B-splines

P. Pansu

March 15, 2001

1 Motivation

1.1 Les besoins du `design`

Les objets fabriqués par l'industrie comportent des lignes courbes. Les logiciels de CAO proposent un catalogue de formes simples (segments de droites, arcs de cercles, de côniques...) mais elles ne suffisent pas. Le `designer` a besoin d'une famille plus riche de courbes, dépendant de paramètres. Il souhaite

- disposer de suffisamment de paramètres pour pouvoir spécifier des conditions aux limites et autres contraintes ;
- deviner l'effet de chaque paramètre, pour trouver rapidement en les ajustant une courbe qui correspond à celle qu'il a imaginée.

D'autre part, le calcul de la courbe en fonction des paramètres doit être rapide.

Les B-splines, utilisées en analyse numérique depuis les années 30, possèdent les propriétés voulues. Comme il est impossible de paramétrer exactement un cercle au moyen de B-splines, on introduit une famille un peu plus large, les *B-splines rationnelles* (`NURBS`).

L'objet de ce chapitre est de définir les B-splines et leurs variantes (elles font partie des fonctionnalités de ACIS et CATIA), de décrire les algorithmes nécessaires à leur manipulation, les paramètres en jeu, leur signification et leurs effets.

1.2 Construction des B-splines

On se donne une suite de points $t_0 \leq \ldots \leq t_m$ de la droite réelle, appelés *noeuds* (`knots`). Le vecteur $(t_0, \ldots, t_m)$ s'appelle le *vecteur des noeuds* (`knot vector`). Certains noeuds peuvent être confondus. Si r noeuds sont égaux à un réel τ, on dit que τ est de *multiplicité* r.

On se donne d'autre part des points $P_0, \ldots, P_m$ dans $\mathbf{R}^n$, appelés *points de contrôle* (`control points`) qui forment ensemble le *polygone de contrôle* (`control polygon`). On l'imagine comme une courbe $t \mapsto X_0(t)$ qui saute d'un point à l'autre aux temps t_i, i.e.

$$X_0(t) = P_i \quad \text{pour} \quad t \in [t_i, t_{i+1}[.$$

(Si le noeud $t_i = t_{i+1}$, le sommet P_i est simplement ignoré).

On cherche à approcher cette courbe discontinue par une courbe plus régulière. Le première étape consiste à faire passer une ligne polygonale par les points P_i, i.e. lorsque t varie entre deux noeuds t_i et t_{i+1}, $X_1(t)$ décrit le segment $[P_{i-1}, P_i]$ à vitesse constante. On trouve la formule

$$X_1(t) = (1 - \frac{t - t_i}{t_{i+1} - t_i})P_{i-1} + \frac{t - t_i}{t_{i+1} - t_i}P_i.$$

(Si $t_i = t_{i+1}$, la courbe saute de P_{i-1} à P_i en t_i). Si les noeuds sont tous distincts, la courbe obtenue est continue mais non dérivable en général. Ses composantes sont des fonctions linéaires par morceaux.

L'étape suivante conduit (si les noeuds sont tous distincts) à une courbe X_2 de classe C^1 (mais non C^2 en général), au prix d'augmenter le degré : elle est quadratique par morceaux. Elle ne passe plus par les sommets P_i, mais conserve une proximité au polygone en un sens différent : si t est compris entre les noeuds t_i et t_{i+1}, $X_2(t)$ est dans l'enveloppe convexe des sommets P_{i-2}, P_{i-1} et P_i.

Comment trouver X_2, et plus généralement, X_k pour $k \geq 2$? Supposons les points P_i affinement indépendants. Alors la courbe X_{k-1} s'écrit de manière unique comme combinaison

$$X_{k-1}(t) = \sum_i B_{i,k-1}(t) P_i$$

où les fonctions $B_{i,k}$ sont positives ou nulles, et leur somme vaut 1. Pour gagner un degré de différentiabilité, l'idée est de remplacer dans cette formule la suite de points fixés P_i par des points $P_i(t)$ mobiles le long du polygone de contrôle, où $P_i(t)$ se déplace de P_{i-1} à P_i pendant l'intervalle de temps $[t_i, t_{i+k}]$. Autrement dit, on pose

$$X_k(t) = \sum_i B_{i,k-1}(t)((1 - \frac{t - t_i}{t_{i+k} - t_i}) P_{i-1} + \frac{t - t_i}{t_{i+k} - t_i} P_i)$$

Cela donne pour les fonctions $B_{i,k}$ la relation de récurrence

$$B_{i,k}(t) = \frac{t - t_i}{t_{i+k} - t_i} B_{i,k-1}(t) + (1 - \frac{t - t_{i+1}}{t_{i+k+1} - t_{i+1}}) B_{i+1,k-1}(t)$$

qui les détermine uniquement.

Cela une famille de courbes au service du `design`. Le paramètre principal est le polygone de contrôle, dont la courbe épouse les formes. La complexité du calcul de la courbe dépend avant tout du degré de différentiabilité (on s'arrête souvent à $k = 3$). Le paramètre secondaire est le vecteur des noeuds. On s'en sert avant tout pour s'assurer que la courbe passe par des points prescrits avec des tangentes prescrites, i.e. pour contrôler les raccords.

1.3 Plan de la suite du chapitre

1. Définition et propriétés des fonctions splines
2. Courbes splines et courbes de Bézier
3. Algorithmes : calcul du point courant, de la dérivée, ajout d'un point de contrôle
4. Convexité
5. Courbure et condition de raccord
6. NURBS
7. Interpolation

1.4 Bibliographie

Ces notes sont très largement inspirées du livre de J.-J. Risler, [R].

On trouvera dans les ouvrages de G. Farin, [F] et J. Hoschek et D. Lasser; [HL] de nombreuses figures, une présentation plus complète de la problématique du design ainsi que des notes historiques.

2 Définition et propriétés des fonctions B-splines

2.1 Définition

On se donne une suite de noeuds $t_0 \leq \cdots \leq t_m$ sur la droite réelle.

Notation. Soit $j = 1, \ldots, m+1-i$. Si $t_i < t_{i+1}$, on *note*

$$\omega_{i,j}(t) = \frac{t - t_i}{t_{i+j} - t_i}.$$

Si $t_i = t_{i+1}$, on pose $\omega_{i,j} = 0$.

Convention. Cette notation illustre une convention qu'on va utiliser partout : *Chaque fois qu'on écrit une fraction dont le dénominateur est nul, il faut l'interpréter par* 0.

Définition 1 *On définit par récurrence sur k les fonctions* B-splines $B_{i,k}$ *pour $i = 0, \ldots, m-k-1$, par les relations suivantes.*

$$B_{i,0}(t) = 1 \quad \textit{pour} \quad t \in [t_i, t_{i+1}[, \quad = 0 \quad \textit{sinon},$$

et pour $k \geq 1$,

$$B_{i,k}(t) = \omega_{i,k}(t) B_{i,k-1}(t) + (1 - \omega_{i+1,k}(t)) B_{i+1,k-1}(t).$$

Remarque. Les fonctions B-splines constituent une base (parmi d'autres) de l'espace vectoriel des fonctions définies sur l'intervalle $[t_0, t_{m-k}]$, polynômiales de degré inférieur ou égal à k sur chaque intervalle $[t_i, t_{i+1}[$, de classe C^{k-r} au voisinage de chaque noeud de multiplicité r (voir [R], paragraphe 1.4). Les mérites particuliers à cette base sont énumérés dans les propositions 10 et 33.

2.2 B-splines uniformes

Proposition 2 *On pose, pour $i \in \mathbf{Z}$, $t_i = i$. Alors pour tout $i \in \mathbf{Z}$, $k \geq 1$ et $t \in \mathbf{R}$,*

$$B_{i,k}(t+1) = B_{i-1,k}(t) \quad \textit{et} \quad B_{0,k}(k+1-t) = B_{0,k}(t).$$

Soient $i \in \mathbf{Z}$ et $t \in \mathbf{R}$. A l'aide des identités $B_{i,0}(t+1) = B_{i-1,0}(t)$ et $\omega_{i,k}(t+1) = \omega_{i-1,k}(t)$, on montre aisément par récurrence sur k que $B_{i,k}(t+1) = B_{i-1,k}(t)$ pour tout k.

Montrons par récurrence sur k que pour $k \geq 1$, $B_{0,k}(k+1-t) = B_{0,k}(t)$. On calcule $B_{0,1}(t) = t\,\mathbf{1}_{[0,1[} + (2-t)\mathbf{1}_{[1,2[}$. Cette fonction satisfait $B_{0,1}(2-t) = B_{0,1}(t)$. Supposons l'identité démontrée pour la B-spline uniforme de degré $k-1$. On remarque que $\omega_{0,k}(k+1-t) = \frac{k+1-t}{k} = 1 - \omega_{1,k}(t)$. Par l'hypothèse de récurrence et l'invariance par translation,

$$B_{0,k-1}(k+1-t) = B_{0,k-1}(t-1) = B_{1,k-1}(t).$$

Il vient

$$\begin{aligned}
B_{0,k}(k+1-t) &= \omega_{0,k}(k+1-t) B_{0,k-1}(k+1-t) + (1 - \omega_{1,k}(k+1-t)) B_{1,k-1}(k+1-t) \\
&= (1 - \omega_{1,k}(t)) B_{1,k-1}(t) + \omega_{0,k}(t) B_{0,k-1}(t) \\
&= B_{0,k}(t).
\end{aligned}$$

On ne calcule que $B_{0,k}$, les autres fonctions B-splines uniformes s'en déduisent par translation.

La relation de récurrence qui définit les B-splines devient

$$B_{0,k}(t) = \frac{t}{k} B_{0,k-1}(t) + \frac{k+1-t}{k} B_{0,k-1}(t-1).$$

On calcule $B_{0,0} = \mathbf{1}_{[0,1[}$, $B_{0,1} = t\mathbf{1}_{[0,1[} + (2-t)\mathbf{1}_{[1,2[}$, $B_{0,2} = \frac{t^2}{2}\mathbf{1}_{[0,1[} + \frac{-2t^2+6t-3}{2}\mathbf{1}_{[1,2[} + \frac{(3-t)^2}{2}\mathbf{1}_{[2,3[}$, $B_{0,3} = \frac{t^3}{6}\mathbf{1}_{[0,1[} + \frac{-3t^3+12t^2-12t+4}{6}\mathbf{1}_{[1,2[} + \frac{3t^3-24t^2+60t-44}{6}\mathbf{1}_{[2,3[} + \frac{(4-t)^3}{6}\mathbf{1}_{[3,4[}$. ■

2.3 Polynômes de Bernstein

Proposition 3 *On pose $t_0 = t_1 = \cdots = t_k = 0$, $t_{k+1} = \cdots = t_{2k+1} = 1$. Alors, pour $i = 0, \ldots, k$,*

$$B_{i,k}(t) = C_k^i t^i (1-t)^{k-i}$$

pour $t \in [0, 1[$, $B_{i,k}(t) = 0$ sinon. Les autres fonctions B-splines sont nulles. En particulier,

$$B_{k-i,k}(t) = B_{i,k}(1-t).$$

Preuve. On calcule $\omega_{i,k} = 0$ sauf si $t_i = 0$ et $t_{i+k} = 1$, auquel cas $\omega_{i,k} = t$. Comme le support de $B_{i,k-1}$ est l'intervalle $[t_i, t_{i+k}[$, constate que pour $t \in [0, 1[$, $\omega_{i,k}(t) \neq 0 \Leftrightarrow B_{i,k-1}(t) \neq 0$. Par conséquent, la relation de récurrence devient, pour $t < 1$,

$$B_{i,k}(t) = tB_{i,k-1}(t) + (1-t)B_{i+1,k-1}(t),$$

d'où la formule de l'énoncé résulte aisément. ∎

2.4 Exercices

Entre les deux situations extrêmes ci-dessus (noeuds tous simples pour les B-splines uniformes, noeuds de multiplicités maximale pour les polynômes de Bernstein), il est utile d'étudier les situations intermédiaires.

Exercice 4 *On pose $t_0 = t_1 = 0$, $t_2 = 1$, $t_3 = 2$, $t_4 = 3$, etc.. Calculer $B_{i,k}$ pour $k \leq 2$ et $0 \leq i \leq 3 - k$.*

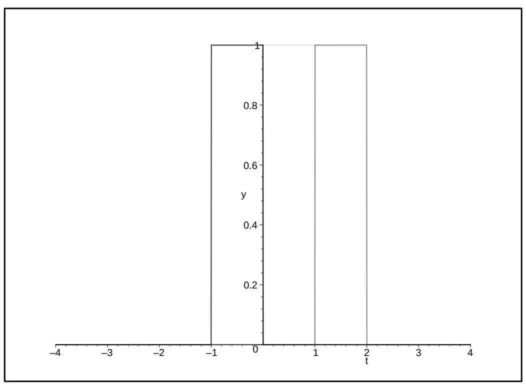
Exercice 5 *On pose $t_0 = t_1 = t_2 = 0$, $t_3 = 1$, $t_4 = 2$, $t_5 = 3$, etc..*
Calculer $B_{i,k}$ pour $k \leq 2$ et $0 \leq i \leq 3 - k$.

Exercice 6 *On pose $t_0 = t_1 = t_2 = t_3 = 0$, $t_4 = 1$, $t_5 = 2$, $t_6 = 3$, etc..*
Calculer $B_{i,k}$ pour $k \leq 2$ et $0 \leq i \leq 3 - k$.

Exercice 7 *On pose $t_0 = 0$, $t_1 = 1$, $t_2 = 2$, $t_3 = t_4 = 3$, $t_5 = 4$, $t_6 = 5$, $t_7 = 6$ et $t_8 = 7$.*
Calculer $B_{i,k}$ pour $k \leq 2$ et $0 \leq i \leq 5$, ainsi que $B_{0,3}$ et $B_{1,3}$.
Montrer que $\omega_{i,k}(6-t) = 1 - \omega_{7-k-i,k}(t)$. En déduire que (sauf pour t entier si $k = 0$) $B_{i,k}(6-t) = B_{6-k-i,k}(t)$.

