Université Paris-Sud
DESS d'Ingéniérie Mathématique 2002/2003

Examen de topologie et géométrie différentielle
27 mars 2003, durée 3 heures
Les documents et calculettes sont autorisés

I

Intersection de deux cylindres. Soit C le cylindre d'axe Ox et de rayon $\sqrt{3}/2$.

1. On considère la surface NURBS S de bidegré $(2,1)$ dont les vecteurs de noeuds sont respectivement $(0,0,0,1,1,1)$ et $(0,0,1,1)$, le réseau de contrôle $P_{0,0}=(1,0,0)$, $P_{1,0}=(1,\sqrt{3}/3,0)$, $P_{2,0}=(1/2,\sqrt{3}/2,0)$, $P_{0,1}=(1,0,\sqrt{3}/2)$, $P_{1,1}=(1,\sqrt{3}/3,\sqrt{3}/2)$, $P_{2,1}=(1/2,\sqrt{3}/2,\sqrt{3}/2)$, de poids $w_{0,0}=w_{0,1}=w_{1,0}=w_{1,1}=1$, $w_{2,0}=w_{2,1}=4/3$. Ecrire la paramétrisation $(u,v)\mapsto s(u,v)$ de cette surface.

2. Vérifier que S est contenue dans un cylindre C' à base circulaire. Quel est son axe ? son rayon ?

3. Soit $a=\{(u,v)\in[0,1]\times[0,1]\,;\,s(u,v)\in C\}$. Trouver les extrémités, les tangentes aux extrémités, et faire un dessin sommaire de l'arc a.

4. On cherche une interpolation b de a par une courbe de Bézier de degré 3 ayant mêmes extrémités de a, mêmes tangentes aux extrémités, et telle que $b(1/2)=(\sqrt{2}/2,\sqrt{17}/7)\sim(0.7,0.6)$. Montrer que cela détermine entièrement le polygone de contrôle.

5. La courbe b est-elle convexe ?

II

Congé entre deux cylindres. Soit c la courbe dans l'espace paramétrée par $u\mapsto c(u)=(\cos u,\cos u,\sin u)$. On fixe $0<\epsilon<1$ et on note S le tube de rayon ϵ autour de c.

1. Vérifier que c est une ellipse contenue dans un plan Π. Vérifier que tout point de c est à distance 1 de l'axe Ox et de l'axe Oy.

2. Montrer que S est tangente au cylindre C d'axe Ox et de rayon $1-\epsilon$, ainsi qu'au cylindre C' d'axe Oy et de rayon $1-\epsilon$.

3. On note σ (resp. σ') l'intersection de S et de C (resp. C'). Paramétrer σ et σ'. Vérifier que σ et σ' sont à nouveau des courbes planes.

4. En chaque point $c(u)$ se coupent une normale à C et une normale à C'. On note $\theta(u)$ l'angle entre ces droites. Calculer $\cos(\theta(u))$.

5. Vérifier que l'intersection $C \cap C'$ est la réunion de deux courbes planes. On souhaite appliquer à la réunion $C \cup C'$ un congé obtenu en faisant rouler une bille de rayon ϵ. En s'aidant de la figure 1, expliquer quel est le lien entre ce congé, les courbes c, σ et σ' et le tube S.

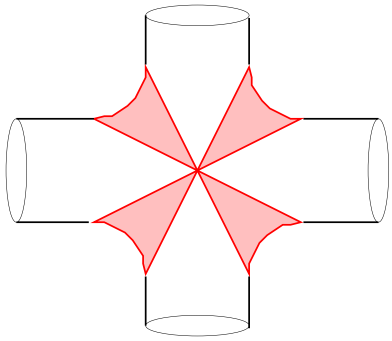

Figure 1 : Congé de raccordement de deux cylindres

6. En un point du congé, la surface S traverse-t'elle son plan tangent ? En déduire le signe de la courbure de Gauss du congé.

