Courbure des courbes

P. Pansu

24 février 2000

1 Motivation

Considérons les courbes planes $t \mapsto X(t) = (\cos t, \sin t)$, $t \in [0, \pi]$ et $t \mapsto Y(t) = (\frac{1-t^2}{1+t^2}, \frac{2t}{1+t^2})$, $t \leq 0$. Elles ont même valeur en 0 mais n'ont pas même dérivée. Par conséquent, le raccord en $t = 0$ est C^0 mais pas C^1. Si on remplace t par $t/2$ dans la seconde courbe, on obtient $t \mapsto Z(t) = (\frac{4-t^2}{4+t^2}, \frac{4t}{4+t^2})$, $t \leq 0$. C ette fois, le raccord de Z avec X est de classe C^1 mais pas de classe C^2. Autrement dit, pour réaliser un bon raccord, il est judicieux de changer de paramétrisation. Jusqu'où peut on aller ?

Question. Etant donnée une courbe γ (vue comme sous-ensemble du plan ou de l'espace), quelle est la meilleure régularité possible pour une paramétrisation de γ ?

C'est ce qu'on appelle la *différentiabilité géométrique* de γ. Dans l'exemple, γ est le cercle unité qui admet une paramétrisation de classe C^∞. On dit que le cercle est de classe G^∞.

Pour réaliser un raccord satisfaisant, il n'est pas naturel d'exiger la différentiabilité des paramétrisations (qui sont le résultat de choix particuliers), il suffit souvent d'atteindre la différentiabilité géométrique.

Pour les courbes planes, la différentiabilité géométrique se mesure au moyen de la *courbure*.

Théorème 1 *Une courbe plane est de classe G^k si et seulement si*

1. *sa tangente est continue ;*
2. *la courbure et ses dérivées par rapport à l'abscisse curviligne jusqu'à l'ordre $k-2$ sont continues.*

Le théorème 1 donne un critère simple pour la différentiabilité géométrique d'une courbe obtenue en raccordant deux courbes de classe C^2.

1. Pour un raccord de classe G^1, il suffit que les tangentes au point de contact soient les mêmes ;
2. Pour un raccord de classe G^2, il suffit qu'en plus les courbures au point de contact soient les mêmes.

Dans la suite du chapitre, on définit abscisse curviligne et courbure, on démontre le théorème 1 et sa généralisation en dimension supérieure. Puis on indique comment calculer efficacement la courbure et la torsion des B-splines et des NURBS.

2 Abscisse curviligne

2.1 Longueur

La longueur d'un polygone $\mathbf{P} = (P_0, P_1, \dots, P_m)$ est la somme des longueurs des côtés,

$$\operatorname{long}(\mathbf{P}) = \sum_{i=1}^{m} \| P_i - P_{i-1} \| .$$

Définition 1 *Soit I un intervalle de $\mathbf{R}$. Soit $t \mapsto X(t)$, $t \in I$, une courbe dans $\mathbf{R}^n$. Sa* longueur `(length)` *est la borne supérieure des longueurs des polygones* inscrits *dans X, i.e. de la forme $\mathbf{P} = (X(t_0), \dots, X(t_m))$ où $t_0 \leq \dots t_m \in I$.*

Si X est de classe C^1, alors

$$\mathrm{long}\,(X) = \int_I \| X'(t) \| \; dt.$$

Proposition 2 *La longueur est invariante par changement de paramétrisation.*

Preuve. Cela résulte de la définition au moyen des polygones. ∎

Invariance. La longueur est préservée par les *isométries* de $\mathbf{R}^n$, i.e. les transformations affines dont la partie linéaire est orthogonale. La longueur est diminuée par les projections orthogonales.

Exercice 3 Courbes de longueur finie *Soit $t \mapsto X(t)$, $t \in [a, b[$, une courbe dans $\mathbf{R}^n$. On suppose que la longueur de X est finie. Montrer que la limite $\lim_{t \to b} X(t)$ existe et vaut $X(a) + \int_a^b X'(t)\, dt$.*

Exercice 4 Accroissements finis *Soit $t \mapsto X(t)$, $t \in [a, b]$, une courbe dans $\mathbf{R}^n$. Soit f une fonction dont le gradient est de norme inférieure ou égale à 1 en tout point. Montrer que*

$$|f(X(b)) - f(X(a))| \leq \mathrm{long}\,(X).$$

Exercice 5 La longueur en coordonnées polaires *Soit c la courbe plane d'équation polaire $r = f(\theta)$. Paramétrer c et exprimer sa longueur en fonction de f.*

2.2 Abscisse curviligne

Définition 6 *Soit $t \mapsto X(t)$, $t \in I$ une courbe de classe C^1 dans $\mathbf{R}^n$. Soit $t_0 \in I$. L'*abscisse curviligne `(arc length)` *d'origine $X(t_0)$ sur X est la fonction de classe C^1 sur I définie par*

$$t \mapsto \int_{t_0}^{t} \| X'(t) \| \; dt.$$

Si X est injective, on peut voir l'abscisse curviligne comme une fonction sur l'image $X(I) \subset \mathbf{R}^n$. Si le vecteur vitesse X' ne s'annulle pas sur I, la fonction réciproque est une paramétrisation $s \mapsto X_1(s)$ de $X(I)$ au moins aussi régulière que la paramétrisation initiale, et qui satisfait

$$\| X_1'(s) \| = 1 \quad \text{pour tout} \quad s.$$

Exercice 7 *Calculer l'abscisse curviligne d'origine $(0, 0)$ sur la parabole $t \mapsto (t, t^2)$.*

Remarque. En général, l'abscisse curviligne d'une courbe algébrique est une fonction transcendante. Elle n'est donc qu'exceptionnellement donnée par une formule fermée.

Remarque. Sur une courbe plongée γ vue comme sous-ensemble de $\mathbf{R}^n$, étant donné une origine P, il y a exactement deux paramétrisations de γ par l'abscisse curviligne d'origine P. Elles diffèrent l'une de l'autre d'un signe. Choisir l'une des deux, c'est choisir une *orientation* de γ, voir le cours de topologie.

Autrement dit, on a construit sur une courbe plongée orientée et pointée (i.e. sur laquelle on a choisi une origine) une paramétrisation canonique. Les grandeurs géométriques (e.g. la tangente) et leurs dérivées successives par rapport à l'abscisse curviligne vont automatiquement être des *invariants* de la courbe, qui ne dépendent pas d'un choix de paramétrisation. Ils pourront être calculés au moyen d'une paramétrisation quelconque.

3 Courbure des courbes planes

3.1 Définition

Soit $s \mapsto X(s)$ une courbe plane paramétrée par son abscisse curviligne. Alors le vecteur vitesse trace une courbe $s \mapsto X(s)$ sur le cercle unité. Si X est de classe C^2, celle-ci possède un vecteur vitesse $X''(s)$, appelé *accélération*. Au signe près, la courbure est la norme de l'accélération. Le signe est bien défini, car l'accélération est orthogonale au vecteur vitesse, et on donne le signe $(+)$ (resp. $(-)$) si l'accélération pointe vers la gauche (resp. la droite) de la vitesse.

