 faces. Chacune est bordée par une boucle, donc

$$\chi(\partial Y' \cap \partial Z) = 4.$$

Il vient

$$\begin{aligned} \chi(\partial Y' \cup \partial Z) &= \chi(\partial Y') + \chi(\partial Z) - \chi(\partial Y' \cap \partial Z) \\ &= 2 - 4 = -2. \end{aligned}$$

D'autre part,

$$\partial K \cup f_1 \cup \cdots \cup f_4 = \partial Y' \cup \partial Z$$

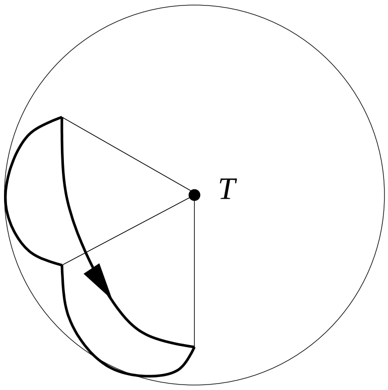
et $\partial K \cap f_i$ est une boucle, de caractéristique d'Euler nulle. Par conséquent

$$\begin{aligned} \chi(\partial Y' \cup \partial Z) &= \chi(\partial K) + \sum_{i=1}^{4} \chi(f_i) \\ &= \chi(\partial K) + 4 \end{aligned}$$

donc $\chi(\partial K) = -6$. On conclut que le genre de ∂K vaut 4.

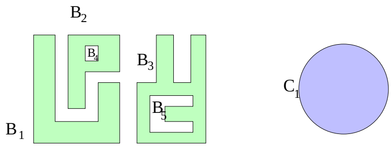
5. L'arête QR est contenue dans exactement deux faces, $RQPS$ et $QRUT$. La face $QPSR$ induit l'orientation RQ, la face $QRUT$ induit l'orientation QR. Le successeur de $(RQ, RQPS)$ est la coarête $(QP, RQPS)$. Le successeur de $(QR, QRUT)$ est $(RU, QRUT)$.

6. Au voisinage de T, K coïncide avec un cube. Par conséquent le lien de ∂K en T est le lien du bord d'un cube, comme sur la figure ci-dessous. Le lien borde l'intersection de K avec une petite sphère orientée par sa normale sortante, il hérite de l'orientation indiquée.



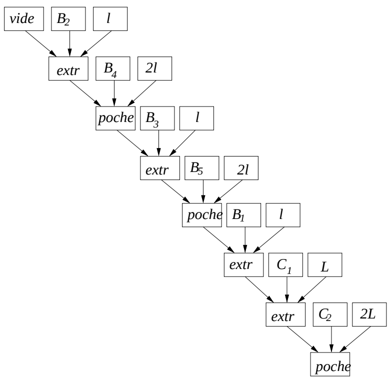
Lien de ∂K en T

7. On numérote les boucles constituant ∂X et les deux cercles comme l'indique la figure ci-dessous.



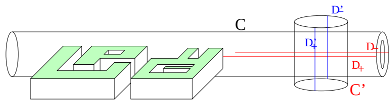
Nomenclature des boucles

Pour construire l'objet K, on extrude la boucle B_2 sur la distance ℓ, puis on creuse dedans une poche de profondeur 2ℓ et de profil B_4, on lui ajoute l'extrusion de profondeur ℓ et de profil B_3, on creuse dans l'objet obtenu une poche de profondeur 2ℓ et de profil B_5, on lui ajoute l'extrusion de profondeur ℓ et de profil B_1, cela donne les 3 dents. On leur ajoute l'extrusion de profondeur ℓ et de profil C_1 et enfin on creuse dans l'objet obtenu une poche de profondeur $2L$ et de profil C_2. Cette suite d'opérations est décrite par l'arbre CSG ci-dessous.



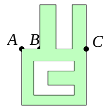
Arbre CSG

8. Choisissons des axes de telle sorte que l'axe de C soit Ox et celui de C' Oz. Le plan tangent à C (resp. à C') contient son axe. Par conséquent, si en un point $p \in C \cap C'$, C et C' ont même plan tangent, celui-ci est le plan xz. Le lieu des points de C où le plan tangent à C est xz est la réunion des deux droites D_+ et D_- d'équations $\{x = \pm r,\, z = 0\}$. Le lieu des points de C' où le plan tangent à C' est xz est la réunion de deux droites D'_+ et D'_- d'équations $\{x = \pm R,\, y = 0\}$. Ces droites coupent D_+ ou D_- si et seulement si $R = r$. Par conséquent, si $R > r$, C et C' se coupent transversalement, et l'intersection $C \cap C'$ est la réunion de courbes régulières (il y en a 2). Si $R = r$, $C \cap C'$ est la réunion de 2 ellipses qui se coupent (voir examen du cours Courbes et Surfaces). Ce n'est donc pas une réunion de courbes régulières disjointes.



Intersection de deux cylindres

9. L’axe du manche est parallèle à l’écran de projection. La projection restreinte à une droite de la scène parallèle à cet axe est affine donc doit conserver les proportions des segments. Or sur la vue de dessus, elle aussi affine, le segment AB (voir figure ci-dessous) est plus court que BC, alors que sur la vue en soi-disant perspective, il apparaît plus long.



Perspective erronnée