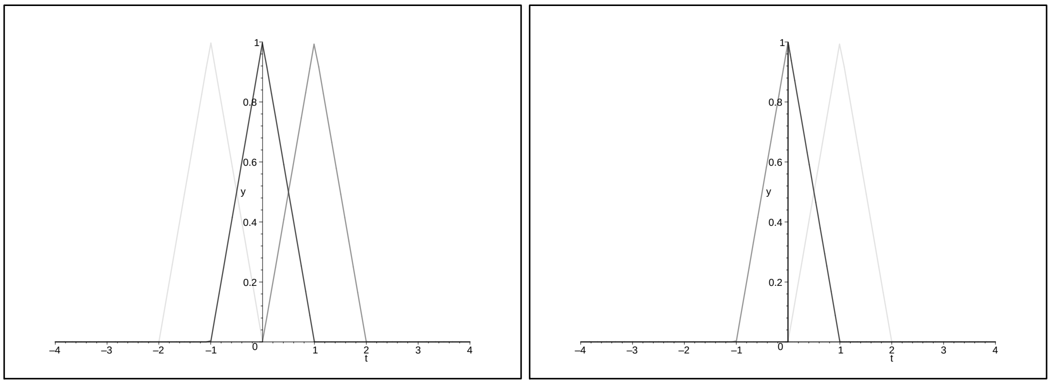
2.5 Graphes de quelques fonctions B-splines

Degré 0



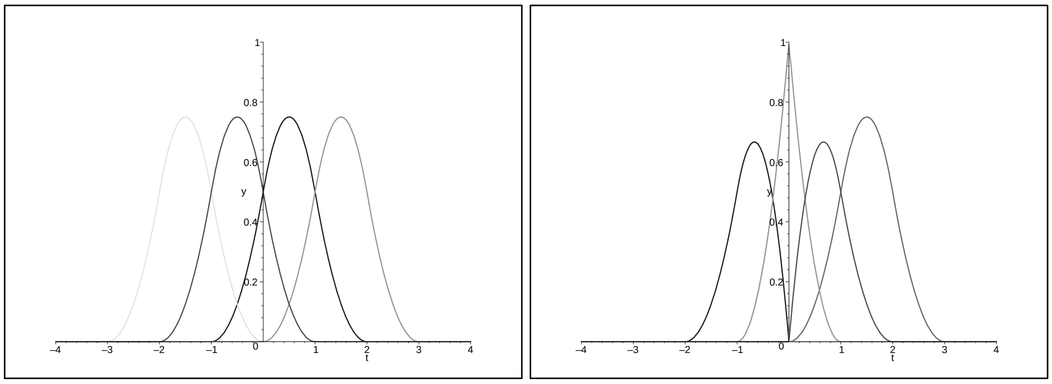
Trois fonctions B-splines uniformes de degré 0

Degré 1

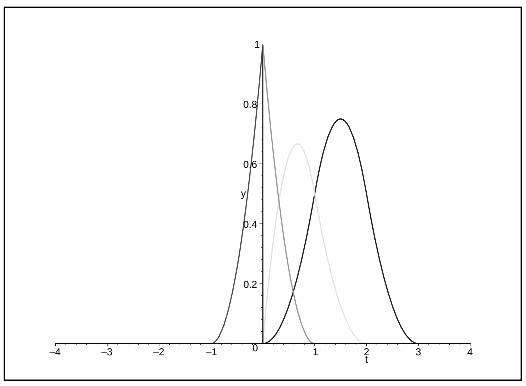


Trois fonctions B-splines de degré 1 uniformes (resp. relatives au vecteur de noeuds $(... - 2, -1, 0, 0, 1, 2, ...)$

Degré 2

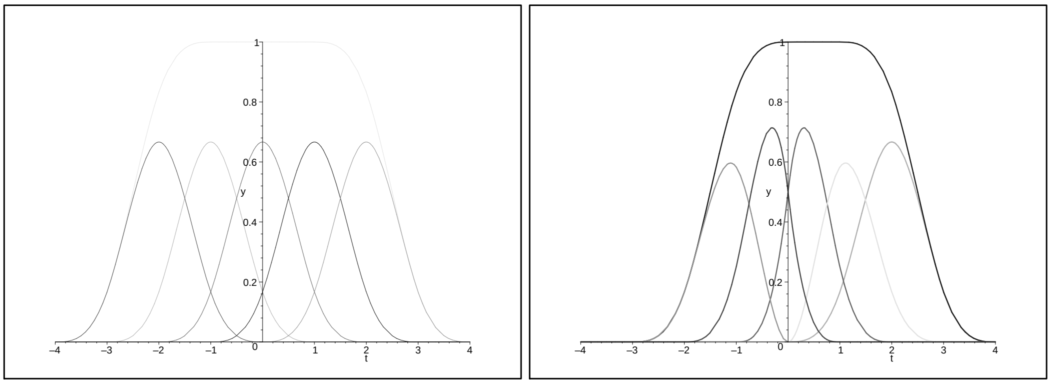


Quatre fonctions B-splines de degré 2 uniformes (resp. relatives au vecteur de noeuds $(... - 2, -1, 0, 0, 1, 2, ...)$)

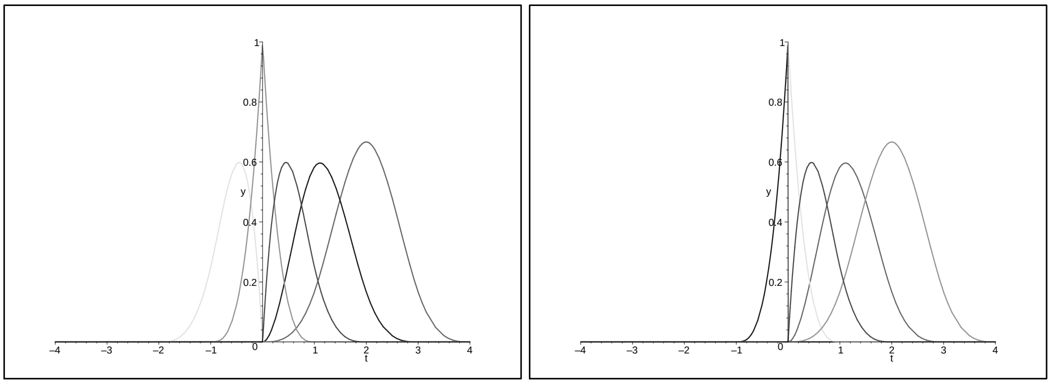


Quatre fonctions B-splines de degré 2 relatives au vecteur de noeuds $(... - 2, -1, 0, 0, 0, 1, 2, ...)$

Degré 3



Cinq fonctions B-splines uniformes (resp. relatives au vecteur de noeuds $(...-2,-1,0,0,1,2,...)$ et leur somme



Cinq fonctions B-splines relatives aux vecteurs de noeuds $(-2,-1,0,0,0,1,2,...)$ et $(-1,0,0,0,0,1,2,3..)$

2.6 Symétries

Toute symétrie du vecteur de noeuds se traduit par des relations entre les fonctions B-splines correspondantes. On l'a vu dans deux cas particuliers (B-splines uniformes et polynômes de Bernstein). Voici un énoncé général.

Proposition 8 *On suppose que le vecteur de noeuds* $\mathbf{t}$ *est périodique, i.e. il existe un entier* I *et un réel* T *tels que pour tout* $i \in \mathbf{Z}$*,*

$$t_{i+I} = t_i + T.$$

Alors les fonctions B-splines correspondantes satisfont

$$B_{i,k}(t-T) = B_{i+I,k}(t)$$

pour tout $i \in \mathbf{Z}$*.*

Preuve. Par récurrence sur k.

La fonction $t \mapsto B_{i,0}(t-T)$ est la fonction caractéristique de l'intervalle $[t_i+T, t_{i+1}+T[= [t_{i+I}, t_{i+I+1}[$, donc elle coïncide avec $B_{i+I,0}$.

D'autre part,

$$\omega_{i,k}(t-T) = \omega_{i+I,k}(t).$$

Supposant connu que pour tout $i \in \mathbf{Z}$,

$$B_{i,k-1}(t-T) = B_{i+I,k-1}(t),$$

il vient

$$\begin{aligned}B_{i,k}(t-T) &= \omega_{i,k}(t-T)B_{i,k-1}(t-T)+(1-\omega_{i+1,k}(t-T))B_{i+1,k-1}(t-T)\\ &= \omega_{i+I,k}(t)B_{i+I,k-1}(t)+(1-\omega_{i+I+1,k}(t))B_{i+I+1,k-1}(t)\\ &= B_{i+I,k}(t)\end{aligned}$$

pour tout $i \in \mathbf{Z}$. ■

Proposition 9 *On suppose que le vecteur de noeuds* $\mathbf{t}$ *est symétrique par rapport à un réel* a, *i.e. il existe des entiers* I *et* ℓ *tels que pour tout* $i = \frac{1}{2}(I-\ell), \ldots, \frac{1}{2}(I+\ell)$,

$$t_{I-i} = 2a - t_i.$$

Alors les fonctions B-splines correspondantes satisfont (sauf peut-être aux noeuds)

$$B_{i,k}(2a-t) = B_{I-i-k-1,k}(t)$$

pour tout $i = \frac{1}{2}(I-\ell), \ldots, \frac{1}{2}(I+\ell)-k-1$.

Preuve. Par récurrence sur k.

Si $i = \frac{1}{2}(I-\ell), \ldots, \frac{1}{2}(I+\ell)-1$, $t \mapsto B_{i,0}(2a-t)$ est la fonction caractéristique de l'intervalle $]2a-t_{i+1}, 2a-t_i] =]t_{I-i-1}, t_{I-i}]$, qui ne diffère de $B_{I-i-1,0}$ qu'aux noeuds t_{I-i-1} et t_{I-i}.

D'autre part,

$$\omega_{i,k}(2a-t) = 1 - \omega_{I-i-k,k}(t).$$

Supposant connu que pour tout $i = \frac{1}{2}(I-\ell), \ldots, \frac{1}{2}(I+\ell)-k-2$,

$$B_{i,k-1}(2a-t) = B_{I-i-k,k-1}(t),$$

il vient

$$\begin{aligned}B_{i,k}(2a-t) &= \omega_{i,k}(2a-t)B_{i,k-1}(2a-t)+(1-\omega_{i+1,k}(2a-t))B_{i+1,k-1}(2a-t)\\ &= (1-\omega_{I-i-k,k}(t))B_{I-i-k,k-1}(t)+\omega_{I-i-k-1,k}(t))B_{I-i-k-1,k-1}(t)\\ &= B_{I-i-k-1,k}(t)\end{aligned}$$

pour tout $i = \frac{1}{2}(I-\ell), \ldots, \frac{1}{2}(I+\ell)-k-1$. ■

2.7 Principales propriétés

Proposition 10 *Propriété générales des fonctions B-splines.*

1. *La fonction* $B_{j,k}$ *est sur chaque intervalle* $[t_i, t_{i+1}[$ *un polynôme de degré* $\leq k$.

   Support :

2. *la fonction* $B_{i,k}$ *s'annule en dehors de l'intervalle* $[t_i, t_{i+k}[$;

3. *la fonction* $B_{i,k}$ *s'annule aussi en* t_i *sauf si* $t_i = t_{i+1} = \cdots = t_{i+k} < t_{i+k+1}$ *auquel cas* $B_{i,k}(t_i) = 1$;

4. $0 < B_{i,k}(t) \leq 1$ *pour* $t \in]t_i, t_{i+k}[$;

5. *sur l'intervalle* $]t_i, t_{i+k}[$, *la fonction* $B_{i,k}$ *ne prend la valeur* 1 *que si* $t_{i+1} = \cdots = t_{i+k}$ *et en ce point seulement.*

   Partition de l'unité :

6. *sur l'intervalle* $[t_k, t_{m-k}[$, $\displaystyle\sum_{i=0}^{m-k-1} B_{i,k} \equiv 1$.

   Différentiabilité :

7. *la fonction* $B_{i,k}$ *est* C^∞ *à droite de chaque point ;*

8. *au voisinage d'un noeud de multiplicité* r*, la fonction* $B_{i,k}$ *est seulement de classe* C^{k-r}.

Preuve. Elle se déroule sur plusieurs paragraphes. La propriété de support se démontre aisément par récurrence sur k.

2.8 Partition de l'unité

Démontrons par récurrence la propriété de partition de l'unité.

Elle est clairement vraie pour $k = 0$. Supposons la établie pour les B-splines de degré $\leq k-1$. On écrit

$$\begin{aligned}\sum_{i=0}^{m-k-1} B_{i,k} &= \omega_{0,k}B_{0,k-1} + (1-\omega_{1,k})B_{1,k-1} + \omega_{1,k}B_{1,k-1} + (1-\omega_{2,k})B_{2,k-1} + \cdots + \\ &\quad + \omega_{m-k-1,k}B_{m-k-1,k-1} + (1-\omega_{m-k,k})B_{m-k,k-1} \\ &= (-1+\omega_{0,k})B_{0,k-1} + \sum_{i=0}^{m-k} B_{i,k-1}(-1+\omega_{m-k,k})B_{m-k,k-1}.\end{aligned}$$

D'après l'hypothèse de récurrence, la somme $\sum_{i=0}^{m-k} B_{i,k-1}$ vaut 1 sur l'intervalle $[t_{k-1}, t_{m-k+1}[$, donc *a fortiori* sur $[t_k, t_{m-k}[$. D'après la propriété de support, la fonction $B_{0,k-1}$ est nulle hors de l'intervalle $[t_0, t_k[$ et $B_{m-k,k-1}$ est nulle hors de $[t_{m-k}, t_m[$, donc la somme $\sum_{i=0}^{m-k-1} B_{i,k}$ vaut identiquement 1 sur l'intervalle $[t_k, t_{m-k}[$. Ceci achève la démonstration par récurrence. ∎

2.9 Continuïté

Si f est une fonction sur $\mathbf{R}$ qui admet des limites à droite et à gauche, notons $f(t+)$ (resp. $f(t-)$) ces limites.

Lemme 11 *Si* $t_{i-1} < t_i = t_{i+1} = \cdots = t_{i+r-1} < t_{i+r}$*, alors* $B_{i-1,r}(t\pm) = 1$*. Par conséquent, toutes les fonctions* $B_{j,k}$ *pour* $k \geq r$ *sont continues en* t_i.

Preuve. Montrons par récurrence sur $k \leq r$ que

$$B_{i-1,r}(t_i\pm) = B_{i-1,r-k}(t_i\pm) + B_{i,r-k}(t_i\pm) + \cdots + B_{i-1+k,r-k}(t_i\pm).$$

C'est vrai pour $k = 0$. Supposons l'énoncé démontré pour un entier k. La définition des B-splines donne, pour tout $j = i-1, \ldots, i-1+k$,

$$B_{j,r-k}(t_i\pm) = \omega_{j,r-k}(t_i)B_{j,r-k-1}(t_i\pm) + (1-\omega_{j+1,r-k}(t_i))B_{j+1,r-k-1}(t_i\pm).$$

Or $\omega_{j,r-k}(t_i) = \dfrac{t_i - t_j}{t_{j+r-k} - t_j}$ est nul sauf si $j = i-1$, auquel cas il vaut 1. Il vient

$$B_{i-1,r-k}(t_i\pm) = B_{i-1,r-k-1}(t_i\pm) + B_{i,r-k-1}(t_i\pm).$$

et pour $j = i, i+1, \ldots, i-1+k$,

$$B_{j,r-k}(t_i\pm) = B_{j+1,r-k-1}(t_i\pm),$$

d'où, en sommant et avec l'hypothèse de récurrence,

$$B_{i-1,r}(t_i\pm) = B_{i-1,r-k}(t_i\pm) + B_{i,r-k}(t_i\pm) + \cdots + B_{i-1+k,r-k}(t_i\pm).$$

Cela achève la preuve par récurrence.