Définition 8 *Soit $s \mapsto X(s)$ une courbe plane paramétrée par son abscisse curviligne. On suppose le plan orienté. On note $\tau(s) = X'(s)$ le vecteur tangent et $\nu(s)$ le vecteur unitaire obtenu en tournant $\tau(s)$ de $+\pi/2$. Alors la* courbure (`curvature`) *de X au point $X(s)$ est par définition*

$$\kappa(X(s)) = \det(X'(x), X''(s)) = X''(s) \cdot \nu(s).$$

En particulier, $\| X'' \| = |\kappa|$.

La courbure est vue comme une fonction définie le long de la courbe. Bien que définie au moyen de l'abscisse curviligne, la courbure ne dépend pas d'un choix de paramétrisation, seulement de l'orientation de la courbe.

Bien que l'abscisse curviligne ne soit pas calculable, il y a une formule qui donne la courbure en fonction d'une paramétrisation quelconque. Il en va de même des dérivées de la courbure.

Proposition 9 *Soit $t \mapsto X(t)$ une courbe plane paramétrée. Sa courbure au point $X(t)$ vaut*

$$\kappa = \det(\frac{dX}{dt}, \frac{d^2X}{dt^2})(\| \frac{dX}{dt} \|)^{-3}.$$

et la dérivée de la courbure par rapport à l'abscisse curviligne est donnée par

$$\frac{\partial \kappa}{\partial s} = \| \frac{dX}{dt} \|^{-4} (\det(\frac{dX}{dt}, \frac{d^3X}{dt^3}) - 3\kappa \| \frac{dX}{dt} \| \frac{dX}{dt} \cdot \frac{d^2X}{dt^2}).$$

Preuve.

On utilisera plusieurs fois l'identité $\frac{ds}{dt} = \| \frac{dX}{dt} \|$. On dérive

$$\frac{dX}{dt} = \| \frac{dX}{dt} \| \frac{dX}{ds}$$

en

$$\frac{d^2X}{dt^2} = \frac{d}{dt}(\| \frac{dX}{dt} \|)\frac{dX}{ds} + \| \frac{dX}{dt} \| \frac{d}{dt}(\frac{dX}{ds}) = \frac{d}{dt}(\| \frac{dX}{dt} \|)\frac{dX}{ds} + \| \frac{dX}{dt} \|^2 \frac{d^2X}{ds^2}$$

d'où

$$\det(\frac{dX}{dt}, \frac{d^2X}{dt^2}) = \| \frac{dX}{dt} \|^2 \det(\frac{dX}{dt}, \frac{d^2X}{ds^2}) = \| \frac{dX}{dt} \|^3 \det(\frac{dX}{ds}, \frac{d^2X}{ds^2}) = \| \frac{dX}{dt} \|^3 \kappa.$$

On dérive encore une fois.

$$\det(\frac{dX}{dt}, \frac{d^3X}{dt^3}) = \frac{d}{dt}(\| \frac{dX}{dt} \|^3 \kappa) = \frac{3}{2}\kappa \frac{d}{dt}(\| \frac{dX}{dt} \|^2) \| \frac{dX}{dt} \| + \| \frac{dX}{dt} \|^3 \frac{d\kappa}{dt}.$$

Or

$$\frac{d}{dt}(\| \frac{dX}{dt} \|^2) = 2\frac{dX}{dt} \cdot \frac{d^2X}{dt^2}$$

donc

$$\det(\frac{dX}{dt}, \frac{d^3X}{dt^3}) \quad = \quad \| \frac{dX}{dt} \|^4 \frac{d\kappa}{ds} + 3\kappa \| \frac{dX}{dt} \| \frac{dX}{dt} \cdot \frac{d^2X}{dt^2}.$$

Signe de la courbure. Si on change le sens de parcours, la courbure change de signe. Le signe de la courbure dépend aussi de l'orientation du plan. Par conséquent, une isométrie du plan préservant l'orientation (e.g. une translation ou une rotation) préserve la courbure des courbes, une isométrie du plan renversant l'orientation (e.g. une symétrie par rapport à une droite) change la courbure des courbes de signe.

Exemple. La courbure d'un cercle de rayon R est constante. Elle vaut $1/R$ si le cercle est parcouru dans le sens trigonométrique, $-1/R$ sinon.

Exemple. Au point $(0,0)$, la courbure de la parabole d'équation $y = x^2$, parcourue dans le sens des x croissants, vaut 2.

Exercice 10 *Soit $t \mapsto (t, f(t))$ le graphe d'une fonction réelle d'une variable réelle. Calculer sa courbure. Dans quelles conditions la dérivée seconde de f donne-t-elle une bonne approximation de la courbure ?*

Exercice 11 *Soit c la courbe plane définie par l'équation polaire $r = f(\theta)$. On introduit le repère tournant*

$$e_r(r,\theta) = (\cos(\theta), \sin(\theta)), \quad e_\theta(r,\theta) = (-\sin(\theta), \cos(\theta)).$$

Paramétrer la courbe c. Au moyen de ce repère, exprimer la tangente à la courbe c. Calculer la courbure.

3.2 Une courbe est déterminée par sa courbure

Théorème 2 *Soit κ une fonction continue sur un intervalle I. Soit $t_0 \in I$, soit P un point du plan et v un vecteur unitaire. Il existe une et une seule courbe X de classe C^2, paramétrée par son abscisse curviligne, telle que*

- *la courbure de X en $X(s)$ est $\kappa(s)$;*
- *$X(t_0) = P$ et $X'(t_0) = v$.*

Preuve.
Notons $\phi(s)$ l'angle que fait v avec le vecteur vitesse. Si on identifie le plan euclidien orienté avec les nombres complexes, cela s'écrit

$$X'(s) = \exp(i\phi(s))v.$$

En dérivant, on trouve que

$$X''(s) = i\phi'(s)X'(s)$$

d'où

$$\kappa(s) = \phi'(s).$$

La condition initiale $\phi(t_0) = 0$ force que $\phi(s) = \int_{t_0}^{s} \kappa(u)\, du$ et la condition initiale $X(t_0) = P$ donne

$$X(s) = P + (\int_{t_0}^{s} \exp(i\phi(s))\, ds)v.$$

Réciproquement, cette formule définit une courbe de classe C^2 de courbure κ issue de P et de vitesse initiale v. ∎

Remarque. On a utilisé l'existence d'une détermination différentiable de l'argument.

Exercice 12 *Montrer qu'une courbe plane a une courbure constante si et seulement si c'est une droite ou un cercle.*

3.3 Déviation par rapport à la tangente

Lemme 13 *Soit $s \mapsto X(s)$ une courbe de classe C^2 paramétrée par son abscisse curviligne. La distance algébrique δ de la courbe à sa tangente satisfait*

$$\delta(s) =: \det(X(s) - X(0), X'(0)) = \frac{1}{2}\kappa(0)s^2 + o(s^2).$$

Si pour tout s, $|\kappa(s)| \leq K$, alors pour tout s,

$$|\delta(s)| \leq \frac{1}{2}Ks^2.$$

Preuve. Le développement limité de Taylor-Young donne

$$X(s) = X(0) + sX'(0) + \frac{1}{2}\kappa(0)JX'(0) + o(s^2)$$

où J est la rotation de $+\pi/2$. La formule de Taylor avec reste intégral donne

$$X(s) = X(0) + sX'(0) + \int_0^s (1-u)X''(u)\, du$$

et $\| X'' \| \leq \kappa$. ∎

3.4 Rayon de courbure

Lemme 14 *Soit γ une courbe orientée de classe C^2, P un point de γ, soient τ le vecteur tangent unitaire et ν la normale orientée en P (de sorte que la base orthonormée (τ, ν) soit directe. Pour r réel, notons $C(r)$ le cercle de rayon $|r|$ et de centre $P + r\nu$. Il est tangent à γ en P.*

Le cercle $C(r)$ a un contact d'ordre 2 avec la courbe γ en P si et seulement si $r = \kappa(P)^{-1}$. Si $r \neq \kappa(P)^{-1}$, $C(r)$ est d'un seul côté de la courbe au voisinage de P.

