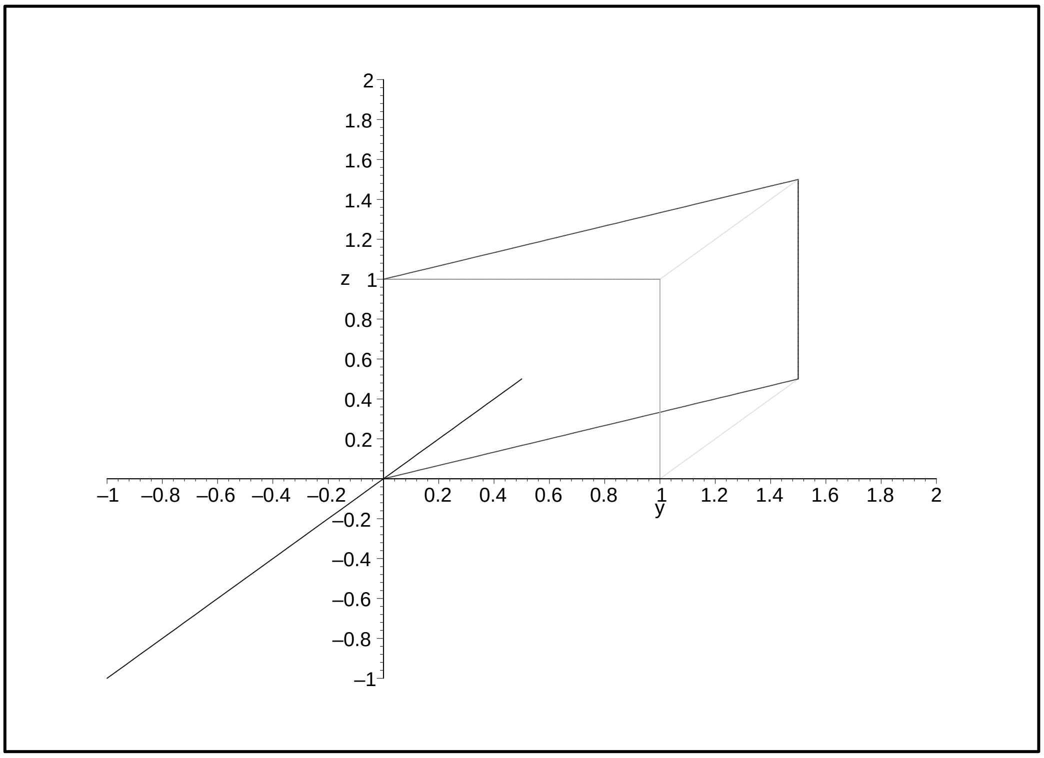
Corrigé de l'examen de topologie et géométrie différentielle