Pour $k=0$, on vérifie que $B_{j,0}(t_i+)=0$ si $j=i-1,\ldots,i+r-2$ et $B_{i+r-1,0}(t_i+)=1$ donc la somme $B_{i-1,r}(t_i+)$ vaut 1. On vérifie que $B_{j,0}(t_i-)=0$ si $j=i,\ldots,i+r-1$ et $B_{i-1,0}(t_i-)=1$ donc la somme $B_{i-1,r}(t_i-)$ vaut 1. On conclut que $B_{i-1,r}$ est continue en t_i.

Comme les B-splines de degré r sont à valeurs dans $[0,1]$ et leur somme vaut 1, cela entraîne que toutes ces fonctions sont continues en t_i et toutes sauf $B_{i-1,r}$ s'annulent en t_i. La relation de récurrence qui définit les B-splines montre que les B-splines de degré $\geq r$ sont aussi continues en t_i. Ceci achève la preuve du lemme 11. ■

2.10 Différentiabilité

Lemme 12 *Pour tout $k \geq 0$, la fonction $B_{i,k}$ est dérivable à droite, de dérivée*

$$B'_{i,k} = k(\omega'_{i,k}B_{i,k-1} - \omega'_{i+1,k}B_{i+1,k-1}).$$

i.e.

$$B'_{i,k}(t) = k(\frac{B_{i,k-1}(t)}{t_{i+k}-t_i} - \frac{B_{i+1,k-1}(t)}{t_{i+k+1}-t_{i+1}}).$$

Preuve. On raisonne par récurrence sur k. C'est vrai si $k=0$. Supposons cette formule établie pour les B-splines de degré inférieur ou égal à $k-1$. En dérivant la relation de récurrence qui définit $B_{i,k}$, on obtient

$$B'_{i,k} = \omega'_{i,k}B_{i,k-1} - \omega'_{i+1,k}B_{i+1,k-1} + \omega_{i,k}B'_{i,k-1} + (1-\omega_{i+1,k})B'_{i+1,k-1}.$$

Avec l'hypothèse de récurrence,

$$\begin{aligned}\frac{1}{k-1}(\omega_{i,k}B'_{i,k-1} + (1-\omega_{i+1,k})B'_{i+1,k-1}) &= \omega_{i,k}\omega'_{i,k-1}B_{i,k-2} - \omega_{i,k}\omega'_{i+1,k-1}B_{i+1,k-2}\\ &\quad +(1-\omega_{i+1,k})\omega'_{i+1,k-1}B_{i+1,k-2} - (1-\omega_{i+1,k})\omega'_{i+2,k-1}B_{i+2,k-2}.\end{aligned}$$

Or

$$\omega_{i,k}\omega'_{i,k-1} = \frac{t-t_i}{t_{i+k}-t_i}\frac{1}{t_{i+k-1}-t_i} = \frac{t-t_i}{t_{i+k-1}-t_i}\frac{1}{t_{i+k}-t_i} = \omega_{i,k-1}\omega'_{i,k},$$

$$\begin{aligned}(1-\omega_{i+1,k})\omega'_{i+2,k-1} &= \frac{t_{i+k+1}-t}{t_{i+k+1}-t_{i+1}}\frac{1}{t_{i+k+1}-t_{i+2}}\\ &= \frac{t_{i+k+1}-t}{t_{i+k+1}-t_{i+2}}\frac{1}{t_{i+k+1}-t_{i+1}}\\ &= (1-\omega_{i+2,k-1})\omega'_{i+1,k}\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}-\omega_{i,k}\omega'_{i+1,k-1} &+ (1-\omega_{i+1,k})\omega'_{i+1,k-1}\\ &= \frac{t_i-t}{(t_{i+k}-t_i)(t_{i+k}-t_{i+1})} + \frac{t_{i+k+1}-t}{(t_{i+k+1}-t_{i+1})(t_{i+k}-t_{i+1})}\\ &= \frac{t_{i+k}-t-(t_{i+k}-t_i)}{(t_{i+k}-t_i)(t_{i+k}-t_{i+1})} + \frac{t_{i+1}-t+(t_{i+k+1}-t_{i+1})}{(t_{i+k+1}-t_{i+1})(t_{i+k}-t_{i+1})}\\ &= \frac{t_{i+k}-t}{(t_{i+k}-t_i)(t_{i+k}-t_{i+1})} + \frac{t_{i+1}-t}{(t_{i+k+1}-t_{i+1})(t_{i+k}-t_{i+1})}\\ &= -\omega_{i+1,k-1}\omega' i+1,k + (1-\omega_{i+1,k-1})\omega' i,k\end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned}
\omega_{i,k}\omega'_{i,k-1}B_{i,k-2} &- \omega_{i,k}\omega'_{i+1,k-1}B_{i+1,k-2} + (1-\omega_{i+1,k})\omega'_{i+1,k-1}B_{i+1,k-2} - (1-\omega_{i+1,k})\omega'_{i+2,k-1}B_{i+2,k-2} \\
&= \omega_{i,k-1}\omega'_{i,k}B_{i,k-2} - \omega_{i+1,k-1}\omega'_{i+1,k}B_{i+1,k-2} + (1-\omega_{i+1,k-1})\omega'_{i,k}B_{i+1,k-2} - (1-\omega_{i+2,k-1})\omega'_{i+1,k}B_{i+2,k-2} \\
&= \omega'_{i,k}(\omega_{i,k-1}B_{i,k-2} + (1-\omega_{i+1,k-1})B_{i+1,k-2}) - \omega'_{i+1,k}(\omega_{i+1,k-1}B_{i+1,k-2} + (1-\omega_{i+2,k-1})B_{i+1,k-2}) \\
&= \omega'_{i,k}B_{i,k-1} - \omega'_{i+1,k}B_{i+1,k-1}.
\end{aligned}$$

En additionnant, il vient

$$B'_{i,k} = k(\omega'_{i,k}B_{i,k-1} - \omega'_{i+1,k}B_{i+1,k-1}).$$

Cela achève la preuve du lemme 12. ∎

2.11 Fin de la preuve de la proposition 10

Le lemme 12 démontre l'existence de dérivées à droite de tous ordres.

Si t est un noeud de multiplicité r, alors les B-splines de degré r sont continues en t. Avec le lemme 12, cela entraîne que les B-splines de degré $r+1$ sont de classe C^1 au voisinage de t. Par récurrence, on montre ainsi que les B-splines de degré $k \geq r$ sont de classe C^{k-r} au voisinage d'un noeud de multiplicité r.

Ceci achève la preuve de la proposition 10. ∎

3 Courbes B-splines et courbes de Bézier

3.1 Définition

Définition 13 *On se donne un vecteur de noeuds* $\mathbf{t} = (t_0, \ldots, t_m)$ *et des points* $P_0, \ldots, P_m$ *dans* $\mathbf{R}^n$*, appelés* points de contrôle `(control points)` *qui forment ensemble le* polygone de contrôle `(control polygon)`*. La* courbe B-spline de degré k associée au vecteur de noeuds $\mathbf{t}$ et au polygone de contrôle $\mathbf{P}$ *est*

$$t \mapsto X_k(t) = \sum_i B_{i,k}(t)P_i.$$

Lorsque le vecteur de noeuds a la forme spéciale $(0,0,\ldots,0,1,1,\ldots,1)$*, où* 0 *et* 1 *apparaissent chacun* $k+1$ *fois, on parle de* courbe de Bézier*. Dans ce cas, seuls les* $k+1$ *premiers points de contrôle jouent un rôle.*

Les fonctions intervenant dans les courbes de Bézier sont donc les polynômes de Bernstein de la proposition 3.

Théorème 1 *La* k*-ième B-spline* $t \mapsto X_k(t)$ *a les propriétés suivantes.*

1. *Les composantes de* $X_k(t)$ *sont sur chaque intervalle* $[t_i, t_{i+1}[$ *des polynômes de degré* k *;*
2. *en un noeud de multiplicité* r*, la courbe est de classe* C^{k-r} *;*
3. *si* $t \in [t_i, t_{i+1}[$*,* $X_k(t)$ *ne dépend que des points de contrôle* $P_{i-k}, \cdots, P_i$ *et se trouve dans l'enveloppe convexe de ces points ;*
4. *si* $t_i = \cdots = t_{i+k} < t_{i+k+1}$ *est un noeud de multiplicité* $k+1$*, alors* $X_k(t_i) = P_i$ *et* $X'_k(t_i) = \dfrac{k}{t_{i+k+1} - t_i}(P_{i+1} - P_i)$ *;*
5. *la construction de la courbe* X_k *à partir des points de contrôle* P_i *est invariante par application affine.*

Preuve. Elle résulte des propriétés des fonctions B-splines, proposition 10. On donne seulement les détails pour le point 4. Si $t_0 = t_1 = \cdots = t_k = 0 < t_{k+1}$, alors pour tout $i = 0, \ldots, k$, $B_{i,k-i}(0) = 1$ et $B_{j,k-i} = 0$ pour $j \neq i$. En particulier $X_k(0) = P_0$ et, d'après le lemme 12,

$$X'_k(0) = \frac{k}{t_{k+1} - t_1}(P_1 - P_0). \blacksquare$$

3.2 Points et tangentes remarquables

Terminologie. On dit qu'une courbe B-spline est *vissée aux extrémités* (`clamped`) si elle est de degré k et si les noeuds extrêmes t_0 et t_m sont de multiplicité $k+1$, i.e. $t_0 = t_1 = \cdots = t_k = 0 < t_{k+1}$ et $t_{m-k} = \cdots = t_m$. Dans ce cas, le nombre de points de contrôle effectivement utiles est $m - k - 1$.

Il résulte du théorème 1 qu'une courbe vissée aux extrémités est tangente à son polygone de contrôle aux extrémités. Plus précisément

Proposition 14 *Soit X_k une courbe B-spline de degré k vissée aux extrémités. Alors $X_k(t_0) = P_0$ et $X_k(t_m = P_{m-k-1}$. Si de plus $P_1 \neq P_0$ (resp. $P_{m-k-2} \neq P_{m-k-1}$), alors la courbe est tangente en P_0 au segment P_0P_1 (resp $P_{m-k-2}P_{m-k-1}$).*

Exercice 15 Cubique passant par 2 points donnés avec des tangentes orientées donnée *Construire un vecteur de noeuds et des points de contrôle (le moins possible) dans le plan de sorte que la B-spline de degré 3 associée passe par les points $M = (1, 0)$ et $N = (3, 0)$ avec en ces deux points une tangente dirigée par $(1, 1)$.*

Proposition 16 *Une B-spline de degré 2 relative à un vecteur de noeuds simple est toujours tangente aux côtés de son polygone de contrôle. Si le polygone de contrôle possède trois sommets consécutifs P_i, P_{i-1} et P_{i-2} alignés sur une même droite D, alors la courbe B-spline cubique correspondante X_3 est tangente à D en $t = t_{i+1}$.*

Preuve. En t_{i+1}, seules deux fonctions B-splines de degré 2 sont non nulles, $B_{i,2}$ et $B_{i-1,2}$. Par conséquent $X_2(t_{i+1})$ est dans l'enveloppe convexe de P_i et P_{i-1}, i.e. sur le segment $P_{i-1}P_i$. D'après le lemme 12, le vecteur vitesse s'écrit

$$X'_2(t_{i+1}) = \sum_j \frac{2}{t_{j+2} - t_j} B_{j,1}(t_{i+1})(P_j - P_{j-1}).$$

or en t_{i+1}, une seule B-spline de degré 1 est non nulle, c'est $B_{i,1}$, donc le vecteur vitesse est positivement colinéaire à $P_{i-1}P_i$, i.e. la courbe est tangente au côté du polygone de contrôle.

En t_{i+1}, seules trois fonctions B-splines de degré 3 sont non nulles, $B_{i,3}$, $B_{i-1,3}$ et $B_{i-2,3}$. Par conséquent $X_3(t_{i+1})$ est dans l'enveloppe convexe de P_i, P_{i-1} et P_{i-2}. Si ces trois points sont alignés, $X_3(t_{i+1})$ est sur la droite qui les porte. D'après le lemme 12, le vecteur vitesse s'écrit

$$X'_3(t_{i+1}) = \sum_j \frac{3}{t_{j+3} - t_j} B_{j,2}(t_{i+1})(P_j - P_{j-1}).$$

or en t_{i+1}, seulement deux B-splines de degré 2 sont non nulles, ce sont $B_{i,2}$ et $B_{i-1,2}$, donc le vecteur vitesse est une combinaison de $P_i - P_{i-1}$ et de $P_{i-1} - P_{i-2}$. Or ces vecteurs sont colinéaires. On conclut que de nouveau la courbe est tangente au côté du polygone de contrôle. $\blacksquare$

3.3 Périodicité

Proposition 17 *Si on se donne un vecteur de noeuds et un polygone de contrôle périodiques, i.e. tels qu'il existe $I \in \mathbf{N}$ et $T \in \mathbf{R}$ tels que $t_{i+I} = t_i + T$ et $P_{i+I} = P_i$, alors les courbes B-splines correspondantes sont périodiques, i.e. pour tout entier k et tout $t \in \mathbf{R}$, $X_k(t + T) = X_k(t)$.*

Preuve. D'après la proposition 8, pour tout $t \in \mathbf{R}$,

$$\begin{aligned} X_k(t-T) &= \sum_{i\in\mathbf{Z}} B_{i,k}(t-T)P_i \\ &= \sum_{i\in\mathbf{Z}} B_{i+I,k}(t)P_i \\ &= \sum_{j\in\mathbf{Z}} B_{j,k}(t)P_{j-I} \\ &= \sum_{j\in\mathbf{Z}} B_{j,k}(t)P_j \\ &= X_k(t). \blacksquare \end{aligned}$$

Exercice 18 *Construire une courbe B-spline périodique de classe C^2 tangente aux côtés du carré de sommets $O = (0,0)$, $P = (2,0)$, $Q = (2,2)$ et $R = (0,2)$. Est-ce un cercle ?*

3.4 Symétries

Toute symétrie du polygone de contrôle compatible avec une symétrie du vecteur de noeuds (toujours satisfaite pour les vecteurs de noeuds utilisés par DesignMentor par exemple) se traduit par une symétrie de la courbe.