Si $\kappa(P) = 0$, on dit que la courbe γ admet en P un point d'inflexion. *Dans ce cas, elle a un contact d'ordre 2 avec sa tangente.*

Si $\kappa(P) \neq 0$, le cercle $C(\kappa(P)^{-1})$ s'appelle le cercle osculateur `(osculating circle)` *en P et $\kappa(P)^{-1}$ le* rayon de courbure `(radius of curvature)` *en P.*

Preuve. Soit $s \mapsto X(s)$ la paramétrisation de γ par l'abscisse curviligne d'origine P, de sorte que $X'(0) = \tau$. On calcule un développement limité du carré de la distance de $X(s)$ au centre $P + r\nu$ du cercle $C(r)$. Comme

$$X(s) = X(0) + s\tau + \frac{1}{2}\kappa(P)s^2 + o(s^2),$$

$$\begin{aligned}
\| X(s) - P - r\nu \|^2 &= \| s\tau + (-r + \frac{1}{2}s^2\kappa(P))\nu \|^2 + o(s^2) \\
&= s^2 + (-r + \frac{1}{2}s^2\kappa(P))^2 + o(s^2) \\
&= r^2 + (1 - r\kappa(P))s^2 + o(s^2).
\end{aligned}$$

Par conséquent, si $\kappa(P) \neq 1/r$, $\| X(s) - P - r\nu \|^2 - r^2$ a un signe constant au voisinage de 0, donc $C(r)$ est d'un seul côté de γ au voisinage de P.

Si $\kappa(P) \neq 1/r$, la paramétrisation annule l'équation du cercle à l'ordre 2, donc courbe et cercle ont un contact d'ordre 3. ∎

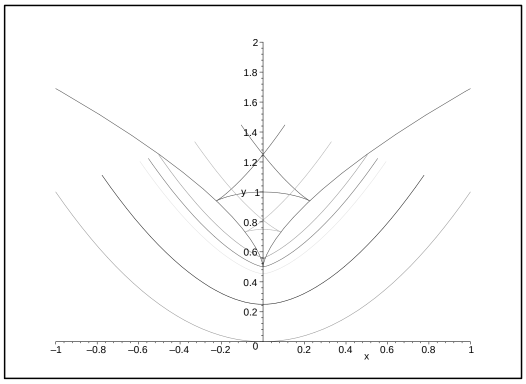
4 Rayon d'injectivité normal

4.1 Courbes équidistantes

Définition 15 *Soit $t \mapsto X(t)$ une courbe de classe C^1. Notons $\tau(t)$ son vecteur unitaire tangent et $\nu(t) = J\tau(t)$ son vecteur unitaire normal. Fixons un réel ϵ. La* courbe équidistante `(offset curve)` *X_ϵ est donnée par*

$$t \mapsto X_\epsilon(t) = X(t) + \epsilon\nu(t).$$

Exemple. Courbes parallèles à une parabole



La courbe en V est la *développée* de la parabole, i.e. le lieu des centres des cercles osculateurs. Remarquer que les courbes parallèles sont lisses tant qu'elles ne rencontrent pas la développée.

Exercice 16 *Vérifier que si $s \mapsto X(s)$, $s \in I$ est de classe C^2 et paramétrée par son abscisse curviligne, alors*

$$X'_\epsilon(s) = (1 - \epsilon\kappa(s))\tau(s).$$

On suppose la courbure bornée. En déduire que

$$\frac{\partial}{\partial\epsilon}\mathrm{long}\,(X_\epsilon)_{|\epsilon=0} = -\int_I \kappa(s)\,ds.$$

4.2 Coordonnées de Fermi

Proposition 17 *Soit $s \mapsto X(s)$, $s \in [a, b]$ une courbe de classe C^2 et paramétrée par son abscisse curviligne. On note $K = \sup|\kappa|$. Si $\epsilon < K$, alors l'application*

$$(s, r) \mapsto \Phi(s, r) = X(s) + r\nu(s), \quad]a, b[\times] - \epsilon, \epsilon[\to \mathbf{R}^2$$

est un difféomorphisme local.

On suppose de plus que X est injective. Soit $[c, d] \subset]a, b[$ un intervalle fermé et borné. Il existe un nombre $\epsilon_0 > 0$ tel que Φ soit un difféomorphisme de $]a, b[\times] - \epsilon, \epsilon[$ sur un ouvert de $\mathbf{R}^2$. Le meilleur ϵ_0 s'appelle le rayon d'injectivité normal *de la courbe X, et le difféomorphisme Φ^{-1} s'appelle les* coordonnées de Fermi.

Preuve. Comme les dérivées partielles

$$\frac{\partial\Phi}{\partial r} = \nu \quad \text{et} \quad \frac{\partial\Phi}{\partial s} = (1 - t\kappa)\tau$$

sont linéairement indépendantes, la différentielle de Φ est un isomorphisme tant que $t\kappa(s)$ reste < 1. D'après le théorème d'inversion locale, Φ est injective au voisinage de chaque point. Notons $Y = [c, d] \times [-\epsilon, \epsilon]$, et considérons, dans le produit $Y \times Y$, le sous-ensemble Z formé des couples de points ayant la même image par Φ. C'est un compact qui contient la diagonale $\Delta = \{((s,r),(s,r))\ ;\ (s,r) \in Y\}$.

Montrons par l'absurde que $Z \setminus \Delta$ est fermé. Soit $((s_j,r_j),(s'_j,r'_j))$ une suite dans $Z \setminus \Delta$. Supposons qu'elle converge vers un point de (s,r) de Δ. Comme Φ est injectif au voisinage de (s,r), nécessairement $(s_j,r_j) = (s'_j,r'_j)$ pour j assez grand, contradiction.

La famille d'ouverts $U_{\epsilon'} = [c,d] \times]\epsilon', \epsilon'[\subset Y$ est croissante. Comme X est injective,

$$(Z \setminus \Delta) \cap \bigcap_{\epsilon' \in]0,\epsilon[} U_{\epsilon'} \times U_{\epsilon'} = \emptyset.$$

Il existe par compacité de $Z \setminus \Delta$ un $\epsilon' > 0$ tel que $(Z \setminus \Delta) \cap U_{\epsilon'} \times U_{\epsilon'} = \emptyset$. Autrement dit, Φ est injectif sur $U_{\epsilon'}$. ∎

Interprétation. Soit γ une courbe plane et P un point du plan. Si P est assez proche de γ, on peut écrire $P = \Phi(s,r)$ et (s,r) sont les coordonnées de Fermi de P. On a envie d'appeler *projection* de P sur γ le point de γ le plus proche de P. Alors s est l'abscisse curviligne de cette projection. Quant à r, c'est la *distance algébrique* à la courbe, i.e. $r = \pm dist(P,\gamma)$ avec $\pm = +1$ si P est à gauche de la courbe γ, et $\pm = -1$ si P est à droite de γ.