5 avril 2000

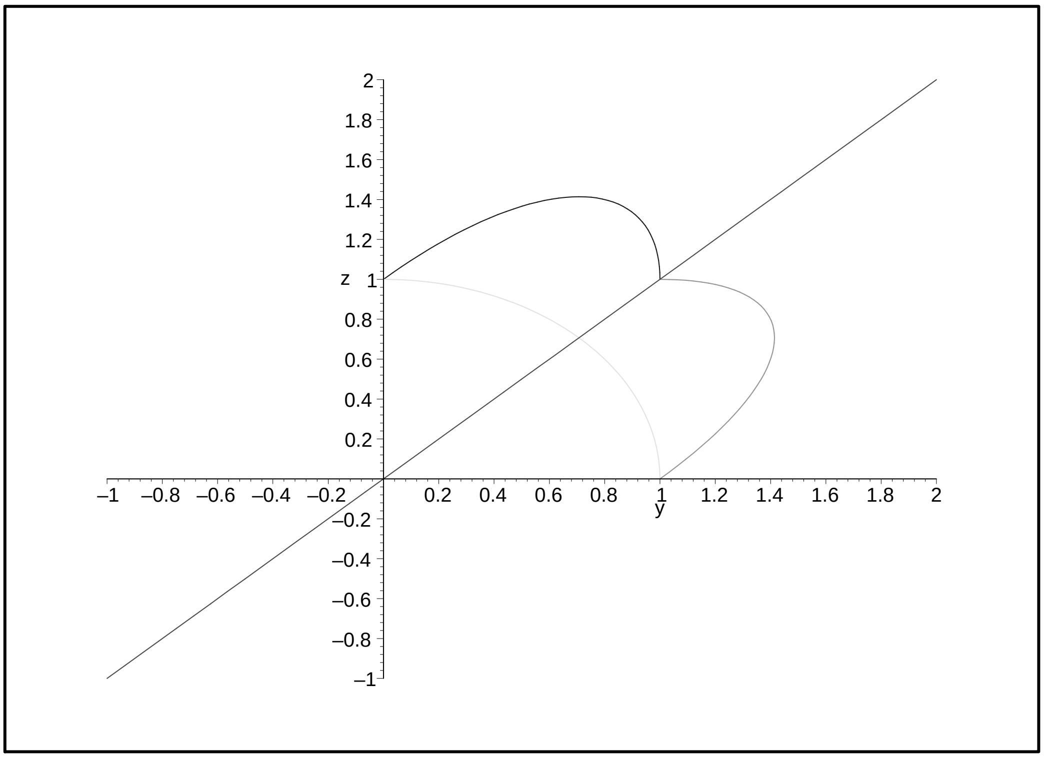
I

1. Le triangle T est défini par l'équation $\{z = 0\}$ et les inéquations $\{x \leq 0,\, x + y \geq 0,\, y \leq 1\}$. Le prisme P a 6 sommets, 9 arêtes et 5 facettes.



2. Le vecteur unitaire qui oriente normalement T est $(0, 0, -1)$. Par conséquent, la base orthonormée $((0, 1, 0), (1, 0, 0))$ du plan qui contient T est directe pour l'orientation tangente correspondante. Relativement au plan horizontal, la normale sortante à l'arête OA contenue dans le bord de T est $(-1, 0, 0)$ donc le vecteur unitaire $(0, -1, 0)$, tangent à cette arête, définit l'orientation induite. L'ordre cyclique sur les sommets de T orienté comme partie du bord de P est OBA.

3. Le lien de P en O est le triangle sphérique de sommets A, $B' = (-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0)$ et $C = (0,0,1)$. Les latitudes et longitudes de ces points sont $A = (0^0, 90^0 E)$, $B' = (0^0, 135^0 E)$, $C = (90^0 N, O^0)$.



4. Parmi les 5 facettes, 3 sont portées par des plans passant par O. Ces plans sont donc transverses à la sphère unité. Les deux autres sont tangents donc non transverses à la sphère unité.

II

1. Comme les poids sont supposés strictement positifs et les noeuds extrêmes de multiplicité $k+1$, la propriété de diminution de la variation s'applique. Si $-1 < a \leq 0$, le polygone de contrôle est convexe donc la courbe B-spline rationnelle associée X_k est convexe.

Supposons que X_k possède 2 points doubles P et P'. Alors la droite PP' est traversée 4 fois par la courbe. Or le polygone de contrôle, qui n'a que 3 côtés, n'est traversé que 3 fois au plus par PP'. Ceci contredit la propriété de diminution de la variation. On conclut qu'il y a au plus un point double.

On remarque que le polygone de contrôle est symétrique par rapport à la droite D d'équation $\{x+y=0\}$. Si le vecteur de noeuds et le vecteur des poids sont symétriques (i.e $t_i + t_{7-i}$ ne dépend pas de i et $w_{4-i} = w_i$), la courbe est symétrique par rapport à D. Supposons que X_k possède un point double P. Alors son symétrique P' par rapport à D est sur la courbe et c'est aussi un point double. Comme il y a au plus un point double, $P = P'$ donc $P \in D$.

2. Comme les noeuds extrèmes sont de multiplicité $k+1$, on a une formule simple pour la courbure aux extrémités du polygone de contrôle. Comme les poids sont tous strictement positifs, le signe de la courbure aux extrémités est celui de l'aire algébrique du triangle $p_0p_1p_2$ (resp. $p_1p_2p_3$). Or celle-ci est du signe de $-a$. On conclut que si $a > 0$, la courbure de X_k en p_0 et en p_3 est strictement négative. Au voisinage de p_0, la courbe est donc au-dessous de sa tangente, l'axe des x. Or la courbe passe par p_3, donc elle traverse sa tangente. Ceci prouve que la courbe X_k n'est pas convexe.