Proposition 19 *Soit σ une symétrie du polygone de contrôle qui préserve l'ordre des sommets, i.e. une transformation affine telle que $\sigma(P_i) = P_{i+I}$. Si le vecteur de noeuds est lui aussi périodique, i.e $t_{i+I} = t_i + T$, alors la courbe B-spline de degré k associée l'est aussi,*

$$\sigma(X_k(t)) = X_k(t+T).$$

Preuve. D'après la proposition 8, pour tout $t \in \mathbf{R}$,

$$\begin{aligned} \sigma(X_k(t)) &= \sum_{i\in\mathbf{Z}} B_{i,k}(t)\sigma(P_i) \\ &= \sum_{i\in\mathbf{Z}} B_{i,k}(t)P_{i+I} \\ &= \sum_{j\in\mathbf{Z}} B_{j-I,k}(t)P_j \\ &= \sum_{j\in\mathbf{Z}} B_{j,k}(t+T)P_j \\ &= X_k(t+T). \blacksquare \end{aligned}$$

Exercice 20 *Soit X_3 la courbe B-spline uniforme périodique de degré 3 ayant le carré unité pour polygone de contrôle. Montrer qu'elle est invariante par les rotations d'ordre 4 autour du point $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$. En déduire que l'une de ses homothétiques est tangente aux 4 côtés du carré. Est-ce un cercle ?*

Proposition 21 *Soit σ une symétrie du polygone de contrôle qui renverse l'ordre des sommets, i.e. une transformation affine telle que $\sigma(P_i) = P_{I-i}$. Si le vecteur de noeuds est lui aussi périodique, i.e $t_{m-i} = 2a - t_i$ pour $i = 0, \ldots, m$, où $m = I + k + 1$, alors la courbe B-spline de degré k associée l'est aussi,*

$$\sigma(X_k(t)) = X_k(2a - t)$$

pour tout $t \in [t_k, t_I[$.

Preuve. Pour $t \in [t_k, t_I[$,

$$\begin{aligned}
\sigma(X_k(t)) &= \sum_0^I B_{i,k}(t)\sigma(P_i) \\
&= \sum_0^I B_{i,k}(t)P_{I-i} \\
&= \sum_0^I B_{I-j,k}(t)P_j \\
&= \sum_0^I B_{m-k-1-j,k}(t)P_j \\
&= \sum_0^I B_{j,k}(2a-t)P_j \\
&= X_k(2a-t).
\end{aligned}$$

(on a appliqué la proposition 9 avec $\ell = I$). ∎

Remarque. DesignMentor n'utilise que deux types de vecteurs de noeuds, le vecteur uniforme (pour les courbes périodiques) ou des vecteurs avec des noeuds simples régulièrement espacés à l'exception des noeuds extrêmes de multiplicité $k+1$ (pour les courbes vissées aux extrémités). Dans les deux cas, la condition de symétrie demandée est satisfaite.

Exercice 22 *On reprend la courbe de l'exercice 20. Montrer qu'elle est symétrique par rapport aux diagonales et aux médianes du carré. En déduire la position des points $X_3(i)$, $i \in \mathbf{Z}$.*

Exercice 23 *On reprend la courbe de l'exercice 15. Montrer qu'elle admet une symétrie centrale.*

3.5 Continuïté par rapport à l'ensemble des paramètres

Proposition 24 *Soit $V_r \subset \mathbf{R}^{m+1}$ l'ensemble des couples $(\mathbf{t}, t)$ où $\mathbf{t}$ est un vecteur de noeud et t n'est pas un noeud de multiplicité $\geq r$. Pour $k \geq r$ et $s \leq k - r$, l'application définie sur $V_r \times \mathbf{R}^{nm}$ qui à un vecteur de noeuds $\mathbf{k}$, un temps t et un polygone de contrôle $\mathbf{P}$ associe la dérivée s-ième $X_k^{(s)}(t) \in \mathbf{R}^n$ est continue.*

Preuve. Comme $X_k^{(s)}(t)$ dépend linéairement du polygone de contrôle $\mathbf{P}$, il suffit de montrer que les coefficients, i.e. les fonctions B-splines et leurs dérivées, dépendent continûment de $(\mathbf{t}, t)$.

La formule 12 pour la dérivée permet de se ramener au cas où $s = 0$. En effet, les dénominateurs figurant dans cette formule ne s'annulent pas sur V_r.

Désormais $s = 0$. Soit $\mathbf{t}^\alpha$, t^α, une suite de vecteurs de noeuds et de temps convergeant vers $(\mathbf{t}, t) \in V_r$. Supposons que $t \in]t_\ell, t_{\ell+1}[$ n'est pas un noeud de $\mathbf{t}$. Soit $i \in \{0, \ldots, m\}$ et $j \leq k$. Sur tout segment contenu dans $]t_\ell, t_{\ell+1}[$, les fonctions $B_{i,j,\mathbf{t}^\alpha}$ sont pour α assez grand des polynômes de degré inférieur ou égal à k, à valeurs dans $[0,1]$, donc quitte à prendre une sous-suite, on peut supposer qu'ils convergent uniformément vers une fonction $C_{i,j}$. On obtient ainsi une famille de fonctions $C_{i,j}$ qui satisfont aux mêmes relations de récurrence que les B-splines. Les fonctions $C_{i,0}$, limites de fonctions constantes, sont constantes, valent 0 ou 1, une seule vaut 1 (leur somme vaut 1), c'est $C_{\ell,0}$. On conclut que $C_{i,j} = B_{i,j}$ est la B-spline associée au vecteur de noeuds $\mathbf{t}$. Ceci prouve la continuïté.

Supposons désormais que t est un noeud de multiplicité $r' \leq r$ de $\mathbf{t}$, $t = t_{\ell-r'+1} = \cdots = t_\ell = t < t_{\ell+1}$. Sur tout segment $[a,b]$ contenu dans $]t_\ell, t_{\ell+1}[$, on peut supposer que chaque polynôme $B_{i,j,\mathbf{t}^\alpha}$ (α assez grand) converge uniformément vers une fonction $C_{i,j}$. De nouveau, les relations de récurrence et les conditions initiales sont satisfaites, donc $C_{i,j}$ coïncide sur $[a,b]$ avec la B-spline

$B_{i,j}$ associée au vecteur de noeuds $\mathbf{t}$. La suite de l'argument suit la preuve du lemme 11. Par hypothèse, r' noeuds (en comptant les multiplicités) $t^\alpha_{\ell-r'+1}, \ldots, t^\alpha_\ell$ et t^α convergent vers t. Comme en 11, on montre que

$$B_{\ell-r',r',\mathbf{t}^\alpha}(t^\alpha) - B_{\ell-r'+1,0,\mathbf{t}^\alpha}(t^\alpha) - B_{\ell-r'+2,0,\mathbf{t}^\alpha}(t^\alpha) - \cdots - B_{\ell,0,\mathbf{t}^\alpha}(t^\alpha)$$

tend vers 0. Or $B_{\ell,0,\mathbf{t}^\alpha}(t^\alpha)$ vaut 0 ou 1. Ceci prouve que $B_{\ell-r',r',\mathbf{t}^\alpha}(t^\alpha)$ tend vers $1 = B_{\ell-r',r'}(t)$ et que pour $i \neq \ell - r'$, $B_{i,r',\mathbf{t}^\alpha}(t^\alpha)$ tend vers $0 = B_{i,r'}(t)$. Ceci prouve la continuïté de $(\mathbf{t}, t) \mapsto X_{r'}(t)$. Les relations de récurrence montrent alors que $(\mathbf{t}, t) \mapsto X_k(t)$ est continue pour $k \geq r'$. En effet, les dénominateurs présents dans les formules ne tendent pas vers 0. ∎

Interprétation. Que se passe-t-il lorsqu'on déforme le vecteur de noeuds ? Si k noeuds se rapprochent les uns des autres, la courbe va passer de plus en plus près d'un point de contrôle.

4 Algorithmes

4.1 Algorithme de de Casteljau

Pour calculer et tracer une courbe B-spline, plutt que de calculer symboliquement les fonctions B-splines, de les évaluer et calculer les combinaisons convexes de points de contrôle, il est plus efficace de partir des points de contrôle et d'effectuer des combinaisons convexes successives avec des poids linéaires en t, comme dans le schéma de Horner.

On se souvient que $X_k(t)$ coïncide avec la valeur en t de la courbe B-spline de degré $k-1$ associée au polygone de contrôle $P_i(t) = \omega_{i,k}(t)P_{i-1} + (1 - \omega_{i,k}(t))P_i$. C'est le point de départ de l'algorithme attribué à de Casteljau.

Proposition 25 *On fixe un vecteur de noeuds* $\mathbf{t}$ *et un polygone de contrôle* $\mathbf{P}$. *On cherche à calculer la courbe B-spline* X_k *de degré* k *correspondante.*

Soit $t \in [t_i, t_{i+1}[$. *On pose* $P^0_j = P_j$ *pour* $i - k \leq j \leq i$. *Puis, pour* $r = 0, \ldots, k-1$, *on pose*

$$P^{r+1}_j = \omega_{j,k-r}(t)P^r_j + (1 - \omega_{j,k-r}(t))P^r_{j-1}$$

pour $i - k + r + 1 \leq j \leq i$. *Alors* $P^k_i = X_k(t)$.

Pratiquement, on peut disposer les points P^r_j en triangle. Par exemple, si $k = 3$ et $t \in [t_4, t_5[$, on écrit

$$\begin{array}{ccccccc}
P_1 & & P_2 & & P_3 & & P_4 \\
& P^1_2 & & P^1_3 & & P^1_4 & \\
& & P^2_3 & & P^2_4 & & \\
& & & P^3_4 & & &
\end{array}$$

et chaque valeur de la $r+1$-ième ligne s'obtient en faisant une combinaison convexe des deux valeurs situées juste au-dessus affectées des poids respectifs $1 - \omega_{j,k-r}(t)$ (pour celui de gauche) et $\omega_{j,k-r}(t)$ (pour celui de droite).

Géométriquement, on place les points P^1_j sur les côtés du polygone de contrôle. Cela donne un nouveau polygone. On place les points P^2_j sur les côôtés de ce polygone. Cela donne un troisième polygone, sur un côté duquel on trouve $P^3_i = X_3(t)$.

Cas des courbes de Bézier. Dans ce cas particulier, les $\omega_{j,k}(t)$ qui interviennent valent tous t.

En effet, la courbe X_k est paramétrée par l'intervalle $[0, 1[= [t_k, t_{k+1}[$, donc on peut poser $i = k$. Pour tout $r = 0, \ldots, k-1$ et $j = i - k + r + 1 = r + 1, \ldots, i$, $t_{j+k-r} = 1$ et $t_j = 0$ donc $\omega_{j,3-r} = t$.

Exercice 26 *Soit* $t_0 = t_1 = t_2 = t_3 = 0$, $t_4 = t_5 = t_6 = t_7 = 1$, $P_0 = (1,0)$, $P_1 = (2,1)$, $P_2 = (2,-1)$, $P_3 = (3,0)$. *Au moyen de l'algorithme de de Casteljau, calculer* $X_3(t)$ *pour* $t \in [0,1[$. *Faire la construction géométrique pour* $t = 1/2$ *et* $t = 1/4$.

Solution de l'exercice 26. *Courbe de Bézier avec deux points et deux tangentes prescrites.*

Comme tous les $\omega_{j,3-r}$ valent t, il vient

$$\begin{array}{ccccccc}
P_0 & & P_1 & & P_2 & & P_3 \\
& (1-t)P_0 + tP_1 & & (1-t)P_1 + tP_2 & & (1-t)P_2 + tP_3 & \\
& & (1-t)^2P_0 + 2t(1-t)P_1 + t^2P_2 & & (1-t)^2P_1 + 2t(1-t)P_2 + t^2P_3 & & \\
& & & (1-t)^3P_0 + 3t(1-t)^2P_1 + 3t^2(1-t)P_2 + t^3P_3 & & &
\end{array}$$

d'où

$$X_3(t) = ((1-t)^3+6t(1-t)^2+6t^2(1-t)+3t^3, 3t(1-t)^2-3t^2(1-t)) = (1+3t-3t^2+2t^3, 3t-9t^2+6t^3).$$

Construction géométrique : elle donne pour $X_3(1/2)$ le centre du carré et pour tangente une médiane du carré.

Exercice 27 *Construire une courbe de classe* C^2 *reliant* $P = (-2,0)$ *à* $Q = (2,0)$ *avec tangente horizontale aux extrémités, en forme de bosse (resp. de boucle).*

4.2 Calcul de la dérivée

Proposition 28 *On fixe un vecteur de noeuds* $\mathbf{t}$ *et un polygone de contrôle* $\mathbf{P}$. *Les dérivées successives de la courbe B-spline* X_k *de degré* k *correspondante s'obtiennent comme suit.*

Soit $t \in [t_i, t_{i+1}[$. *On pose* $Q_j^0 = P_j$ *pour* $i - k \leq j \leq i$. *Puis, pour* $r = 0, \ldots, k-1$, *on pose*

$$Q_j^{r+1} = (k-r)\frac{1}{t_{j+k-r} - t_j}(Q_j^r - Q_{j-1}^r)$$

pour $i - k + r + 1 \leq j \leq i$ *(la convention* $Q_j^{r+1} = 0$ *si le dénominateur est nul est en vigueur). Alors la dérivée* r*-ième de* X_k *au point* t *vaut*

$$X_k^{(r)}(t) = \sum_j B_{j,k-r}(t) Q_j^r.$$

Preuve. Par récurrence sur r à partir du lemme 12. ∎

Une fois calculés les Q_j^r, on emploie l'algorithme de de Casteljau pour calculer $X_k^{(r)}(t)$.

Exercice 29 *Soit* $t_0 = t_1 = t_2 = t_3 = 0$, $t_4 = t_5 = t_6 = t_7 = 1$, $P_0 = (1,0)$, $P_1 = (2,1)$, $P_2 = (2,-1)$, $P_3 = (3,0)$. *Au moyen de l'algorithme de de Casteljau, calculer la dérivée* $X_3'(t)$ *pour* $t \in [0,1[$.