Corollaire 18 *Soit γ une courbe plane de classe C^k. Sur leur domaine de définition, les coordonnées de Fermi s et r sont de classe C^{k-1}. Leur gradient est donné par les formules suivantes.*

$$\nabla_P r = \nu(s) \quad et \quad \nabla_P s = \frac{1}{1 - r\kappa(s)}\tau(s)$$

où τ et ν désignent le vecteur tangent unitaire et le vecteur normal unitaire à γ au point $X(s)$, projection de P sur γ.

Preuve. Notons ϵ_0 le rayon d'injectivité normal. Montrons que si $P = \Phi(s,t)$, $|r| < \epsilon_0$, alors le point de la courbe le plus proche de P est $X(s)$. En effet, par compacité, le minimum δ de la distance de P à un point de la courbe est atteint en un point $X(s')$. Le segment $[X(s'),P]$ est nécessairement orthogonal à la courbe en $X(s')$. Par conséquent, il s'écrit $u \mapsto X(s') + u\nu(s')$ ou $u \mapsto X(s') - u\nu(s')$ pour $u \in [0,\delta]$. Comme $\| P - X(s) \| = |r| \geq \delta$, $\delta < \epsilon_0$, donc $\Phi(s',\delta) = P$. Comme Φ est injectif, $s = s'$ et $\delta = |t|$. On conclut que

$$dist(\Phi(s,t),\gamma) = |r|$$

donc la fonction distance algébrique $P \mapsto r = \pm dist(P,\gamma)$ et la projection $P \mapsto X(s)$ sont aussi régulières que Φ, soit de classe C^{k-1}.

Par définition, $r(\Phi(s,t)) = t$. En dérivant par rapport à s puis par rapport à t, on trouve que si $P = \Phi(s,t)$,

$$\nabla_P r \cdot (1 - r\kappa(s))\tau(s) = 0, \quad \nabla_P r \cdot \nu(s) = 1$$

et donc $\nabla_P r = \nu(s)$, où $Q = X(s)$ est la projection de P sur γ. De même,

$$\nabla_P s \cdot (1 - r\kappa(s))\tau(s) = 1, \quad \nabla_P r \cdot \nu(s) = 0$$

donc $\nabla_P s = \frac{1}{1-r\kappa(s)}\tau(s)$. ∎

Exercice 19 *Soit γ une courbe plane fermée de classe C^2, de rayon d'injectivité normal i. Soit $\epsilon < i$. Montrer qu'on peut faire glisser deux disques de rayon ϵ le long de γ, un de chaque côté.*

Remarque. Une borne sur la courbure seule ne suffit pas à contrôler le rayon d'injectivité normal. Néanmoins, on peut estimer le rayon d'injectivité normal au moyen de la courbure si l'arc est suffisamment court.

Exemple. En mettant bout à bout des arcs de cercles de rayon 1, on peut aisément réaliser une courbe de classe C^1 et sans points doubles, en forme de haricot, qui passe deux fois à proximité du même point, puis la rendre de classe C^2 sans altérer ces propriétés. Le rayon d'injectivité normal peut être rendu arbitrairement petit en gardant la courbure inférieure à 1 en valeur absolue.

Proposition 20 *Soit γ une courbe de longueur L. Soit $K = sup|\kappa|$ la borne supérieure de la courbure de γ. Si $L < \dfrac{1}{K}$, alors le rayon d'injectivité normal de γ est au moins égal à $\frac{1}{K} - L$.*

Preuve. Soit $s \mapsto X(s)$, $s \in [0, L]$ une paramétrisation par l'abscisse curviligne de γ. Soit i le rayon d'injectivité. Par définition, il existe deux points distincts (s_1, r_1) et $(s_2, r_2) \in [0, L] \times [-i, i]$ tels que $\Phi(s_1, r_1) = \Phi(s_2, r_2)$. On note P ce point. Remarquer que $s_1 \neq s_2$. Alors la fonction $s \mapsto f(s) = \| X(s) - P \|^2$ a une dérivée nulle en s_1 et en s_2. D'après le théorème de Rolle, sa dérivée seconde s'annule en un point $s \in]0, L[$. Or

$$f'(s) = 2X'(s) \cdot (X(s) - P),$$

$$f''(s) = 2X''(s) \cdot (X(s) - P) + 2X'(s) \cdot X'(s) = 2\kappa(s)X'(s) \cdot (X(s) - P) + 2.$$

Par conséquent

$$1 = -\kappa(s)X'(s) \cdot (X(s) - P) \leq K(L + i).$$

Comme $L < \dfrac{1}{K}$, il vient $\delta > \dfrac{1}{K} - L$. ∎

4.3 Congés

Il s'agit d'arrondir les angles. Autrement dit, étant donné une courbe de classe C^2 par morceaux, de modifier la courbe au voisinage des sommets, pour la rendre de classe C^1 et à courbure bornée. Un moyen classique consiste à insérer un arc de cercle.

Théorème 3 *Soient γ_1 et γ_2 deux courbes planes de classe C^2, de même longueur L. On suppose qu'elles se coupent transversalement en leur milieu P et qu'elle y font un angle $\alpha \in]0, \pi[$. Soit K un majorant de la courbure de γ_1 et de γ_2. On suppose que $L < \dfrac{\sin\alpha}{2K}$. Si $\epsilon < \dfrac{1}{4}L\sin\alpha$, il existe dans chacun des 4 secteurs délimités par γ_1 et γ_2 un unique cercle de rayon ϵ tangent à la fois à γ_1 et à γ_2.*

Preuve. Soit $s_i \mapsto X_i(s_i)$ la paramétrisation par l'abscisse curviligne d'origine P de γ_i, $\tau_i(s_i)$ le vecteur tangent et $\nu_i(s_i)$ le vecteur unitaire normal.

Montrons que pour $s_1 \in [-L/2, L/2]$, $s_2 \in [-L/2, L/2]$, $\nu_1(s_1) \cdot \tau_2(s_2) > \sin\alpha - KL > 0$. Comme $\nu_1' = -\kappa_1\tau_1$,

$$|\frac{\partial}{\partial s_1}\nu_1 \cdot \tau_2| \leq K$$

donc $|\nu_1(s_1) \cdot \tau_2(0) - \nu_1(0) \cdot \tau_2(0)| \leq KL/2$. De même, $|\nu_1(s_1) \cdot \tau_2(s_2) - \nu_1(s_1) \cdot \tau_2(0)| \leq KL/2$, donc $|\nu_1(s_1) \cdot \tau_2(s_2) - \nu_1(0) \cdot \tau_2(0)| \leq KL$. Or $\nu_1(0) \cdot \tau_2(0) = \sin\alpha$ par hypothèse, donc

$$\nu_1(s_1) \cdot \tau_2(s_2) > \sin\alpha - KL > \frac{1}{2}\sin\alpha.$$

D'après la proposition 20, le rayon d'injectivité normal de γ_1 ou γ_2 est au moins égal à $\frac{1}{2K}$ donc supérieur à L. Cela signifie que $\Phi_i : (s, r) \mapsto X(s) + r\nu_i(s)$ est un difféomorphisme de $] - L/2, L/2[\times] - L, L[$ sur un ouvert U_i du plan. En particulier, les coordonnées de Fermi r_i (distance algébrique à γ_i) et s_i (abscisse de la projection sur γ_i) sont de classe C^1 sur $U_1 \cap U_2$.