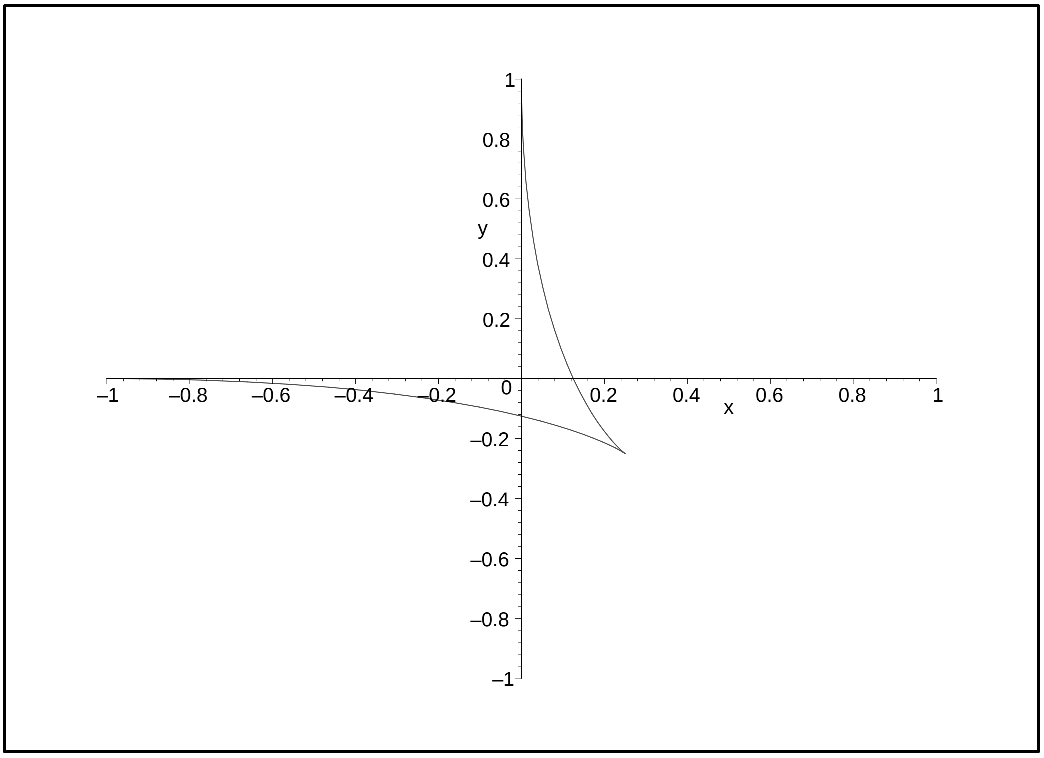
3. On a affaire à une courbe de Bézier cubique. Pour $t \in [0, 1[$, l'algorithme de de Casteljau donne

$$p_1^1 = (-(1-t) + at, 0), \quad p_2^1 = (a(1-t), -at), \quad p_3^1 = (0, -a(1-t) + t),$$
$$p_2^2 = (-(1-t)^2 + 2at(1-t), -at^2), \quad p_3^2 = (a(1-t)^2, -2at(1-t) + t^2),$$
$$X_3(t) = p_3^3 = (-(1-t)^3 + 3a(1-t)^2t, -3a(1-t)t^2 + t^3).$$

Le vecteur vitesse vaut

$$X_3'(t) = 3((1-t)(a+1-t(3a+1)), t(-2a+t(3a+1))).$$

Il s'annule si et seulement si $a = 1$ et $t = 1/2$.



III

1. On paramètre la courbe c_0 par

$$t \mapsto c_0(t) = \cos(t/2)(\cos t, \sin t), \quad t \in [0, \pi].$$

On note $e_r = (\cos t, \sin t)$ et $e_\theta = (-\sin t, \cos t)$. C'est une base orthonormée directe. On calcule

$$c_0'(t) = -\frac{1}{2}\sin(\frac{t}{2})e_r + \cos(\frac{t}{2})e_\theta, \quad c_0''(t) = -\frac{5}{4}\cos(\frac{t}{2})e_r - \sin(\frac{t}{2})e_\theta$$