Solution de l'exercice 29. *Dérivée de la courbe de Bézier avec deux points et deux tangentes prescrites.*

Il vient $Q_j^1 = 3(P_j - P_{j-1})$ Comme tous les $\omega_{j,3-r}$ valent t, il vient

$$\begin{array}{ccccc}
3(P_1 - P_0) & & 3(P_2 - P_1) & & 3(P_3 - P_2) \\
& -3(1-t)P_0 + 3(1-2t)P_1 + 3tP_2 & & -3(1-t)P_1 + 3(1-2t)P_2 + 3tP_3 & \\
& & -3(1-t)^2P_0 + 3(1-4t+3t^2)P_1 + 3(2t-3t^2)P_2 + 3t^2P_3 & &
\end{array}$$

Soit

$$\begin{aligned}
X_3'(t) &= -3(1-t)^2(1,0) + 3(1-4t+3t^2)(2,1) + 3(2t-3t^2)(2,-1) + 3t^2(3,0) \\
&= (3-6t+6t^2, 3-18t+18t^2).
\end{aligned}$$

4.3 Ajout d'un noeud

Ajouter un noeud consiste à se donner un nouveau noeud $\hat{t}$ et à calculer un nouveau polygone de contrôle qui donne la même courbe B-spline de degré k. Si l'utilisateur se sent à l'étroit, cette procédure met à sa disposition un paramètre supplémentaire : le polygone de contrôle fourni par la machine comporte un sommet supplémentaire, que l'utilisateur pourra ensuite déplacer à sa guise.

Proposition 30 *Soit* $\mathbf{t}$ *un vecteur de noeud et* $\mathbf{P}$ *un polygone de contrôle, soit* $t \mapsto X_k(t)$ *la courbe B-spline de degré* k *correspondante. Soit* $\hat{t}$ *un noeud supplémentaire,* $\hat{t} \in [t_j, t_{j+1}[$. *On pose*

$$\begin{aligned} &= P_i \quad si \quad t_{i+k} \leq \hat{t}; \\ \hat{P}_i &= (1-\omega_{i,k}(\hat{t}))P_{i-1} + \omega_{i,k}(\hat{t})P_i \quad si \quad t_i < \hat{t} < t_{i+k}; \\ &= P_{i-1} \quad si \quad \hat{t} \leq t_i. \end{aligned}$$

Soit $\hat{X}_k$ *la courbe B-spline de degré* k *associée au vecteur de noeuds* $\hat{\mathbf{t}} = (t_0, \ldots, t_j, \hat{t}, t_{j+1}, \ldots, t_m)$ *et au polygone de contrôle* $\hat{\mathbf{P}}$. *Alors pour tout* $t \in \mathbf{R}$,

$$\hat{X}_k(t) = X_k(t).$$

Preuve. Fixons $t \in \mathbf{R}$. Il suffit de vérifier que l'opération $\mathbf{P} \mapsto \hat{\mathbf{P}}$ décrite dans l'énoncé commute avec l'opération $\mathbf{P} \mapsto \mathbf{P}^1$ de l'algorithme de de Casteljau. En effet, $X_k(t)$ (resp. $\hat{X}_k(t)$) est la valeur en t de la courbe B-spline de degré $k-1$ associée à $\mathbf{t}$ et $\mathbf{P}^1$ (resp. à $\hat{\mathbf{t}}$ et $(\hat{\mathbf{P}})^1$). Si on sait montrer que $\hat{\mathbf{P}}^1 = \hat{(}\mathbf{P^1})$, une récurrence sur k permet de conclure.

Supposons que $t_i < \hat{t} < t_{i+k-1}$. On se rappelle (et on le fait apparaître dans la notation) que $P_i^1 = P_i^1(t)$ dépend de t et que l'opération $\mathbf{P} \mapsto \hat{\mathbf{P}}$ est relative à un degré de B-spline, qui vaut k quand elle s'applique à $\mathbf{P}$ mais $k-1$ quand elle s'applique à $\mathbf{P}^1$. On doit comparer

$$\begin{aligned} \hat{(}P_i^1(t)) &= (1-\omega_{i,k-1}(\hat{t}))P_{i-1}^1(t) + \omega_{i,k-1}(\hat{t})P_i^1(t) \\ &= (1-\omega_{i,k-1}(\hat{t}))(1-\omega_{i-1,k}(t))P_{i-2} \\ &\quad +((1-\omega_{i,k-1}(\hat{t}))\omega_{i-1,k}(t) + (1-\omega_{i-1,k}(t))\omega_{i,k-1}(\hat{t})P_{i-1} \\ &\quad +\omega_{i,k-1}(\hat{t})\omega_{i,k}(t)P_i. \end{aligned}$$

à

$$\begin{aligned} (\hat{P}_i)^1(t) &= (1-\hat{\omega}_{i,k}(t))(1-\omega_{i-1,k}(\hat{t}))P_{i-2} \\ &\quad +((1-\hat{\omega}_{i,k}(t))\omega_{i-1,k}(\hat{t}) + (1-\omega_{i-1,k}(\hat{t}))\hat{\omega}_{i,k}(t))P_{i-1} \\ &\quad +\hat{\omega}_{i,k}(t)\omega_{i,k}(\hat{t})P_i, \end{aligned}$$

où

$$\hat{\omega}_{i,k}(t) = \frac{t-\hat{t}_i}{\hat{t}_{i+k}-\hat{t}_i} = \omega_{i,k-1}(t)$$

car on a supposé que $t_i < \hat{t} < t_{i+k-1}$. Or

$$\begin{aligned} (1-\omega_{i,k-1}(\hat{t}))(1-\omega_{i-1,k}(t)) &= \frac{(t_{i+k-1}-\hat{t})(t_{i+k-1}-t)}{(t_{i+k-1}-t_i)(t_{i+k-1}-t_{i-1})} \\ &= (1-\omega_{i,k-1}(t))(1-\omega_{i-1,k}(\hat{t})) \\ &= (1-\hat{\omega}_{i,k}(t))(1-\omega_{i-1,k}(\hat{t})), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (1-\omega_{i,k-1}(\hat{t}))\omega_{i-1,k}(t) \quad &+ \quad (1-\omega_{i,k-1}(\hat{t}))\omega_{i,k}(t) \\ &= \frac{(t_{i+k-1}-\hat{t})(t-t_{i-1})}{(t_{i+k-1}-t_i)(t_{i+k-1}-t_{i-1})} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
& +\frac{(t_{i+k-1}-\hat{t})(t-t_i)}{(t_{i+k-1}-t_i)(t_{i+k}-t_i)} \\
= & \frac{(t_{i+k-1}-t)(\hat{t}-t_{i-1})}{(t_{i+k-1}-t_i)(t_{i+k-1}-t_{i-1})} \\
& +\frac{(t_{i+k-1}-\hat{t})(t-t_i)}{(t_{i+k-1}-t_{i-1})(t_{i+k-1}-t_i)} \\
= & ((1-\omega_{i,k-1}(t))\omega_{i-1,k}(\hat{t})+(1-\omega_{i-1,k}(\hat{t}))\omega_{i,k-1}(t)) \\
= & (1-\hat{\omega}_{i,k}(t))\omega_{i-1,k}(\hat{t})+(1-\omega_{i-1,k}(\hat{t}))\hat{\omega}_{i,k}(t),
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\omega_{i,k-1}(\hat{t})\omega_{i,k}(t) &= \frac{(\hat{t}-t_i)(t-t_i)}{(t_{i+k-1}-t_i)(t_{i+k}-t_i)} \\
&= \omega_{i,k-1}(t)\omega_{i,k}(\hat{t}) \\
&= \hat{\omega}_{i,k}(t)\omega_{i,k}(\hat{t}).
\end{aligned}
$$

donc

$$
\hat{(}P_i^1(t)) = (\hat{P}_i)^1(t)
$$

dans ce cas. On laisse au lecteur le soiin de compléter la vérification dans les cas où $\hat{t} \leq t_i$ ou $\hat{t} \geq t_{i+k-1}$. ■

Construction géométrique.

Ca ressemble à la première étape de l'algorithme de de Casteljau. Voir des figures dans les ouvrages [HL], paragraphe 4.4 page 127 ou [F] page .

4.4 Subdivision

On a construit une courbe B-spline X_k à partir d'un vecteur de noeuds $\mathbf{t}$ et d'une polygone de contrôle $\mathbf{P}$. On est satisfait du résultat obtenu sur l'intervalle $[t_0, \tau]$ mais pas sur l'intervalle $[\tau, t_m]$. On voudrait pouvoir modifier la courbe sur le second intervalle, sans intervenir sur le premier.

Recette. On insère le noeud τ $k+1$ fois.

Cela ne change pas la courbe, mais désormais les deux moitiés de courbe sont indépendantes. En effet, les fonctions B-splines de degré k relatives à un vecteur de noeuds qui comporte un noeud τ de multiplicité $k+1$ ont leur support contenu dans $[t_0, \tau]$ ou dans $[\tau, t_m]$.

5 Convexité

5.1 Diminution de la variation

Soit H un hyperplan de $\mathbf{R}^n$ d'équation $\{u \cdot (x-P) = 0\}$. On appelle *variation* d'une courbe $t \mapsto X(t)$, $t \in [a, b]$, par rapport à H le nombre de changements de signe de la fonction $t \mapsto u \cdot (X(t) - P)$ sur $[a, b]$. On la *note* abusivement $\#(X \cap H)$. La variation d'un polygone $\mathbf{P}$ par rapport à l'hyperplan H est la variation de la courbe affine par morceaux correspondante.

Cette notion s'étend aux courbes (et polygones) périodiques. On compte les changements de signe dans une période.

Proposition 31 *Soit H un hyperplan de $\mathbf{R}^n$. Soit X_k la courbe B-spline associée au polygone de contrôle $\mathbf{P}$, restreinte à l'intervalle $[t_k, t_{m-k}]$ (pas de restriction dans le cas d'un polygone et d'un vecteur de noeuds périodiques). Alors*

$$
\#(X_k \cap H) \leq \#(\mathbf{P} \cap H).
$$

Preuve.

Insérons un noeud. Le polygone $\mathbf{P}$ est remplacé par un nouveau polygone $\mathbf{P}^1$ tel que $\#(\mathbf{P}^1 \cap H) \leq \#(\mathbf{P} \cap H)$. En effet, chaque sommet P'_i de $\mathbf{P}^1$ se trouve sur un côté $[P_{i-1}, P_i]$ de $\mathbf{P}$. Si le côté $[P^1_i, P^1_{i+1}]$ de $\mathbf{P}^1$ coupe H, nécessairement l'un des segments $[P^1_i, P_i]$ ou $[P_i, P^1_{i+1}]$ le coupe aussi. Or $\mathbf{P}$ est la réunion de ces paires de segments.

Soient $t_k < s_0 < \cdots < s_v < t_{m-k}$ des valeurs du paramètre telles que les points $X_k(s_j)$ soient de part et d'autre de H. Insérons k noeuds en chacune des valeurs $s_0, \ldots, s_v$. On obtient une courbe B-spline X_k de degré k qui paramètre γ, et dont le polygone de contrôle $\mathbf{P}'$ satisfait $\#(\mathbf{P}' \cap H) \leq \#(\mathbf{P} \cap H)$. Comme s_i est un noeud de multiplciité k, le point $X_k(s_i)$ est un sommet $P'_{j(i)}$ du polygone $\mathbf{P}'$. Comme $X_k([s_i, s_{i+1}])$ coupe H, la portion de $\mathbf{P}'$ comprise entre $P'_{j(i)}$ et $P'_{j(i+1)}$ coupe aussi H. On conclut que

$$\#(\gamma \cap H) = v \leq \#(\mathbf{P}' \cap H) \leq \#(\mathbf{P} \cap H). \blacksquare$$

5.2 Convexité dans le plan

Terminologie. On dira qu'une courbe plane est *convexe* si elle est contenue dans le bord d'un convexe.

Lemme 32 *Une courbe plane lisse par morceaux est convexe si et seulement si toute droite transverse la coupe en au plus deux points.*

Preuve. Soit γ une courbe plane lisse par morceaux et convexe, i.e. contenue dans le bord d'un convexe C. Soit D une droite transverse à γ, i.e. D coupe γ en des points lisses et en ces points, γ n'est pas tangente à D. Alors $\partial_D(C \cap D) = (\partial C) \cap D$. Or $C \cap D$ est convexe, donc c'est un intervalle de D, et son bord (qui contient $\gamma \cap D$) a au plus deux points.

Inversement, soit γ une courbe plane lisse par morceaux. Notons C son enveloppe convexe. Supposons que toute droite transverse coupe γ en au plus deux points. Montrons par l'absurde que γ est contenu dans le bord de C. Supposons qu'il existe un point M de γ qui est intérieur à C. Alors M est barycentre à coefficients strictements positifs de points de γ, donc est intérieur à un triangle dont les sommets P, Q et R sont sur γ. On peut déplacer légèrement ces points sur γ en conservant le fait que M est à l'intérieur du triangle PQR. On peut donc supposer (voir cours de topologie) que les droites PQ, QR et RP sont transverses à γ.

Les points P, Q et R délimitent 4 arcs le long de la courbe γ, et M se trouve ou bien entre deux des points P, Q et R, ou bien sur l'une des extrémités libres.

Dans le premier cas, convenons que M se trouve sur l'arc délimité par P et Q. Par hypothèse, la droite PQ coupe γ en au plus deux points, donc en P et en Q seulement. Par conséquent, l'intérieur de l'arc de courbe de P à Q est du même côté de la droite PQ que M, i.e., du même côté que R. Par transversalité, la courbe traverse la droite en P et en Q donc la droite PQ sépare R des autres arcs délimités sur γ par P et Q. Or l'un de ces arcs contient R, contradiction.

Dans le second cas, convenons qu'en parcourant γ on rencontre successivement M, P, Q et R. Comme γ ne coupe la droite PR qu'en P et R, l'arc PR de γ est d'un seul côté de la droite PR, i.e. la droite PR sépare Q de l'arc PR, contradiction.

On conclut que tout point de γ est sur le bord de C, donc γ est convexe. $\blacksquare$

Corollaire 33 *Si le polygone de contrôle est plan et convexe, alors la courbe B-spline associée est convexe.*

Exercice 34 *Montrer qu'aucune courbe convexe ne satisfait les conditions aux limites de l'exercice 15. Construire une solution de l'exercice 15 qui coupe toute droite en au plus* 3 *points.*

6 Courbure et condition de raccord

Proposition 35 *Soit γ la courbe B-spline de degré $k \geq 2$ associée à un vecteur de noeuds $\mathbf{t}$ tel que $t_0 = \cdots = t_k < t_{k+1}$ et à un polygone de contrôle $\mathbf{P}$ tel que $P_0 \neq P_1$. Notons c la longueur du côté P_0P_1 et A l'aire du triangle de sommets P_0, P_1 et P_2 (elle a un signe dans le cas des courbes tracées dans un plan orienté). Alors la courbe γ a pour origine P_0. Sa tangente en ce point est la demi-droite P_0P_1 et sa courbure en ce point est*

$$\kappa = \frac{k-1}{k}\frac{t_{k+1}-t_k}{t_{k+2}-t_k}\frac{2A}{c^3}.$$

Si $A \neq 0$, le plan osculateur en P_0 est le plan contenant P_0, P_1 et P_2.