7. La surface T obtenue en relimitant les cylindres et en insérant le congé est-elle de classe G^2 ?

8. On note Γ la normale sortante de S. Montrer que le long de σ et de σ', Γ prend ses valeurs dans un grand cercle de la sphère unité. En déduire sans calculs la valeur de l'intégrale de la courbure de Gauss sur le congé.

Université Paris-Sud
DESS d'Ingéniérie Mathématique 2002/2003

Corrigé de l'examen de topologie et géométrie différentielle
27 mars 2003, durée 3 heures

I

1. On remarque que les vecteurs de noeuds sont relatifs à des courbes de Bézier. On calcule d'abord le dénominateur

$$\begin{aligned}\sum_{i,j} B_{i,2}(u)B_{i,1}(v)w_{i,j} &= (1-u)^2(1-v+v)+2u(1-u)(1-v+v)+u^2((1-v)\frac{4}{3}+v\frac{4}{3})\\ &= 1+\frac{1}{3}u^2,\end{aligned}$$

puis le vecteur au numérateur

$$\begin{aligned}\sum_{i,j} B_{i,2}(u)B_{j,1}(v)w_{i,j}P_{i,j} &= (1-u)^2((1-v)P_{0,0}+vP_{0,1})+2u(1-u)((1-v)P_{1,0}+vP_{1,1})\\ &\quad +u^2((1-v)\frac{4}{3}P_{2,0}+v\frac{4}{3}P_{2,1})\\ &= \begin{pmatrix}1-\frac{1}{3}u^2\\ \frac{2\sqrt{3}}{3}u\\ \frac{\sqrt{3}}{2}v\end{pmatrix}.\end{aligned}$$

On trouve donc

$$s(u,v)=\begin{pmatrix}\frac{1-\frac{1}{3}u^2}{1+\frac{1}{3}u^2}\\ \frac{\frac{2\sqrt{3}}{3}u}{1+\frac{1}{3}u^2}\\ \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}v}{1+\frac{1}{3}u^2}\end{pmatrix}$$

2. On constate que les lignes isoparamètres à u constant sont des segments verticaux de longueur $\frac{\sqrt{3}}{2}$, ils s'appuient sur la courbe

$$u \mapsto (\frac{1-\frac{1}{3}u^2}{1+\frac{1}{3}u^2}, \frac{\frac{2\sqrt{3}}{3}u}{1+\frac{1}{3}u^2})$$

du plan $\{z=0\}$. Celle-ci est un arc de cercle centré à l'origine. En effet,

$$(1-\frac{1}{3}u^2)^2+(\frac{2\sqrt{3}}{3}u)^2=(1+\frac{1}{3}u^2)^2$$

pour tout u. On conclut que S est contenue dans le cylindre d'axe Oz, de rayon 1 et de hauteur $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

3. L'équation du cylindre C est $y^2+z^2-3/4=0$. Par conséquent, $(u,v)\in a$ si et seulement si

$$(\frac{\frac{2\sqrt{3}}{3}u}{1+\frac{1}{3}u^2})^2+\frac{3}{4}v^2-\frac{3}{4}=0.$$

a est donc la courbe représentative de la fonction

$$u \mapsto \sqrt{1 - \frac{16u^2}{(3+u^2)^2}}$$

définie sur l'intervalle $[0,1]$. Les extrémités de a sont donc $(0,1)$ (avec une tangente horizontale) et $(1,0)$ (avec une tangente verticale). Comme $3+u^2$ est voisin de 4, a est assez voisine d'un quart de cercle, voir figure 1.

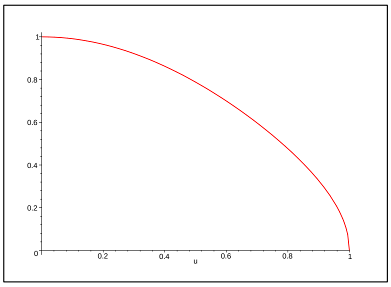

Figure 1 : Courbe plane a

4. La courbe de Bézier b de degré 3 possède 4 points de contrôle. Elle passe par les points de contrôle extrêmes, donc $P_0 = (1,0)$ et $P_3 = (0,1)$. Sa tangente en P_0, la droite P_0P_1, doit être verticale, donc P_1 est de la forme $(1,y)$ avec $y > 0$. Sa tangente en P_3, la droite P_3P_2, doit être horizontale, donc P_2 est de la forme $(x,1)$ avec $x > 0$. On calcule