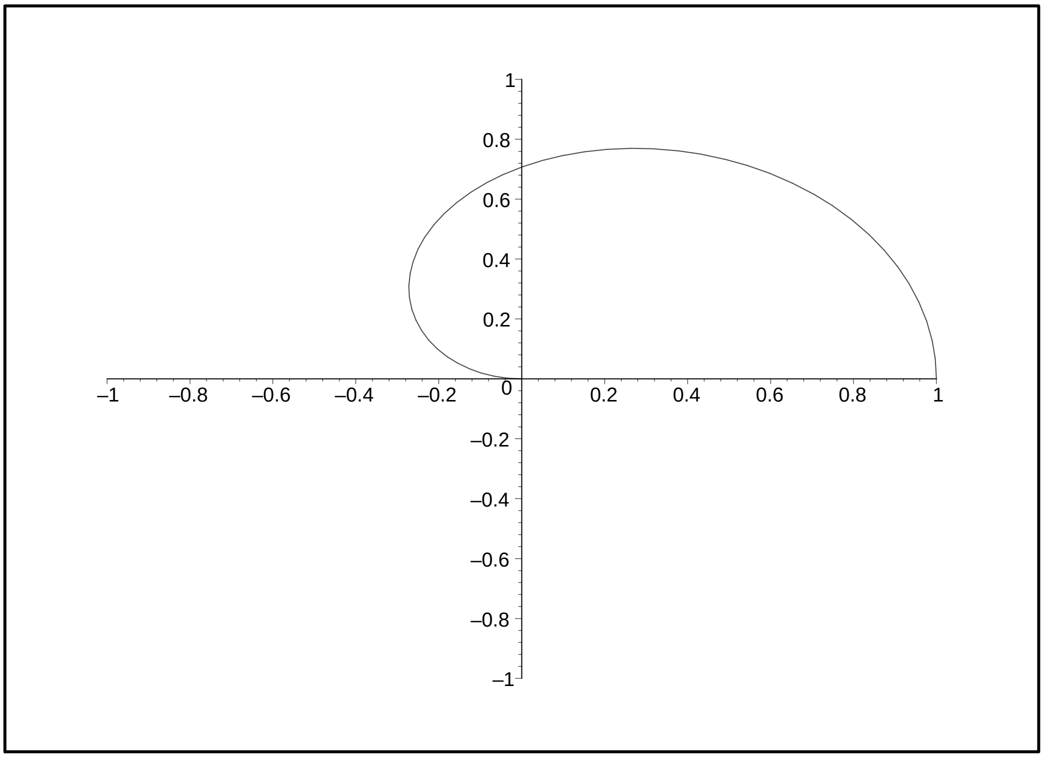
d'où

$$\det(c_0', c_0'') = \frac{1}{2} + \frac{3}{4}\cos^2\frac{t}{2}$$

et

$$\kappa = (\frac{1}{2} + \frac{3}{4}\cos^2\frac{t}{2})(\frac{1}{4} + \frac{3}{4}\cos^2\frac{t}{2})^{-3/2}$$

garde un signe constant. En particulier, la courbure vaut 1 au point $(1, 0)$ et 4 au point $(0, 0)$.



2.a. Une courbe de Bézier cubique a 4 points de contrôle, et passe par les extrémités de son quadrilatère de contrôle. Cela impose $p_0 = p$ et $p_3 = q$. De plus, la courbe est tangente aux côtés du polygone de contrôle. Cela impose $p_1 = (1, y)$ et $p_2 = (-x, 0)$ où $x > 0$ et $y > 0$. La courbure en p vaut alors

$$\kappa(p) = \frac{2}{3}\frac{\det(p_1 - p_0, p_2 - p_0)}{p_0p_1^3} = \frac{2(1+x)}{3y^2}$$

et

$$\kappa(q) = \frac{2}{3}\frac{\det(p_3 - p_1, p_3 - p_2)}{p_2p_3^3} = \frac{2y}{3x^2}.$$