Fixons $\epsilon < \frac{1}{12}L\sin\alpha$. Soit

$$U = \{Q \in U_1 \cap U_2 \ ; \ |r_1(Q)| < \epsilon, \ |r_2(Q)| < \epsilon\}.$$

On pose $F = (r_1, r_2) : U \to \mathbf{R}^2$. Alors F est un difféomorphisme local. En effet, le gradient de r_1 (resp. r_2 au point Q est un vecteur de la forme $\nu_1(s_1)$ (resp. $\nu_2(s_2)$). Comme le produit scalaire $\nu_1(s_1) \cdot \tau_2(s_2)$ est non nul, les gradients ne sont pas colinéaires. Les formes linéaires dr_1 et dr_2 étant linéairement indépendantes, la différentielle dF est un isomorphisme.

Pour tout $u \in]-\epsilon,\epsilon[$, l'ensemble de niveau $\{r_1 = u\}$ est contenu dans l'image de la courbe équidistante $s_1 \mapsto X_{1,u}(s_1)$, $s_1 \in [-L/2, L/2]$. Le long de cette courbe, la fonction r_2 est strictement croissante. En effet

$$\frac{\partial}{\partial s_1} r_2(X_{1,u}(s_1)) = \nabla r_2 \cdot (1 - u\kappa_1(s_1))\tau_1(s_1) = (1 - u\kappa_1(s_1))(\nu(s_2) \cdot \tau_1(s_1) > 0.$$

Si Q et Q' sont des points de U tels que $F(Q) = F(Q')$, alors $r_1(Q) = r_1(Q')$, donc Q et Q' sont sur la même courbe équidistante, $Q = X_{1,u}(s)$ et $Q = X_{1,u}(s')$ où $u = r_1(Q)$. Comme $r_2(Q) = r_2(Q')$, nécessairement $Q = Q'$.

Montrons que F est surjective de U sur $]-\epsilon,\epsilon[\times]-\epsilon,\epsilon[$.

On montre d'abord que l'image de F contient $\{0\}\times]-\epsilon,\epsilon[$. Cela revient à examiner les valeurs de la fonction r_2 le long de $\gamma_1 \cap (U_1 \cap U_2) = \gamma_1 \cap U_2$. Pour $s \in]-L/2, L/2[$ tel que $X_1(s) \in U_2$, on pose

$$f(s) = r_2(X_1(s)) \quad \text{et} \quad g(s) = s_2(X_1(s)).$$

Alors $f'(s) = \nu_2(g(s)) \cdot \tau_1(s)$ donc

$$f'(s) \geq \frac{1}{2} \sin\alpha$$

tant que $X_1(s) \in U_2$. De même

$$g'(s) = \nabla_{X_1(s)} s_2 \cdot \tau_1(s) = \frac{1}{1 - f(s)\kappa_2(s)} \tau_2(g(s)) \cdot \tau_1(s)$$

donc $|g'(s)| \leq \dfrac{1}{1-(KL/2)} \leq 2$. Soit s_m la borne supérieure des $s \leq L/2$ tels que $X_1([0,s]) \subset U_2$. Il vient, pour tout $s \leq s_0$,

$$f(s) \geq \frac{1}{2} \sin(\alpha)s \quad \text{et} \quad |g(s)| \leq 2s.$$

Supposons $2s_m < L/2$. L'inégalité $|g(s_m)| \leq 2s_m$ entraîne que $X_1(s_m) \in U_2$. Or l'ensemble des s tels que $X_1(s) \in U_2$ est un ouvert, cela contredit le choix de s_m. On conclut que $s_m \geq L/4$ et donc que

$$f(s_m) \geq \frac{1}{8} L \sin(\alpha) > \epsilon.$$

Ceci montre que la fonction r_2 prend toute valeur comprise entre 0 et ϵ le long de $\gamma_1 \cap U_2$, i.e. que l'image $F(U)$ contient $\{0\} \times [0,\epsilon[$. Quitte à changer l'orientation de γ_1, on montre que $F(U)$ contient $\{0\}\times]-\epsilon, 0[$.

Fixons $u \in]-\epsilon,\epsilon[$. On sait qu'il existe un point $X_1(s_1)$ de $\gamma_1 \cap U_2$ tel que $r_2(s_1) = u$. On reprend les estimations du paragraphe précédent en remplaçant r_2 par r_1 et X_1 par la courbe équidistante $X_{2,u} : s \mapsto X_2(s) + u\nu_2(s)$. En gardant les mêmes notations, les estimations obtenues sont cette fois

$$f' \geq (1 - \epsilon K)(\sin\alpha - KL) \geq \frac{1}{3} \sin\alpha \quad \text{et} \quad |g'| \leq \frac{1 + \epsilon K}{1 - \epsilon K} \leq 2$$

car $\epsilon K \leq \frac{1}{3}$. De nouveau, on trouve un nombre $s_m \geq L/4$ tel que $X_{2,u}([0, s_m]) \subset U_1 \cap U_2$ et $r_1(X_{2,u}(s_m)) > \epsilon$. Comme r_2 est constant le long de la courbe $X_{2,u}$, ceci montre que $F(U)$ contient $[0,\epsilon[\times\{u\}$. Quitte à changer l'orientation de γ_2, on montre que $F(U)$ contient $]-\epsilon, 0[\times\{u\}$.

On conclut que F est un difféomorphisme de U sur $]-\epsilon,\epsilon[^2$. Pour tout $0 < u < \epsilon$, les quatre points $F^{-1}(u,u)$, $F^{-1}(-u,u)$, $F^{-1}(u,-u)$, $F^{-1}(-u,-u)$ sont exactement à distance u de γ_1 et de γ_2, donc les disques de rayon u centrés en ces points sont tangents à γ_1 et à γ_2 sans empiéter dessus. Réciproquement, si un disque de rayon $u < \epsilon$ touche γ_1 et γ_2, son centre P est dans le domaine des coordonnées de Fermi de γ_1 et de γ_2 et satisfait $|r_1(P)| = |r_2(P)| = u$, donc $F(P)$ est l'un des quatre points $(\pm u, \pm u)$. Comme F est bijective, P est l'un des quatre points décrits plus haut. ∎

5 Convexité

Définition 21 *Une courbe plane γ est dite* localement convexe (`locally convex`) *si pour tout $P \in \gamma$, il existe r et un convexe $C \subset B(x,r)$ tel que*

$$\partial_{B(x,r)} C = \gamma \cap B(x,r).$$

Exemple. Le bord d'un convexe C d'intérieur non vide est une courbe continue. En effet, si P est un point intérieur de C, l'application $Q \mapsto Q - P / \parallel Q - P \parallel$ est un homéomorphisme de ∂C sur le cercle unité.