Supposons $A \neq 0$ et $k \geq 3$. Alors la torsion de la courbe au point P_0 vaut

$$\theta = \frac{k-2}{k}\frac{t_{k+1}-t_k}{t_{k+3}-t_k}\frac{3V}{2A^2}$$

où V est le volume du simplexe de sommets P_0, P_1, P_2 et P_3.

Preuve. D'après la proposition 10, comme t_0 est un noeud de multiplicité k,

$$B_{0,k}(t_0) = B_{1,k-1}(t_0) = B_{2,k-2}(t_0) = 1$$

et les autres $B_{j,\ell}$, $\ell = k-2$, $k-1$, k sont nulles en t_0. D'après la proposition 28,

$$X_k^{(r)}(t_0) = \sum_j B_{j,k-r}(t_0)Q_j^r = Q_r^r$$

où $Q_j^0 = P_j$ et

$$Q_j^{r+1} = (k-r)\frac{1}{t_{j+k-r}-t_j}(Q_j^r - Q_{j-1}^r)$$

Il vient $X_k(t_0) = Q_0^0 = P_0$,

$$X_k'(t_0) = Q_1^1 = \frac{k}{t_{k+1}-t_1}(P_1 - P_0)$$

et

$$X_k''(t_0) = Q_2^2 = \frac{k-1}{t_{k+1}-t_2}(Q_2^1 - Q_1^1)$$

d'oùù

$$\begin{aligned} X_k'(t_0) \wedge X_k''(t_0) &= \frac{k-1}{t_{k+1}-t_2}Q_2^1 \wedge Q_1^1 \\ &= \frac{k^2(k-1)}{(t_{k+1}-t_k)^2(t_{k+2}-t_k)}(P_1-P_0)\wedge(P_2-P_1). \end{aligned}$$

Par définition, la courbure vaut

$$\frac{\| X' \wedge X'' \|}{\| X' \|^3}$$

(pas de norme en dimension 2), donc

$$\kappa = \frac{k-1}{k}\frac{t_{k+1}-t_k}{t_{k+2}-t_k}\frac{\| (P_1-P_0)\wedge(P_2-P_1) \|}{\| P_1 - P_0 \|^3}.$$

et on reconnaît dans $\| (P_1-P_0)\wedge(P_2-P_1) \| /2$ (resp. sans norme en dimension 2) l'expression de l'aire (resp. algébrique) du triangle $P_0P_1P_2$.

Si $k \geq 3$, alors $B_{3,k-3}(t_0) = 1$ et les autres $B_{j,k-3}$ sont nulles en t_0. Par conséquent $X_k'''(t_0) = Q_3^3$. Il vient

$$\begin{aligned}
\det(X_k'(t_0), X_k''(t_0), X_k'''(t_0)) &= \det(Q_1^1, Q_2^2, Q_3^3) \\
&= \frac{k(k-1)(k-2)}{(t_{k+1}-t_0)^3} \det(Q_1^0, Q_2^1, Q_3^2) \\
&= \frac{k(k-1)(k-2)}{(t_{k+1}-t_0)^3} \frac{k(k-1)}{(t_{k+2}-t_0)^2} \det(Q_1^0, Q_2^0, Q_3^1) \\
&= \frac{k^2(k-1)^2(k-2)}{(t_{k+1}-t_0)^3(t_{k+2}-t_0)^2} \frac{k}{t_{k+3}-t_0} \det(Q_1^0, Q_2^0, Q_3^0) \\
&= \frac{k^3(k-1)^2(k-2)}{(t_{k+1}-t_0)^3(t_{k+2}-t_0)^2(t_{k+3}-t_0)} 6V.
\end{aligned}$$

On termine à l'aide de la formule 30

$$\theta = \frac{\det(X_k'(t_0), X_k''(t_0), X_k'''(t_0))}{\| X_k'(t_0) \wedge X_k''(t_0) \|^2}$$

du cours sur la courbure des courbes. ■

Attention. La formule simple ci-dessus n'est valable qu'aux noeuds de multiplicité $k+1$.

Généralisation. Rien n'empêche de calculer la dérivée de la courbure par rapport à l'abscisse curviligne. Toutefois, la formule n'est pas belle.

Exercice 36 Courbure à l'origine d'une courbe de Bézier *Calculer la courbure au point M de la courbe de Bézier construite dans l'exercice 15.*

7 NURBS

7.1 Courbes rationnelles

Un cercle ne peut pas être paramétré par des polynômes. En effet, si P et Q sont des polynômes non constants, $P^2 + Q^2$ est un polynôôme non constant.

En revanche, le cercle unité admet une paramétrisation rationnelle

$$t \mapsto (\frac{1-t^2}{1+t^2}, \frac{2t}{1+t^2}).$$

Exercice 37 *Une* cônique *est une courbe plane définie par une équation du second degré (i.e. le lieu des zéros d'un polynôme en deux variables de degré total 2). Soit C une cônique non vide et non dégénérée (i.e. non réduite à une ou 2 droites) et P un point de C. En coupant C par les droites passant par P, montrer que C admet une paramétrisation rationnelle.*

Définition 38 *Une courbe paramétrée est dite* rationnelle par morceaux *si sur chaque intervalle d'une subdivision, chaque coordonnée est donnée par une fraction rationnelle (i.e. le quotient de deux polynômes) du paramètre.*

7.2 Projection centrale

Réalisons l'espace affine $\mathbf{R}^n$ comme l'hyperplan affine d'équation $\{x_0 = 1\}$ dans l'espace vectoriel $\mathbf{R}^{n+1}$. La *projection centrale* de $\mathbf{R}^{n+1}$ privé de l'hyperplan vectoriel $\{x_0 = 0\}$ vers $\mathbf{R}^n$ est définie comme suit : la projection d'un vecteur v non nul est l'intersection de la droite engendrée par v avec l'hyperplan $\mathbf{R}^n$. Analytiquement, elle s'écrit

$$(v_0, \ldots, v_n) \mapsto (\frac{v_1}{v_0}, \ldots, \frac{v_n}{v_0}).$$

La projection centrale envoie les segments de droites ne rencontrant pas l'hyperplan $\{x_0 = 0\}$ sur des segments de droites. En particulier, sa restriction au demi-espace $\{x_0 > 0\}$ envoie segment sur segment, donc préserve la convexité.

Toute courbe rationnelle dans $\mathbf{R}^n$ s'obtient par projection centrale d'une courbe polynômiale tracée dans $\mathbf{R}^{n+1}$. En effet, quitte à réduire au même dénominateur, une courbe paramétrée rationnelle s'écrit

$$t \mapsto X(t) = (\frac{Q_1(t)}{Q_0(t)}, \ldots, \frac{Q_n(t)}{Q_0(t)})$$

où les Q_i sont des polynômes en t. Alors X est la projection centrale de la courbe polynômiale

$$t \mapsto X(t) = (Q_0(t), \ldots, Q_n(t)) \in \mathbf{R}^{n+1}.$$

7.3 Transformations projectives

Par définition, une *transformation projective* de $\mathbf{R}^n$ est une application f définie sur $\mathbf{R}^n$ (éventuellement privé d'un hyperplan affine) telle qu'il existe une matrice carrée inversible A de taille $n+1$ telle que $f(P)$ soit la projection centrale de $A(1, P)$.

Les bijections affines de $\mathbf{R}^n$ sont des transformations projectives particulières (prendre pour A une matrice dont la première ligne est $(1, 0, \ldots, 0)$). Ce sont exactement les transformations projectives définies sur $\mathbf{R}^n$ entier.

Les transformations projectives du plan préservent les côniques.

Il y a beaucoup de transformations projectives. Etant donnés deux quadrilatères plans non dégénérés (pas de côtés alignés), il existe une et une seule transformation projective du plan envoyant l'un sur l'autre.

7.4 B-splines rationnelles

Définition 39 *Soit* $\mathbf{t}$ *un vecteur de noeuds, soit* $\mathbf{P}$ *un polygone de contrôle dans* $\mathbf{R}^n$ *et* w_i *des poids* `(weights)` *attachés à chaque point de contrôle* P_i*. On suppose que les poids ne sont pas tous nuls. La* courbe B-spline rationnelle `(NURBS)` *de degré* k *associée à ces données est la courbe paramétrée par*

$$t \mapsto X(t) = \frac{\sum_i w_i B_{i,k}(t) P_i}{\sum_i w_i B_{i,k}(t)}.$$

Lorsque le vecteur de noeuds prend la forme spéciale $(0, 0, \ldots, 0, 1, 1, \ldots, 1)$*, on parle de* courbe de Bézier rationnelle.

Autrement dit, la courbe B-spline rationnelle est la projection centrale de la courbe B-spline dans $\mathbf{R}^{n+1}$ associée au vecteur de noeuds $\mathbf{t}$ et aux points de contrôle $R_i = (w_i, w_i P_i) \in \mathbf{R}^{n+1}$. Noter que le polygone de contrôle $\mathbf{P}$ est la projection centrale du polygone $\mathbf{R}$. D'autre part, multiplier tous les poids par une même constante non nulle ne change rien.

Exemple. Le quart de cercle unité comme courbe de Bézier rationnelle quadratique.

On pose $P_0 = (1, 0)$, $P_1 = (1, 1)$ et $P_2 = (0, 1)$, $w_0 = w_1 = 1$, $w_2 = 2$. On choisit comme vecteur de noeuds $(0, 0, 0, 1, 1, 1)$. Alors la courbe de Bézier rationnelle de degré 2 obtenue est donnée pour $t \in [0, 1[$ par

$$t \mapsto (\frac{1-t^2}{1+t^2}, \frac{2t}{1+t^2}).$$

Son image est exactement un quart du cercle unité.

Exercice 40 *Vérifier que la courbe B-spline rationnelle de degré 2 associée au polygone de contrôle* $P_0 = (1, 1)$*,* $P_2 = (0, 1)$*,* $P_2 = (-1, 1)$*,* $P_3 = (-1, 0)$*,* $P_4 = (-1, -1)$*,* $P_5 = (0, -1)$*,* $P_6 = (1, -1)$*,* $P_7 = (1, 0)$ *et* $P_{i+8} = P_i$*, aux poids* $w_{2j+1} = 1$*,* $w_{2j} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ *et au vecteur de noeuds* $t_{2j} = t_{2j+1} = j$ *est une paramétrisation périodique de période 4 du cercle unité.*

7.5 Propriétés des courbes B-splines rationnelles

Elles se déduisent immédiatement des propriétés des courbes B-splines et de celles de la projection centrale.

Proposition 41 *Soit* $\mathbf{t}$ *un vecteur de noeuds,* $\mathbf{P}$ *un polygone de contrôle et* $\mathbf{w}$ *un vecteur de poids non nul. La courbe B-spline rationnelle* X_k *de degré* k *associée à ces données a les propriétés suivantes.*

1. *Sur chaque intervalle* $[t_i, t_{i+1}[$, *les coordonnées de* X *sont des fractions rationnelles de degré* k *(i.e. quotients de deux polynômes de degré* k*).*
2. *En un noeud de multiplicité* r, *la courbe* X *est de classe* C^{k-r}.
3. *Si le vecteur de noeuds, le polygone de contrôle et le vecteur de poids sont périodiques, alors la courbe est périodique.*
4. *Si* $t_0 = t_1 = \ldots = t_k < t_{k+1}$ *est un noeud de multiplicité* $k+1$, *et si les poids* w_0 *et* w_1 *sont non nuls, alors la courbe* X_k *est tangente en* P_0 *au polygone de contrôle.*
5. *Supposons le vecteur de noeud simple. Si* $k = 2$, *la courbe* X_2 *est tangente à chaque côté du polygone de contrôle. Si* $k = 3$ *et si trois sommets successifs de* $\mathbf{P}$ *sont sur une même droite* D, *celle-ci est tangente à la courbe* X_3.
6. *Si* $t \in [t_i, t_{i+1}[$, *le point* $X_k(t)$ *ne dépend que les points de contrôle* $P_{i-k}, P_{i-k+1}, \ldots, P_i$ *et des poids* $w_{i-k}, w_{i-k+1}, \ldots, w_i$. *Si de plus les poids sont tous positifs ou nuls,* $X_k(t)$ *est dans l'enveloppe convexe des points* $P_{i-k}, P_{i-k+1}, \ldots, P_i$.
7. *Si* H *est un hyperplan affine de* $\mathbf{R}^n$, *alors*

$$\#(X_k([t_k, t_m]) \cap H \leq \#\mathbf{P} \cap H.$$

   En particulier, si le polygone $\mathbf{P}$ *est convexe, la courbe* $X_k([t_k, t_m])$ *est convexe.*

8. *Soit* f *une transformation projective. Alors* $f(X)$ *est une courbe B-spline rationnelle associée au vecteur de noeuds* $\mathbf{t}$, *au polygone de contrôle* $f(\mathbf{P})$ *et à un nouveau vecteur de poids* $\mathbf{w}'$.

Exercice 42 *Montrer que toute courbe de Bézier rationnelle de degré 2 est contenue dans une cônique.*

7.6 Dérivées, courbure

Les formules pour les dérivées successives d'une courbe B-spline rationnelle se déduisent de celles relatives aux courbes B-splines. On n'énonce que le cas particulier des dérivées aux extrémités.

Proposition 43 *Soit* $\mathbf{t}$ *un vecteur de noeuds,* $\mathbf{P}$ *un polygone de contrôle et* $\mathbf{w}$ *un vecteur de poids non nul. Soit* $k \geq 2$. *On note* X_k *la courbe B-spline rationnelle de degré* k *associée à ces données. Supposons que* $t_0 = t_1 = \ldots = t_k < t_{k+1}$ *et que* $P_0 \neq P_1$. *Alors* $X_k(t_k) = P_0$,

$$X_k'(t_k) = \frac{k}{t_{k+1} - t_k} \frac{w_1}{w_0}(P_1 - P_0),$$

$$X_k'(t_k) \wedge X_k''(t_k) = \frac{k^2(k-1)}{(t_{k+1} - t_k)^2(t_{k+2} - t_k)} \frac{w_1 w_2}{w_0^2}(P_1 - P_0) \wedge (P_2 - P_0)$$

et si w_0 *et* w_1 *sont non nuls, la courbure au point* P_0 *vaut*

$$\kappa = \frac{k-1}{k} \frac{t_{k+1} - t_k}{t_{k+2} - t_k} \frac{w_1 w_2}{w_0^2} \frac{2A}{c^3}$$

où A est l'aire (algébrique pour une courbe tracée dans un plan orienté) du triangle $P_0P_1P_2$ et c la longueur du côté P_0P_1.