$$b(t) = (1-t)^3 P_0 + 3t(1-t)^2 P_1 + 3t^2(1-t)P_2 + t^3 P_3 = \begin{pmatrix} (1+2t)(1-t)^2 + 3t^2(1-t)x \\ 3t(1-t)^2 y + (3-2t)t^2 \end{pmatrix}.$$

Par conséquent, $b(1/2) = (\sqrt{2}/2, \sqrt{17}/7)$ si et seulement si

$$\frac{1}{2} + \frac{3}{8}x = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \frac{3}{8}y + \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{17}}{7},$$

ce qui détermine uniquement x et y. On trouve $x = 4(\sqrt{2}-1)/3 \sim 0.55$ et $y = (8\sqrt{17}-28)/21 \sim 0.23$.

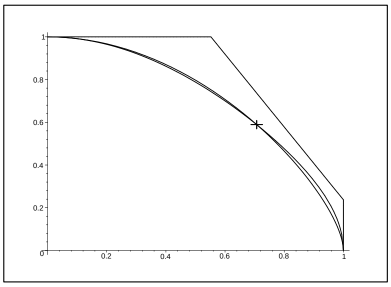

Figure 2 : La courbe a, son interpolation b et le polygone de contrôle de b

5. Comme x, $y \in]0,1[$, le polygone $P_0P_1P_2P_3$ est convexe, donc b est convexe.

II

1. La courbe c est contenue dans le plan Π d'équation $x - y = 0$. Elle s'écrit $c(u) = \sqrt{2}\cos u\, v_1 + \sin u\, v_2$ où

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix} \text{ et } v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

forment une base orthonormée de Π, donc c'est une ellipse centrée à l'origine, de grand axe $\sqrt{2}$ et de petit axe 1.

Si $P = (x, y, z)$, la projection orthogonale de P sur l'axe Ox est $(x, 0, 0)$ donc la distance de P à l'axe Ox est $\sqrt{y^2 + z^2}$. Par conséquent, la distance de $c(u)$ à l'axe Ox vaut $\sqrt{\cos^2 u + \sin^2 u} = 1$. De même, la distance d'un point P à l'axe Oy est $\sqrt{x^2 + z^2}$. Par conséquent, la distance de $c(u)$ à l'axe Oy vaut $\sqrt{\cos^2 u + \sin^2 u} = 1$.

2. Notons $p(u) = (\cos u, 0, 0)$ la projection de $c(u)$ sur l'axe Ox. Le vecteur $(0, \cos u, \sin u) = c(u) - p(u)$ est unitaire et orthogonal à la vitesse $c'(u) = (-\sin u, -\sin u, \cos u)$. Par conséquent, le point $c(u) + \epsilon(-c(u) + p(u))$ appartient à S. En ce point, la normale sortante à S est $-c(u) + p(u)$. Le point

$$c(u) + \epsilon(-c(u) + p(u)) = (\cos u, (1-\epsilon)\cos u, (1-\epsilon)\sin u)$$

est à distance $(1 - \epsilon)$ de l'axe Ox, donc il appartient à C. En ce point, la normale sortante à C est $c(u) - p(u)$. On conclut que S et C sont tangentes en $c(u) + \epsilon(-c(u) + p(u))$. Il suffit d'échanger x et y pour arriver à la conclusion concernant C'.

3. Par construction,

$$\sigma(u) = c(u) + \epsilon(-c(u) + p(u)) = (\cos u, (1-\epsilon)\cos u, (1-\epsilon)\sin u)$$

et

$$\sigma'(u) = c(u) + \epsilon(-c(u) + p'(u)) = ((1-\epsilon)\cos u, \cos u, (1-\epsilon)\sin u).$$

On constate que σ est contenue dans le plan d'équation $(1-\epsilon)x - y = 0$ et que σ' est contenue dans le plan d'équation $x - (1-\epsilon)y = 0$.