Par définition, ∂C est localement convexe.

Remarque. Une courbe plane fermée localement convexe sans points doubles borde un convexe. On démontrera plus loin une généralisation de ce résultat en toute dimension.

Exemple. La spirale $t \mapsto \exp(-t+it)$ (notation complexe) est localement convexe, mais ne borde pas un convexe.

Proposition 22 *Une courbe plane de classe C^2 est localement convexe en tout point si et seulement si sa courbure garde un signe constant.*

Preuve. On montre un peu plus : le côté convexe est à gauche si la courbure est positive ou nulle, à droite sinon.

Première étape. Au voisinage de $P = X(0)$, dans le repère $(P, \tau(0), \nu(0))$ où $\tau(0)$ est le vecteur unitaire tangent et $\nu(0)$ le vecteur unitaire normal en P, la courbe γ est définie par une équation $y = f(x)$ où f est de classe C^2. Notons $\phi(s)$ l'angle entre $\tau(0)$ et $\tau(s)$. Si $X(s) = (x(s), y(s))$, alors $f'(x(s)) = \tan(\phi(s))$ donc la dérivée f' est croissante si et seulement si ϕ est croissante. On conclut que f est convexe si et seulement si la courbure $\kappa(s) = \phi'(s)$ est positive ou nulle.

Deuxième étape. Soit f une fonction réelle définie sur un voisinage de 0 dans $\mathbf{R}$, telle que $f(0) = 0$. Soit $\gamma \subset \mathbf{R}^2$ son graphe. Soit C un ouvert du plan dont le bord, au voisinage de $P = (0,0)$, coïncide avec γ. Alors au voisinage de P, C coïncide avec l'un des deux ensembles $C_+ = \{y > f(x)\}$ ou $C_- = \{y < f(x)\}$. Cela résulte de la connexité de $C_\pm$.

Troisième étape. Soit f une fonction réelle définie sur un intervalle I. L'ensemble $\{(x,y) \in I \times \mathbf{R} \; ; \; y > f(x)\}$ est convexe si et seulement si la fonction f est convexe. ∎

Exercice 23 *Soit $s \mapsto X(s)$, $t \in \mathbf{R}/L\mathbf{Z}$, une courbe plane* **fermée** *de classe C^3, paramétrée par son abscisse curviligne. Montrer qu'il existe un entier $w \in \mathbf{Z}$ tel que*

$$\int_0^1 \kappa(s)\, ds = 2\pi w.$$

Ce nombre s'appelle nombre d'enroulement (`winding number`) *de la courbe.*

Donner pour chaque entier $m \in \mathbf{Z}$ un exemple de courbe de nombre d'enroulement égal à m.

Montrer que si la courbe $X(\mathbf{R}/L\mathbf{Z})$ est strictement convexe (i.e. elle ne contiient pas de segment de droite et c'est le bord d'un convexe), alors $w = \pm 1$.

5.1 Courbure des courbes B-splines

On utilise des notations du chapitre sur les B-splines.

Proposition 24 *Soit γ la courbe B-spline de degré $k \geq 2$ associée à un vecteur de noeud $\mathbf{t}$ tel que $t_0 = \cdots = t_k < t_{k+1}$ et à un polygone de contrôle plan $\mathbf{P}$ tel que $P_0 \neq P_1$. Notons c la longueur du côté P_0P_1 et A l'aire algébrique du triangle de sommets P_0, P_1 et P_2. Alors la courbe γ a pour origine P_0. Sa tangente en ce point est la demi-droite P_0P_1 et sa courbure en ce point est*

$$\kappa = \frac{k-1}{k} \frac{t_{k+1} - t_k}{t_{k+2} - t_k} \frac{2A}{c^3}.$$

Remarque. Les résultats (mais pas toujours les preuves) énoncés pour des courbes de classe C^2 s'étendent aux courbes de classe C^1 mais seulement C^2 par morceaux. Cela s'applique notamment aux B-splines de degré 2.

6 Repère de Frenet

Passons aux courbes gauches.

Définition 25 *Soit $s \mapsto X(s)$ une courbe dans l'espace $\mathbf{R}^3$ orienté, paramétrée par son abscisse curviligne. On note toujours $\tau(s) = X'(s)$ le vecteur unitaire tangent. La* tangente *à la courbe en $X(s)$ est la droite passant par $X(s)$ et dirigée par $\tau(s)$.*

Le nombre $\kappa(s) = \| X''(s) \|$ s'appelle la courbure `(curvature)` *de la courbe.*

On dit que $X(s)$ est un point d'inflexion `(inflexion point)` *de la courbe si $X''(s) = 0$. Dans ce cas, la courbe admet en $X(s)$ un contact d'ordre 2 avec sa tangente. Sinon, on appelle* normale unitaire orientée *le vecteur*

$$\nu(s) = \frac{X''(s)}{\| X''(s) \|}.$$

et on appelle binormale *le vecteur unitaire $b(s)$ tel que (τ, ν, b) soit une base orthonormée directe. Autrement dit, $b = \tau \wedge \nu$. Le repère mobile $s \mapsto (X(s), \tau(s), \nu(s), b(s))$ s'appelle le* repère de Frenet `(Frenet frame)` *de la courbe.*

Dépendance par rapport aux orientations. La coubure d'une courbe gauche est positive ou nulle par définition. Par conséquent, elle ne dépend ni de l'orientation de la courbe, ni de celle de l'espace. Il en est de même du vecteur unitaire normal orienté ν. La binormale ne dépend pas de l'orientation de la courbe. En revanche, la binormale change de signe lorsqu'on change l'orientation de l'espace ambiant.

Remarque. Une courbe gauche est une droite si et seulement si sa courbure est nulle.

Remarque. Le vecteur unitaire tangent trace une courbe $s \mapsto \tau(s)$ sur la sphère unité appelée *hodographe*. La courbure est la vitesse de parcours de l'hodographe.

Proposition 26 *Soit γ une courbe dans l'espace.*

Soit P un point d'inflexion de γ. Alors un plan admet un contact d'ordre 2 avec γ en P si et seulement si il contient la tangente en P.

Supposons que P n'est pas un point d'inflexion de γ. Soit (τ, ν, b) le repère de Frenet en P. Un et un seul plan admet un contact d'ordre 2 avec la courbe en P, c'est le plan osculateur *engendré par τ et ν.*

Preuve. Soit π un plan affine passant par P. Soit u un vecteur unitaire orthogonal à P. Alors $\{u \cdot (x - P) = 0\}$ est une équation non dégénérée de π. Soit s une abscisse curviligne d'origine P. Du développement limité de Taylor-Young

$$X(s) = P + s\tau + \frac{1}{2}s^2\kappa\nu + o(s^2),$$

on tire

$$u \cdot (X(s) - P) = su \cdot \tau + \frac{1}{2}s^2\kappa u \cdot \nu + o(s^2).$$

La plan π a un contact d'ordre 1 avec la courbe si et seulement si $u \cdot \tau = 0$, i.e. si π contient la tangente. Si P est un point d'inflexion, $\kappa = 0$ et tous les plans contenant la tangente ont un contact d'ordre 2. Sinon, seul le plan tel que $u \cdot \tau = u \cdot \nu = 0$, i.e. le plan dirigé par τ et ν, a un contact d'ordre 2. ∎

Remarque. Soit γ une courbe de classe C^3 et P un point de γ qui n'est pas un point d'inflexion. Alors il existe exactement un cercle qui a un contact d'ordre 2 avec γ en P, c'est le cercle de rayon $\kappa(s)^{-1}$ centré au point $X(s)+\kappa(s)^{-1}\nu(s)$.