Supposons que $k \geq 3$, que w_0, w_1 et κ sont non nuls. Alors la torsion de la courbe en P_0 vaut

$$\theta = \frac{k-2}{k}\frac{t_{k+1}-t_k}{t_{k+3}-t_k}\frac{w_0w_3}{w_1w_2}\frac{3V}{2A^2}$$

oùù V est le volume du simplexe de sommets P_0, P_1, P_2 et P_3.

Il y a un énoncé correspondant à l'autre extrémité t_m : remplacer t_i par t_{m-i}, w_i par $w_{m-k-1-i}$ et P_i par $P_{m-k-1-i}$.

Preuve. Comme tout est invariant par translation, on peut supposer que $P_0 = 0$, de sorte que $X(t_0) = P_0 = 0$. Si X est la projection centrale d'une courbe Y, alors

$$Y = (x_0, x_0X), \quad Y' = (x_0', x_0'X + x_0X').$$

Par conséquent $w_0X_k'(t_0) = Z(t_0)$ où Z est la courbe B-spline de degré k de points de contrôle les w_iP_i. La proposition 28 donne

$$Z'(t_0) = \frac{k}{t_{k+1}-t_0}(w_1P_1 - w_0P_0)$$

donc

$$X_k'(t_0) = \frac{k}{t_{k+1}-t_0}\frac{w_1}{w_0}P_1.$$

On dérive une seconde fois.

$$Y'' = (x_0'', x_0''X + 2x_0'X' + x_0X'')$$

donne

$$w_0^2X_k'(t_0) \wedge X_k''(t_0) = (x_0'X + x_0X') \wedge (x_0''X + 2x_0'X' + x_0X'') = Z'(t_0) \wedge Z''(t_0)$$

On utilise à nouveau la proposition 28 (voir aussi la preuve de la proposition 35). Comme on a supposé que $P_0 = 0$,

$$Z'(t_0) \wedge Z''(t_0) = \frac{k^2(k-1}{(t_{k+1}-t_0)^2(t_{k+2}-t_0)}w_1P_1 \wedge w_2P_2$$

et enfin

$$X_k'(t_0) \wedge X_k''(t_0) = \frac{k^2(k-1}{(t_{k+1}-t_k)^2(t_{k+2}-t_k)}\frac{w_1w_2}{w_0^2}P_1 \wedge P_2.$$

Supposons que $k \geq 3$. On dérive une troisième fois.

$$Y''' = (x_0''', x_0'''X + 3x_0''X' + 3x_0'X'' + x_0X''')$$

donne

$$\begin{aligned}
w_0^3 \det(X_k'(t_0), X_k''(t_0), X_k'''(t_0)) &= \det(x_0'X + x_0X', x_0''X + 2x_0'X' + x_0X'', \\
&\qquad x_0'''X + 3x_0''X' + 3x_0'X'' + x_0X''') \\
&= \det(Z'(t_0), Z''(t_0), Z'''(t_0)) \\
&= \frac{k^3(k-1)^2(k-2)}{(t_{k+1}-t_0)^3(t_{k+2}-t_0)^2(t_{k+3}-t_0)}\det(w_1P_1, w_2P_2, w_3P_3)
\end{aligned}$$

soit

$$\det(X_k'(t_0), X_k''(t_0), X_k'''(t_0)) = \frac{k^3(k-1)^2(k-2)}{(t_{k+1}-t_0)^3(t_{k+2}-t_0)^2(t_{k+3}-t_0)}\frac{w_1w_2w_3}{w_0^3}6V.$$

et on conclut avec la formule

$$\theta = \frac{\det(X', X'', X''')}{\| X' \wedge X'' \|^2}. \blacksquare$$

Corollaire 44 *Soit $k \geq 2$. Soient $\mathbf{t}$ et $\bar{\mathbf{t}}$ deux vecteurs de noeuds tels que t_0 (resp $\bar{t}_m$ soit de multiplicité $k+1$. Soient $\mathbf{P}$ et $\bar{\mathbf{P}}$ deux polygones de contrôle dont le premier côté est de longueur non nulle. Soient $\mathbf{w}$ et $\bar{\mathbf{w}}$ deux vecteurs de poids tels que w_0, w_1, $\bar{w}_{m-k-2}$ et $\bar{w}_{m-k-1}$ sont non nuls. On note X_k et $\bar{X}_k$ les courbes B-splines rationnelles de degré k associée à ces données. Notons γ la courbe obtenue en mettant ces deux NURBS bout à bout. Alors*

- *La courbe γ est de classe GC^0 si et seulement si $P_0 = \bar{P}_{m-k-1}$;*
- *γ est de classe GC^1 si et seulement si $P_0 = \bar{P}_{m-k-1}$ et les points $\bar{P}_{m-k-2}$, P_0 et P_1 sont alignés dans cet ordre sur une droite D ;*
- *γ est de classe GC^2 si et seulement si $P_0 = \bar{P}_{m-k-1}$, les points $\bar{P}_{m-k-2}$, P_0 et P_1 sont alignés dans cet ordre sur une droite D, les points $\bar{P}_{m-k-3}$, P_2 et la droite D sont dans un même plan π et l'équation*

$$\frac{t_{k+2}-t_k}{t_{k+1}-t_k}\frac{w_1 w_2}{w_0^2}\frac{A}{c^3} = \frac{\bar{t}_m - \bar{t}_{m-k-2}}{\bar{t}_m - \bar{t}_{m-k-1}}\frac{\bar{w}_{m-k-3}\bar{w}_{m-k-2}}{\bar{w}_{m-k-1}^2}\frac{\bar{A}}{\bar{c}^3}$$

  est satisfaite, où A (resp. $\bar{A}$) est l'aire algébrique du triangle $P_0P_1P_2$ (resp. $\bar{P}_{m-k-3}\bar{P}_{m-k-2}\bar{P}_{m-k-1}$) dans le plan π et c (resp. $\bar{c}$) la longueur du côté P_0P_1 (resp. $\bar{P}_{m-k-2}\bar{P}_{m-k-1}$).

Preuve. On combine la proposition 43 avec le théorème 5 du cours sur la courbure des courbes. L'hypothèse de coplanarité garantit que les NURBS ont la même normale en P_0. L'équation comporte une égalité de signes. Elle entraîne d'une part l'égalité des courbures, et d'autre part le fait que les normales orientées coïncident. ■

Remarque. De la même façon, on peut écrire la condition de raccord GC^3, en dimension 2 ou bien en dimension 3 lorsque P_0 n'est pas un point d'inflexion. La condition d'égalité des dérivées de courbure est plutôt compliquée.

Remarque. Etant donnés deux polygones de contrôle satisfaisant aux conditions d'alignement et de coplanarité du corollaire 44, il est toujours possible d'ajuster les poids pour compléter la continuïté GC^2.

Exemple. Partons de la courbe en bosse de l'exercice 27. Tâchons de la raccorder à une droite horizontale en gardant le même polygone de contrôle et le même vecteurs de noeuds. Il suffit d'annuler la courbure, par exemple en introduisant les poids $w_2 = 0$, $w_0 = w_1 = w_3 = w_4 = 1$. La courbe obtenue est un segment de droite. Pour raccorder la courbe en bosse au cercle de rayon 1 de tangente horizontale en $(-2,0)$, situé au-dessus de la courbe en bosse, il suffit de rendre la courbure égale à 1. Or la courbure vaut initialement $2/3(2-a)^2$. On pose $w_0 = w_4 = 1$, $w_1 = w_2 = w_3 = 6-3a$. Pour raccorder la courbe en bosse à l'autre cercle de rayon 1 de tangente horizontale en $(-2,0)$, il suffit de changer un signe, par exemple celui de w_2.

Exercice 45 *Sans changer de polygone de contrôle, peut on déformer la courbe de Bézier cubique de l'exercice 15 en une courbe de Bezier cubique rationnelle γ telle qu'en raccordant γ à sa translatée de vecteur $(2,0)$, on obtienne une courbe de classe GC^2 ?*

7.7 Effet des poids

On se limite au cas où les poids sont positifs ou nuls. Clairement, si on décrit un point Q de $\mathbf{R}^n$ comme barycentre de points P_i avec poids positifs ou nuls w_i, lorsque le rapport $w_i/\sum w_i$ tend vers l'infini, le point Q se rapproche de P_i. Par conséquent, augmenter le poids d'un point de contrôle rapproche la courbe de ce point. On trouvera des figures illustrant ce phénomène dans le livre [HL].

7.8 Généralisation

Soient $Q_0, \ldots, Q_m$ des points de $\mathbf{R}^n$. Considérons la courbe paramétrée

$$t \mapsto X(t) = \frac{\sum_i B_{i,k}(t) Q_i}{\sum_i B_{i,k}(t)}.$$

Si les poids w_i sont tous non nuls, alors X est la courbe B-spline rationnelle associée aux points de contrôle $P_i = w_i^{-1} Q_i$. Si on autorise que certains poids soient nuls, on obtient une classe plus large de courbes. Partant d'une vraie NURBS ($w_i \neq 0$), faisons tendre certains poids (mais pas tous) vers 0. Les points P_i correspondant tendent vers l'infini dans la direction Q_i. Autrement dit, les Q_i tels que $w_i = 0$ doivent être considérés comme des vecteurs indiquant qu'un point de contrôle P_i est parti à l'infini. Ce point de vue est développé dans le livre [N] de G. Farin.

8 Interpolation

Interpoler une famille de N points Q_j de $\mathbf{R}^n$ par une courbe B-spline, c'est trouver une courbe B-spline qui passe par ces points. Le problème se divise en deux phases.

Première phase : On se donne un vecteur de noeuds $\mathbf{t}$, N valeurs $s_j \in [t_0, t_m]$ et on cherche un polygone de contrôle $\mathbf{P}$ tel que la courbe B-spline X_k correspondante satisfasse $X(s_j) = Q_j$. L'interpolation se traduit alors par la résolution d'un système linéaire.

Deuxième phase : on cherche à optimiser le choix des valeurs s_j puis du vecteur de noeuds. C'est typiquement non linéaire.

8.1 Le problème linéaire

Il y a des conditions nécessaires sur les valeurs s_j. Par exemple, supposons que $k = 1$ et que 3 des s_j soient dans le même intervalle $[t_i, t_{i+1}[$. Comme X_1 est affine sur $[t_i, t_{i+1}[$, elle ne peut interpoler 3 points Q_j que si ces points sont alignés. On va donner une condition nécessaire et suffisante dans deux situations,

1. lorsque $m = N + k$, $t_0 = \cdots = t_k$ et $t_{m-k} = \cdots = t_m$;
2. lorsque N est impair, $Q_{j+N} = Q_j$, $s_{j+N} = s_j + T$, $t_{i+N} = t_i + T$, on cherche un polygone de contrôle fermé $P_{i+N} = P_i$ de sorte que la courbe interpolante soit périodique.

Le problème à résoudre s'écrit

$$\forall j = 0, \ldots, N-1, \quad \sum_{i=0}^{N-1} B_{i,k}(s_j) P_i = Q_j.$$

Il possède une solution unique si et seulement si la matrice carrée A de coefficients $A_{i,j} = B_{i,k}(s_j)$ est inversible.

Lemme 46 *Si la matrice A est inversible, alors ses coefficients diagonaux $B_{j,k}(s_j)$ sont non nuls.*

Preuve. Supposons que $A_{jj} = B_{j,k}(s_j) = 0$. Alors ou bien $s_j \leq t_j$, ou bien $s_j \geq t_{j+k+1}$. Si $s_j \leq t_j$, alors pour tout $i \geq j$ et tout $\ell \leq j$, $s_\ell \leq t_i$ et donc $A_{i\ell} = B_{i,k}(s_\ell) = 0$. Par conséquent, les $j+1$ premières lignes de la matrice A ont leurs $N+1-j$ dernières composantes nulles. Elles sont nécessairement linéairement dépendantes, et A n'est pas inversible.

De même, si $s_j \geq t_{j+k+1}$, alors pour tout $i \leq j$ et tout $\ell \geq j$, $s_\ell \geq t_{i+k+1}$ et donc $A_{i\ell} = B_{i,k}(s_\ell) = 0$, et A n'est pas inversible. pour la même raison. ∎

Remarque. D'après la proposition 10, $B_{j,k}(s_j) \neq 0$ si et seulement si $s_j \in]t_i, t_{i+k+1}[$ (cas périodique) avec l'exception $s_0 = t_0$ ou $s_{N-1} = t_m$ (cas où les noeuds extrêmes sont de multiplicité $k+1$.

On va démontrer une réciproque du lemme 46. La preuve repose sur deux faits.

- les fonctions B-splines sont linéairement indépendantes ;
- une amélioration de la propriété de diminution de la variation.

Lemme 47 *Sur chaque intervalle $[t_i, t_{i+1}[$ non vide, les fonctions B-splines de degré k non identiquement nulles sont linéairement indépendantes.*

Preuve. On raisonne par récurrence sur k. Pour $k = 0$, il n'y a qu'une fonction B-spline non nulle par intervalle.

Les fonctions B-splines de degré k non identiquement nulles sur $[t_i, t_{i+1}[$ sont $B_{i-k,k}, \dots, B_{i,k}$. Soient $P_{i-k}, \dots, P_i$ des réels tels que la fonction $X_k = \sum_j B_{j,k} P_j$ soit identiquement nulle sur l'intervalle $[t_i, t_{i+1}[$. D'après le lemme 12,

$$X'_k = \sum_{j=i-k}^{i} B_{j,k-1} \frac{k}{t_{i+k} - t_i} (P_j - P_{j-1}).$$

Cette fonction est nulle sur $[t_i, t_{i+1}[$. D'après l'hypothèse de récurrence, les fonctions $B_{i-k+1,k-1}$,..., $B_{i,k-1}$ sont linéairement indépendantes sur cet intervalle, donc pour $j = i-k+1, \dots, i$, $P_j - P_{j-1} = 0$. Autrement dit, $P_{i-k} = \dots = P_i$. Il vient

$$X_k = P_i (\sum_{j=i-k}^{i} B_{j,k}) = P_i = 0$$

donc $P_{i-k} = \dots = P_i = 0$ et on conclut que les fonctions $B_{i-k,k}, \dots, B_{i,k}$ sont linéairement indépendantes sur $[t_i, t_{i+1}[$. ∎

Lemme 48 *Soient* $\mathbf{t}$ *un vecteur de noeuds et* $\mathbf{P}$ *une suite de réels. On suppose*

1. *ou bien que les neuds extrêmes sont de multiplicité $k+1$, $t_0 = \dots = t_k$ et $t_{m-k} = \dots = t_m$, et on note $N = m - k$;*
2. *ou bien que le vecteur de noeuds est périodique, $t_{i+N} = t_i + T$;*
3. *ou bien que $P_0 = \dots = P_k = 0$ et $P_{N-k} = \dots = P_N = 0$;*
4. *ou un mélange de 1. et 3.*

Soit f la fonction déééfinie sur $D_f = [t_0, t_m]$ (resp. sur $D_f = \mathbf{R}/T\mathbf{Z}$) par

$$f(t) = \sum_{i=0}^{N-1} B_{i,k}(t) P_i.$$

Notons $Z(f)$ le nombre de composantes connexes de $D_f \cap f^{-1}(0)$ et $Z(\mathbf{P})$ le nombre correspondant pour le polygone $\mathbf{P}$. Alors

$$Z(f) \le Z(P).$$

Preuve.