Prescrire en plus les courbures aux extrémités conduit aux équations

$$\frac{2(1+x)}{3y^2} = 1, \quad \frac{2y}{3x^2} = k$$

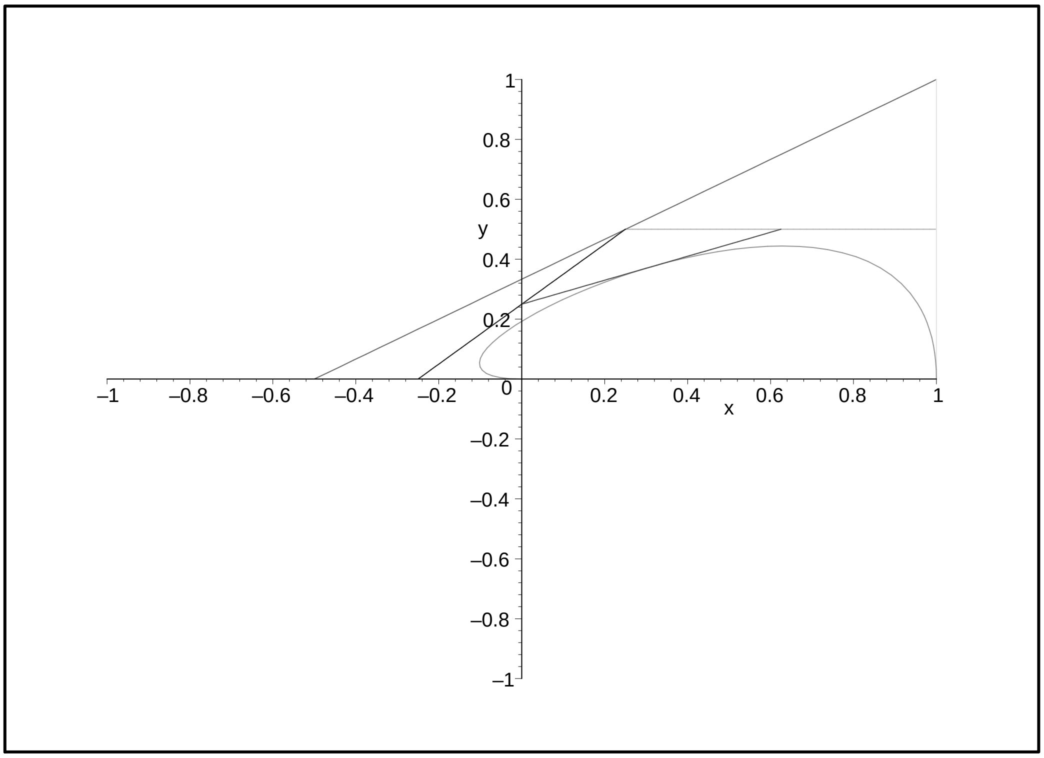
soit

$$8(1+x) = 27k^2x^4 \quad \text{et} \quad y = \frac{3}{2}kx^2.$$

Posons $f(x) = 8(1+x) - 27k^2x^4$. La dérivée $f'(x) = 8 - 108k^2x^3$ s'annule exactement une fois sur $\mathbf{R}_+$. Par conséquent, f est d'abord croissante puis strictement décroissante. Comme elle vaut 8 en 0 et tend vers $-\infty$, l'équation $8(1+x) = 27k^2x^4$ a exactement une solution strictement positive. La seconde équation détermine y. Il y a donc un unique polygone de contrôle qui donne une cubique de Bézier ayant les propriétés voulues.

Le polygone obtenu étant convexe, la courbe de Bézier est convexe, par diminution de la variation.

2.b Lorsque $k = 8/3$, la fonction f s'annule en $x = 1/2$ ce qui donne $y = 1$.



3. On peut paramétrer l'hélice par

$$t \mapsto X(t) = (\cos t, \sin t, \frac{\epsilon}{2\pi}t).$$

On trouve qu'au point P, un vecteur directeur de la tangente est $(0, 1, \frac{\epsilon}{2\pi})$, le vecteur unitaire normal est $(-1, 0, 0)$ donc la courbure vaut

$$\kappa(P) = (1 + (\frac{\epsilon}{2\pi})^2)^{-1}.$$

Le plan osculateur, engendré par $(0,1,\frac{\epsilon}{2\pi})$ et $(-1,0,0)$, a pour équation $-\epsilon y + 2\pi z = 0$.

4. Par l'invariance par application affine, la projection sur le plan $\{z=0\}$ du polygone de contrôle cherché est le polygone de contrôle de c. Notons $Q_0 = (1,0,z_0)$, $Q_1 = (1,y,z_1)$, $Q_2 = (-x,0,z_2)$, $Q_3 = (0,0,z_3)$ les points de contrôle de la courbe gauche cherchée. Elle passe par P en $t=0$ si et seulement si $z_0 = 0$. En P, elle est tangente à son polygone de contrôle. Il faut donc que Q_1 soit sur la tangente en P à l'hélice. Cela donne $z_1 = \dfrac{\epsilon y}{2\pi}$. Le plan osculateur est le plan déterminé par les points Q_0, Q_1 et Q_2. Il faut donc que Q_2 soit dans le plan osculateur en P à l'hélice, ce qui donne $z_2 = 0$. Enfin, la courbe est tangente en $t=1$ au côté Q_2Q_3. Celui-ci est parallèle au vecteur $(1,0,\beta)$ si et seulement si $z_3 - z_2 = \beta x$ d'où $z_3 = \beta x$.