Proposition 27 *Soit $t \mapsto X(t)$ une courbe dans l'espace munie d'un paramètre quelconque, mais dont la vitesse ne s'annule pas. Sa courbure est donnée par la formule*

$$\kappa = \frac{\| \frac{dX}{dt} \wedge \frac{d^2X}{dt^2} \|}{\| \frac{dX}{dt} \|^3}.$$

Si la courbure est non nulle, le plan osculateur est dirigé par $X'(t)$ et $X''(t)$.

Preuve. On rappelle que $\frac{ds}{dt} = \| \frac{dX}{dt} \|$. On dérive

$$\frac{dX}{dt} = \| \frac{dX}{dt} \| \frac{dX}{ds}$$

en

$$\frac{d^2X}{dt^2} = \frac{d}{dt}(\| \frac{dX}{dt} \|)\frac{dX}{ds} + \| \frac{dX}{dt} \| \frac{d}{dt}(\frac{dX}{ds}) = \frac{d}{dt}(\| \frac{dX}{dt} \|)\frac{dX}{ds} + \| \frac{dX}{dt} \|^2 \frac{d^2X}{ds^2}$$

d'où

$$\frac{dX}{dt} \wedge \frac{d^2X}{dt^2} = \| \frac{dX}{dt} \|^2 \frac{dX}{dt} \wedge \frac{d^2X}{ds^2} = \| \frac{dX}{dt} \|^3 \frac{dX}{ds} \wedge \frac{d^2X}{ds^2}$$

et

$$\| \frac{dX}{dt} \wedge \frac{d^2X}{dt^2} \| = \| \frac{dX}{dt} \|^3 \kappa.$$

En particulier, si $\kappa \neq 0$, $\frac{dX}{dt}$ et $\frac{d^2X}{dt^2}$ ne sont pas colinéaires. De plus, comme $\frac{d^2X}{dt^2}$ est une combinaison de $\frac{dX}{ds}$ et de $\frac{d^2X}{ds^2}$, il engendre avec $\frac{dX}{dt}$ le plan osculateur. ∎

6.1 Torsion

Définition 28 *Soit $s \mapsto X(s)$ une courbe dans $\mathbf{R}^3$ paramétrée par son abscisse curviligne. On suppose qu'il n'y a pas de points d'inflexion. On dérive la normale unitaire. La fonction $\theta(s) = \nu'(s)\cdot b(s)$ s'appelle la* torsion *de la courbe. Les dérivées des vecteurs du repère de Frenet sont alors données par*

$$\tau' = \kappa\nu, \quad \nu' = -\kappa\tau + \theta b, \quad b' = -\theta\nu.$$

Preuve. Soit A la matrice dont les colonnes sont les composantes dans le repère de Frenet des dérivées des vecteurs du repère de Frenet. Le fait que A est antisymétrique traduit le fait que le repère de Frenet est orthonormé. Une matrice antisymétrique n'a que 3 composantes indépendantes. L'hypothèse que $\tau' = \kappa\nu$ donne 2 composantes, c'est la troisième qu'on baptise torsion. ∎

Exercice 29 *La torsion d'une courbe sans point d'inflexion est nulle si et seulement si celle-ci est contenue dans un plan.*

Plus généralement, la torsion mesure le fait que la courbe ne reste pas dans un plan.

Proposition 30 *Soit $s \mapsto X(s)$ une courbe de classe C^3 paramétrée par son abscisse curviligne, sans point d'inflexion. On a le développement limité*

$$(X(s)-X(0))\cdot b(0) = \kappa(0)\theta(0)\frac{s^3}{6} + o(s^3).$$

Autrement dit, la torsion mesure à quelle vitesse la courbe s'éloigne de son plan osculateur.

Preuve. Comme $\kappa \neq 0$, le repère de Frenet est bien défini et on calcule

$$X''' = -\kappa^2 \tau + \frac{\partial \kappa}{\partial s} \nu + \kappa \theta b.$$

Comme $X'(0)$ et $X''(0)$ sont orthogonaux à $b(0)$, le développement de Taylor-Young de $(X(s) - X(0)) \cdot b(0)$ est celui annoncé. ∎

Exercice 31 *Une* hélice *est une courbe qui, dans un repère orthonormé, admet une paramétrisation de la forme*

$$t \mapsto (R \cos t, R \sin t, \alpha t)$$

où $R > 0$ et $\alpha \neq 0$ sont des constantes. Calculer la courbure et la torsion de cette hélice. Montrer qu'une courbe a une courbure et une torsion constante si et seulement si c'est un cercle ou une hélice.

Proposition 32 *Soit $t \mapsto X(t)$ une courbe munie d'un paramètre quelconque, sans point d'inflexion. Sa torsion est donnée par la formule*

$$\theta = \kappa^{-2} \| \frac{dX}{dt} \|^{-6} \det(\frac{dX}{dt}, \frac{d^2X}{dt^2}, \frac{d^3X}{dt^3}) = \| \frac{dX}{dt} \wedge \frac{d^2X}{dt^2} \|^{-2} \det(\frac{dX}{dt}, \frac{d^2X}{dt^2}, \frac{d^3X}{dt^3}).$$

Preuve. On note s l'abscisse curviligne et X', X'' les dérivées par rapport à s. On écrit $\frac{dX}{dt} = \frac{ds}{dt} X'$,

$$\frac{d^2X}{dt^2} = \frac{d^2s}{dt^2} X' + (\frac{ds}{dt})^2 X'' = \frac{d^2s}{dt^2} X' + (\frac{ds}{dt})^2 \kappa \nu,$$

$$\frac{d^3X}{dt^3} = \frac{d^3s}{dt^3} X' + (\frac{d^2s}{dt^2}\frac{ds}{dt} + 2\frac{d^2s}{dt^2}\frac{ds}{dt}) X'' + (\frac{ds}{dt})^2 (\frac{d\kappa}{dt}) \nu + (\frac{ds}{dt})^3 \kappa \nu'.$$

Il vient

$$\frac{d^3X}{dt^3} \cdot b = (\frac{ds}{dt})^3 \kappa \nu' \cdot b = (\frac{ds}{dt})^3 \kappa \theta.$$

Or

$$\frac{dX}{dt} \wedge \frac{d^2X}{dt^2} = (\frac{ds}{dt})^3 X' \wedge X'' = (\frac{ds}{dt})^3 \kappa \tau \wedge \nu = (\frac{ds}{dt})^3 \kappa b.$$

On trouve enfin

$$(\frac{ds}{dt})^6 \kappa^2 \theta = \frac{d^3X}{dt^3} \cdot (\frac{dX}{dt} \wedge \frac{d^2X}{dt^2}) = \det(\frac{dX}{dt}, \frac{d^2X}{dt^2}, \frac{d^3X}{dt^3}). \blacksquare$$

Exercice 33 *Calculer la courbure et la torsion de la courbe $t \mapsto X(t) = (t, t^2, t^3)$. Quel est le plan osculateur en $t = 0$? la normale ? la binormale ?*

6.2 Equation intrinsèque

Une courbe gauche est déterminée par sa courbure et sa torsion. Cependant, il n'y a pas de formule explicite pour une courbe de courbure et de torsion donnée. Cela tient au fait que le groupe $SO(3)$ des rotations de $\mathbf{R}^3$ n'est pas commutatif, alors que le groupe $SO(2)$ des rotations du plan l'est.