4. Les normales en question ont pour vecteurs unitaires directeurs respectivement $c(u) - p(u) = (0, \cos u, \sin u)$ et $c(u) - p'(u) = (\cos u, 0, \sin u)$. Par conséquent

$$\cos(\theta(u)) = (c(u) - p(u)) \cdot (c(u) - p'(u)) = \sin^2 u.$$

5. L'équation de C est

$$y^2 + z^2 - (1-\epsilon)^2 = 0$$

et celle de C' est

$$x^2 + z^2 - (1-\epsilon)^2 = 0$$

En soustrayant les deux équations, on obtient

$$y^2 - x^2 = 0.$$

Autrement dit, $C \cap C'$ est contenu dans la réunion des deux plans Π d'équation $x - y = 0$ et Π_1 d'équation $x + y = 0$. L'ensemble $C \cap C' \cap \Pi$ est défini par le système

$$x - y = 0, \quad y^2 + z^2 - (1 - \epsilon)^2 = 0.$$

C'est à nouveau une ellipse centrée à l'origine. Son grand axe vaut $\sqrt{2}(1-\epsilon)$, son petit axe $(1-\epsilon)$. De même, $C \cap C' \cap \Pi_1$ est une ellipse de mêmes caractéristiques. Par conséquent, $C \cap C'$ est la réunion de deux ellipses.

Pour construire le congé, on fait rouler une bille de rayon ϵ au contact des deux cylindres. On cherche donc les points situés à l'extérieur des cylindres, à distance ϵ de chacun d'entre eux. Or le lieu des points situés à distance ϵ de C (resp. C') est le cylindre de même axe que C (resp. C'), de rayon $1 - \epsilon + \epsilon = 1$. Leur intersection est la réunion de deux ellipses, c et sa symétrique c_1 par rapport à Ox. Les courbes σ et σ' (et leurs symétriques σ_1 et σ'_1) sont les *lignes de soudure*, couplées à c (resp. c_1), le long desquelles on doit relimiter des cylindres et raccorder le congé. Le congé est la réunion de 2 des composantes connexes découpées dans S par σ et σ', et de leurs symétriques par rapport à Ox.

6. Sur la figure, on a bien l'impression que le congé traverse son plan tangent. Voici une confirlation par le calcul. La normale ν à c est tournée vers l'intérieur de c. L'arc du cercle de rayon ϵ qui est contenu dans le congé est symétrique par rapport à la normale, et son angle au centre $\theta(u)$ est inférieur à $\pi/2$ puisque son cosinus est positif. Par conséquent, le congé est paramétré par

$$s(u, v) = c(u) + \epsilon \cos v \nu(u) + \epsilon \sin v b(u)$$

où $v \in [-\theta(u)/2, \theta(u)/2] \subset [-\pi/4, \pi/4]$. D'après une formule du cours, la courbure de Gauss de S en $s(u, v)$ vaut

$$\frac{-\kappa(u) \cos v}{\epsilon(1 - \epsilon\kappa(u) \cos v}.$$

Elle est négative car $\cos(v) > 0$. On conclut que S traverse son plan tangent en chaque point du congé.

7. La courbure de Gauss du congé ne s'annule jamais, alors que celle des cylindre est identiquement nulle. Une surface dont la courbure de Gauss est discontinue n'est pas de classe G^2.

8. Le long des lignes de soudure, la normale Γ au congé coïncide avec la normale au cylindre. Le long de σ, Γ se trouve donc sur l'équateur, le long de σ', elle se trouve le long des méridiens de longitudes 0 et π. Lorsqu'on parcourt l'un des 4 morceaux du congé, la normale Γ balaye l'un des 4 quartiers de sphère délimités par l'équateur et les deux méridiens. On conclut que l'aire de l'image du congé par Γ vaut 4π. Comme la courbure de Gauss est négative, on conclut que l'intégrale de la courbure de Gauss sur le congé vaut -4π.