Réciproquement, avec les valeurs trouvées des z_i, la courbe B-spline a en P même tangente orientée et même plan osculateur orienté (et donc même normale orientée) que l'hélice. La courbure en P de la courbe B-spline vaut

$$\kappa(P) = \frac{2}{3}\frac{\|(Q_1 - Q_0)\wedge(Q_2 - Q_0)\|}{\|Q_1 - Q_0\|^3} = \frac{2}{3}\frac{1+x}{y^2(1+\epsilon^2/4\pi^2)}.$$

Or, à la question 2.a, en ajustant la courbure de la courbe c à 1, on a lié x et y par la relation $\dfrac{2(1+x)}{3y^2} = 1$, donc

$$\kappa(P) = \frac{1}{1+\epsilon^2/4\pi^2}$$

est égal à la courbure de l'hélice. On conclut que le raccord est GC^2 au point P.

IV

1. On choisit la paramétrisation

$$(u,v) \mapsto X(u,v) = c(u) + v b(u).$$

Si la courbe est plane, la binormale est constante, les droites $D(u)$ sont parallèles, donc la surface obtenue est un cylindre.

On écrit les dérivées dans le repère de Frenet de la courbe c. Il vient

$$\frac{\partial X}{\partial u} = \tau(u) - \theta v \nu(u) = \begin{pmatrix} 1 \\ -\theta v \\ 0 \end{pmatrix}$$

et

$$\frac{\partial X}{\partial v} = b(u) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

d'où

$$\frac{\partial X}{\partial u} \wedge \frac{\partial X}{\partial v} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -\theta v \end{pmatrix}.$$

Ce vecteur ne s'annule jamais donc la paramétrisation est non dégénérée. Cela ne garantit pas que surface est lisse, car il y a en général des points doubles. L'élément d'aire a pour densité par rapport à $du\,dv$ la norme de ce vecteur, soit

$$\sqrt{EG - F^2} = \sqrt{1+\theta^2 v^2}.$$

2. On trouve

$$E = 1 + \theta^2 v^2, \quad F = 0, \quad G = 1,$$

donc la première forme fondamentale est

$$(1+\theta^2 v^2)\, du^2 + dv^2.$$

En dérivant une deuxième fois, on trouve

$$\frac{\partial^2 X}{\partial u \partial v} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\theta \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2 X}{\partial v^2} = 0$$

d'où

$$B = \frac{\theta}{\sqrt{1+\theta^2 v^2}} \quad \text{et} \quad C = 0.$$

La courbure de Gauss vaut

$$K = \frac{AC - B^2}{EG - F^2} = -\frac{B^2}{E} = -\frac{\theta^2}{(1+\theta^2 v^2)^2}.$$

La surface X traverse son plan tangent en tout point où $K < 0$. C'est le cas partout sauf le long des binormales aux points où la torsion est nulle. En ces points, en général la surface ne traverse pas son plan tangent.

3. On écrit

$$\int\int_X -K\, dA = \int\int_{I\times\mathbf{R}} \frac{\theta^2}{(1+\theta^2 v^2)^{3/2}}\, du\, dv.$$

A u fixé, lorsque $\theta(u) \neq 0$, l'intégrand est équivalent à $|\theta(u)|^{-1}|v|^{-3}$ donc intégrable. On peut donc faire le changement de variable $w = |\theta(u)|v$, et l'intégrale devient

$$|\theta(u)| \int_{\mathbf{R}} \frac{dw}{(1+w^2)^{3/2}}\, dw,$$

intégrale qui est une fonction bornée de u. Ceci prouve la convergence de l'intégrale. En faisant les changements de variable $w = \sinh x$ puis $y = \exp(2x) + 1$, on trouve que

$$\int_{\mathbf{R}} \frac{dw}{(1+w^2)^{3/2}}\, dw = 2$$

d'où

$$\int\int_X K\, dA = -2 \int_I |\theta(u)|\, du = -2 \int_c |\theta|\, ds.$$

Remarque. La surface des binormales a la propriété suivante. Si on néglige la gravité, un véhicule lancé dans la direction de la courbe c sur la surface va suivre la courbe c. En effet, l'accélération de cette trajectoire, orthogonale à la surface, est exactement compensée par la réaction de la surface. Autrement dit, on a construit la chaussée idéale, sur laquelle les passagers ne sont pas déportés latéralement dans les virages (mais seulement en apesanteur).