Théorème 4 *Soient κ_0 une fonction strictement positive, de classe C^1 et θ_0 une fonction continue sur un intervalle I contenant 0. Soit (P, τ_0, ν_0, b_0) un repère orthonormé direct de $\mathbf{R}^3$ orienté. Il existe une et une seule courbe X de classe C^3, paramétrée par son abscisse curviligne $s \in I$, sans points d'inflexion, telle que*

- *la courbure (resp. la torsion) de X en $X(s)$ est $\kappa_0(s)$ (resp. $\theta_0(s)$) ;*

- *$X(0) = P$, $X'(0) = \tau_0$ et $X''(0) = \kappa_0(0)\nu_0$.*

Preuve. Notons

$$A(s) = \begin{pmatrix} 0 & -\kappa_0(s) & 0 \\ \kappa_0(s) & 0 & -\theta_0(s) \\ 0 & \theta_0(s) & 0 \end{pmatrix}.$$

Unicité. Soit $s \mapsto X(s)$ est une courbe de classe C^3 paramétrée par son abscisse curviligne, sans points d'inflexion, de courbure κ_0 et de torsion θ_0. Supposons que le repère de Frenet de X en $s = 0$ est (P, τ_0, ν_0, b_0). Notons $M(s)$ la matrice carrée 3×3 dont les colonnes sont les composantes dans le repère (P, τ_0, ν_0, b_0) des vecteurs $\tau(s)$, $\nu(s)$ et $b(s)$ du repère de Frenet de X. D'après la définition 28, la matrice M satisfait l'équation différentielle linéaire

$$M'(s) = M(s)A(s).$$

avec la condition initiale $M(0) = I_3$. Elle est donc uniquement déterminée par les fonctions κ_0 et θ_0. La relation $X'(s) = \tau(s)$ et la condition initiale $X(0) = P$ déterminent X uniquement.

Existence. L'équation différentielle $M' = MA$ admet une unique solution $s \mapsto M(s)$ définie sur I et telle que $M(0)$ soit la matrice unité I_3. Comme A est antisymétrique, $M(s)$ est orthogonale. Par continuité, son déterminant vaut 1. Notons $\tau(s)$, $\nu(s)$ et $b(s)$ les vecteurs colonnes de la matrice $M(s)$. Ils forment une base orthonormée directe pour tout s. Posons $X(s) = P + \int_0^s \tau(u)\,du$.

Montrons que la courbe X a les propriétés souhaitées. Comme A est continue, τ est de classe C^1 donc X est de classe C^2. Par construction, $X(0) = P$, $X'(s) = \tau(s)$ donc en particulier $X'(0) = \tau_0$.

$$X''(s) = \tau'(s) = M'(s)(1, 0, 0) = M(s)(0, \kappa_0(s), 0) = \kappa_0(s)\nu(s)$$

donc $X''(0) = \kappa_0(0)\nu_0$. Comme $\nu(s) \cdot \tau(s) = 0$, $X''(s) \cdot X'(s) = 0$ donc $\| X'(s) \|$ est constant, il vaut $\| \tau_0 \| = 1$. Par conséquent, le paramètre s est bien l'abscisse curviligne. La courbure de X est $\| X''(s) \| = \kappa_0(s)$. Comme la fonction κ_0 ne s'annule pas, le vecteur unitaire normal est $\nu(s)$. Comme la fonction κ_0 est supposée de classe C^1, $X'' = \kappa_0\nu$ est de classe C^1 donc X est de classe C^3. La dérivée

$$\nu'(s) = M'(s)(0, 1, 0) = M(s)(-\kappa_0(s), 0, \theta_0(s)) = -\kappa_0(s)\tau(s) + \theta_0(s)b(s)$$

montre que la torsion vaut $\theta_0(s)$. ∎

7 Condition de raccord

Théorème 5 *Soient γ_1 et γ_2 deux courbes de classe C^3 d'origine P dans $\mathbf{R}^2$ (resp. $\mathbf{R}^3$). Mettons ces deux courbes bout à bout de façon compatible avec les orientations.*

1. *Cas des courbes planes.*
    - *La courbe γ obtenue est de classe G^1 si et seulement si les courbes γ_1 et γ_2 ont en P même tangente.*
    - *γ est de classe G^2 si et seulement si les courbes γ_1 et γ_2 ont en P même tangente et même courbure.*
    - *γ est de classe G^3 si et seulement si les courbes γ_1 et γ_2 ont en P même tangente, même courbure, et même dérivée de courbure.*
2. *Cas des courbes gauches (i.e. dans $\mathbf{R}^3$).*
    - *La courbe γ obtenue est de classe G^1 si et seulement si les courbes γ_1 et γ_2 ont en P même tangente.*

- *γ est de classe G^2 si et seulement si les courbes γ_1 et γ_2 ont en P même tangente, même courbure et même normale orientée.*
- *Supposons que P n'est pas un point d'inflexion de γ_1 et de γ_2. La courbe γ est de classe G^3 si et seulement si les courbes γ_1 et γ_2 ont en P même tangente, même courbure, même normale orientée, même dérivée de courbure et même torsion.*

Preuve. Les conditions énoncées sont évidemment nécessaires, puisque les grandeurs évoquées ne dépendent pas d'un choix de paramétrisation et ne dépendent que des dérivées d'une paramétrisation jusqu'à l'ordre 2 (resp. 3).

Inversement, supposons que les courbes γ_1 et γ_2 ont en P même tangente et même courbure et même normale orientée. Introduisons la paramétrisation $s \mapsto X(s)$ de γ par l'abscisse curviligne d'origine P. Alors $X'(s)$ est bien définie pour $s \neq 0$ et se prolonge par continuïté en 0. Cela suffit pour montrer que X est de classe C^1. La dérivée $X''(s) = \kappa(s)\nu(s)$ se prolonge aussi par continuïté, donc X' est de classe C^1 et X est de classe C^2.

Supposons de plus que la dérivée de la courbure par rapport à l'abscisse curviligne et la torsion au point P sont les mêmes pour γ_1 et γ_2. Alors la dérivée troisième

$$X'''(s) = -\kappa(s)^2\tau(s) + \frac{\partial\kappa}{\partial s}\nu(s) + \kappa(s)\theta(s)\tau(s) \wedge \nu(s)$$

se prolonge par continuité, donc X'' est de classe C^1 et X est de classe C^3. ■