Pour ϵ réel, notons $P_i^\epsilon = P_i + \epsilon$. La fonction B-spline correspondante est $f^\epsilon = f + \epsilon$. D'après le théorème de Sard (voir [M]), pour presque tout ϵ, f^ϵ et $f^{-\epsilon}$ s'annule transversalement donc change de signe à chacun de ses zéros. Par conséquent, le nombre de zéros de $Z(f^{\pm\epsilon})$ est égal à la variation. D'après la propriété de diminution de la variation,

$$Z(f^{\pm\epsilon}) \le N - 1.$$

Notons v (resp. v_+, resp v_-) est le nombre de composantes de $f^{-1}(0)$ au voisinage desquelles f change de signe (resp. reste positive ou nulle, resp. reste négative ou nulle).

Cas périodique. Au voisinage d'une composante où f change de signe (resp. reste positive ou nulle), f^ϵ possède au moins 1 (resp. 2) zéros. Par conséquent

$$v + 2v_+ \leq Z(f^\epsilon), \quad v + 2v_- \leq Z(f^{-\epsilon})$$

et l'égalité a lieu pour une fonction affine par morceaux, donc

$$\begin{aligned} 2Z(f) &= 2v + 2v_+ + 2v_- \\ &\leq Z(f^\epsilon) + Z(f^{-\epsilon}) \\ &\leq V(\mathbf{P}^\epsilon) + V\mathbf{P}^\epsilon) \\ &= 2Z(\mathbf{P}). \end{aligned}$$

Cas où les noeuds extrêmes sont de multiplicité $k+1$ ou bien le polygone $\mathbf{P}$ a ses sommets extrèmes de multiplicité $k+1$.

Comme $f(t_0) = P_0$ et $f(t_m) = P_{N-1}$, l'effet de bord (disparition d'un zéro par perturbation) est le même pour f et pour $\mathbf{P}$. L'argument ci-dessus donne encore que $Z(f) \leq Z(\mathbf{P})$. ∎

Théorème 2 *Soient $Q_0, \ldots, Q_{N-1} \in \mathbf{R}^n$ des points à interpoler, soit $\mathbf{t}$ un vecteur de noeuds, soient $s_0 < \cdots < s_{N-1}$ des réels distincts tels que pour tout $j = 0, \ldots, N-1$, $B_{j,k}(s_j) \neq 0$. On suppose*

1. *ou bien que $m = N + k$, $t_0 = \cdots = t_k$ et $t_{m-k} = \cdots = t_m$;*
2. *ou bien que N est impair, $Q_{j+N} = Q_j$, $s_{j+N} = s_j + T$, $t_{i+N} = t_i + T$;*

Il existe un et un seul polygone de contrôle $\mathbf{P}$ (resp. un polygone fermé) tel que la courbe B-spline de degré k associée satisfasse pour tout $j = 0, \ldots, m$, $X_k(s_j) = Q_j$.

Preuve. On peut supposer que $n = 1$. Dans les deux cas, le nombre $Z(\mathbf{P})$ est au plus égal à $N-1$. Dans le cas où les noeuds extrêmes sont de multiplicité $k+1$, c'est évident. Dans le cas périodique, on remarque que la variation de $\mathbf{P}$ est forcément paire et inférieure ou égale à N. Comme on a supposé N impair, la variation de P est au plus égale à $N-1$, et elle majore $Z(\mathbf{P})$.

D'après le lemme 48, le nombre de composantes connexes de $Z(X_k)$ est au plus égal à $N-1$. Cela signifie que deux des s_j sont dans la même composante connexe de $X_k^{-1}(0)$, i.e. que la fonction X_k est identiquement nulle sur un intervalle $[t_\ell, t_{\ell+1}[$. D'après le lemme 47, $P_{\ell-k} = \cdots = P_\ell = 0$. Par conséquent, pour tout $j = 0, \ldots, m$,

$$\sum_{i=0}^{\ell-k-1} B_{i,k}(s_j) P_i = 0 \quad \text{et} \quad \sum_{i=\ell+1}^{m} B_{i,k}(s_j) P_i = 0.$$

(resp.

$$\sum_{i=\ell+1}^{N+\ell-k-1} B_{i,k}(s_j) P_i = 0).$$

On peut donc raisonner sur les intervalles $[t_0, t_\ell]$ et $[t_{\ell+1}, t_m]$ (resp. sur $[t_{\ell+1}, t_{N+\ell}]$ et conclure que tous les P_i sont nuls. Ceci prouve que la matrice A est inversible. ∎

8.2 Interpolation d'une courbe

Si les points Q_j à interpoler sont les valeurs en s_j d'une courbe paramétrée $t \mapsto Y(t) \in \mathbf{R}^n$, on souhaite que lorsque le pas $\max |s_{j+1} - s_j|$ tend vers 0, la courbe B-spline X_k converge uniformément vers la courbe donnée Y.

On trouve dans [K], Theorem 8.33 page 176 et Theorem 8.34 page 178 les estimations suivantes, pour un problème d'interpolation légèrement différent (on prescrit une dérivée à chaque extrémité).

Théorème 3 *Soit $h = 1/m$. On choisit un vecteur de noeuds uniforme périodique $t_i = ih$, $s_j = t_j + 2h$, $k = 3$. Soit X_3 la courbe B-spline de degré 3 telle que $X_3(s_j) = Y(s_j)$.*

Si la courbe donnée Y est de classe C^2,

$$\| Y - X_3 \|_{L^\infty} \leq \frac{1}{2} h^{3/2} \| Y'' \|_{L^2} \quad \text{et} \quad \| Y' - X_3' \|_{L^\infty} \leq h^{1/2} \| Y'' \|_{L^2} .$$

Si Y est de classe C^4, alors

$$\| Y - X_3 \|_{L^\infty} \leq \frac{1}{16} h^4 \| Y^{(4)} \|_{L^2} .$$

Exemple. Interpolation d'un polygone régulier à N côtés par une courbe B-spline cubique périodique.

Ici, $Y(t) = \cos(2\pi t), \sin(2\pi t))$, $\| Y^{(4)}(t) \| = (2\pi)^4$, $\| Y^{(4)} \|_{L^2} = (2\pi)^4$ donc

$$\| Y - X_3 \|_{L^\infty} \leq (\frac{\pi}{N})^4.$$

Pour que la courbe approche le cercle à 10^{-8} près, il suffit de prendre $N = 314$.

8.3 Choix du vecteur de noeuds

Soient Q_j les points qu'on souhaite interpoler. On suppose données les valeurs s_j du paramètre en lesquelles imposer les conditions $X(s_j) = Q_j$. Comment choisir les noeuds ? Il faut s'assurer que $B_{j,k}(s_j)$ est le plus grand possible. Un choix simple est

$$t_0 = \cdots = t_k = s_0;$$

$$t_i = \frac{s_{i-k} + \cdots + s_{i-1}}{k} \quad \text{pour} \quad k+1 \leq i \leq m-k-1;$$

$$t_{m-k} = \cdots = t_m = s_{m-1}.$$

Par construction, $B_{0,k}(s_0) = B_{m-1,k}(s_{m-1}) = 1$ et pour $k+1 \leq i \leq m-k-1$, $s_j > t_j$ et $s_j < t_{j+k+1}$ donc $B_{j,k}(s_j) > 0$. De plus, dans le cas où les s_j sont uniformément réépartis, ce choix maximise $B_{j,k}(s_j)$.

Ce n'est pas toujours le meilleur choix, voir [HL], figures 4.36c et 4.36d page 206.

8.4 Choix des valeurs où imposer la condition d'interpolation

Etant donnés les points Q_j à interpoler, quel est le meilleur choix des s_j ? Pour éviter que la dérivée de la courbe interpolantes soient grandes, il vaut mieux que des points Q_j et Q_{j+1} éloignés soient interpolés en des valeurs s_j et s_{j+1} éloignées. Autrement dit, il faut corréler les espacements $s_{j+1} - s_j$ avec les distances $\| Q_{j+1} - Q_j \|$.

Un choix simple consiste à poser

$$s_{j+1} - s_j = \| Q_{j+1} - Q_j \| .$$

Ce choix s'appelle la *paramétrisation cordale* (`chordal parametrization`). Elle a pour effet de produire une courbe interpolante paramétrée à vitesse à peu près constante.

Lorsque les distances $\| Q_{j+1} - Q_j \|$ varient brutalement, il y a de meilleurs choix, voir [HL], figures 4.36a et 4.36b pages 205 et 206.

9 Surfaces B-splines produits tensoriels

9.1 Définition

On étend naïvement à la dimension 2 l'idée des courbes B-splines. Le domaine de variation des paramètres est un rectangle, produit cartésien de deux intervalles. On se donne deux vecteurs de noeuds $u_0, \ldots, u_m$ et $v_0, \ldots, v_{m'}$. On se donne, à la place d'un polygone de contrôle, un *réseau de contrôle* (`control net`), i.e. des points P_{ij} indexés par les couples de noeuds $i = 0, \ldots, m$, $j = 0, \ldots, m'$.

Définition 49 *La* surface B-spline de bidegré (k, ℓ) *associée aux vecteurs de noeuds* $\mathbf{u}$ *et* $\mathbf{v}$ *et au réseau de contrôle* $\mathbf{P}$ *est la surface paramétrée*

$$(u, v) \mapsto \sum_{i=0}^{m} \sum_{j=0}^{m'} B_{i,k}(u) B_{j,\ell}(v) P_{ij}.$$

Dans le cas particulier où les deux vecteurs de noeuds sont de la forme $(0, \ldots, O, 1, \ldots, 1)$*, on parle de* carreau de Bézier (`Bézier rectangular patch`).

Si on se donne en plus un poids w_{ij} *pour chaque point de contrôle, la* surface B-spline rationnelle de bidegré (k, ℓ) *associée à toutes les données est la surface paramétrée*

$$(u, v) \mapsto \frac{\sum_{i}^{m} \sum_{j=0}^{m'} w_{ij} B_{i,k}(u) B_{j,\ell}(v) P_{ij}}{\sum_{i=0}^{m} \sum_{j=0}^{m'} w_{ij} B_{i,k}(u) B_{j,\ell}(v)}.$$

Remarque. Noter que la restriction d'une telle surface paramétrée à toute droite du plan (u, v) parallèle à l'un des axes de coordonnées est une courbe B-spline (resp. rationnelle). Ce n'est pas le cas pour les droites obliques.

Remarque. Il y a des généralisations moins naïves des courbes B-splines aux dimensions supérieures. En effet, il y a une théorie des fonctions B-splines en plusieurs variables, les splines polyédrales, voir par exemple [R] paragraphe 4.7.

Lemme 50 *Soit* $X_{k,\ell}$ *la surface B-spline de bidegré* (k, ell) *associée aux vecteurs de noeuds* $\mathbf{u}$ *et* $\mathbf{v}$ *et au réseau de contrôle* $\mathbf{P}$*. Supposons que* $u_0 = \cdots = u_k$ *est un noeud de multiplicité* $k + 1$*. En tout point* (u_0, v)*, les dérivées partielles par rapport à* u*,* $\frac{\partial X_{k,\ell}}{\partial u}(u_0, v)$ *et* $\frac{\partial^2 X_{k,\ell}}{\partial u^2}(u_0, v)$*, coïncident avec les valeurs en* v *de deux courbes B-splines de degré* ℓ *associées aux polygones de contrôle*

$$R_j^1 = \frac{k}{u_{k+1} - u_0}(P_{1j} - P_{0j})$$

et

$$R_j^2 = \frac{k(k-1)}{(u_{k+1} - u_0)(u_{k+2} - u_0)}(P_{2j} - 2P_{1j} + P_{0j})$$

respectivement.

Preuve.

La courbe $u \mapsto X_{k,\ell}(u, v)$ est la B-spline de degré k associée au polygone de contrôle

$$P_i(v) = \sum_{j} B_{j,\ell}(v) P_{ij}.$$

Si u_0 est un noeud de multiplicité $k+1$, sa dérivée est donnée par la proposition 28

$$\begin{aligned}\frac{\partial X_{k,\ell}}{\partial u}(u_0,v) &= \frac{k}{u_{k+1}-u_0}(P_1(v)-P_0(v))\\ &= \sum_j B_{j,\ell}(v)\frac{k}{u_{k+1}-u_0}(P_{1j}-P_{0j}),\end{aligned}$$

qui est la valeur en v de la courbe B-spline de degré ℓ associée au polygone de contrôle

$$R_j^1 = \frac{k}{u_{k+1}-u_0}(P_{1j}-P_{0j}).$$

Le mécanisme est le même pour la dérivée seconde. ∎

9.2 Condition suffisante de raccord pour des surfaces B-splines

Les quantités mises en oeuvre dans le théorème du cours sur la courbure des surfaces ne sont pas données par des formules simples (bien que le calcul soit immédiat à l'aide de l'algorithme de de Casteljau), car elles sont non linéaires. Néanmoins, on peut donner une condition suffisante, mais non nécessaire, de raccord.

On se donne deux surfaces B-splines qu'on cherche à recoller le long d'une courbe à u constant. On donne les conditions pour que les courbes à v constant présentent un raccord GC^1 (resp. GC^2) pour tout v.

Proposition 51 *Soient* $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ *et* $\bar{\mathbf{u}}$ *des vecteurs de noeuds. Soient* $\mathbf{P}$ *et* $\bar{\mathbf{P}}$ *des réseaux de contrôle. On suppose que*

- $u_0 = \cdots = u_k$ *et* $\bar{u}_{m-k} = \cdots = \bar{u}_m$ *;*
- *pour tout* j, $P_{0j} = \bar{P}_{(m-k-1)j}$ *;*
- *il existe une constante* $\lambda > 0$ *telle que pour tout* j,

$$P_{1j} - P_{0j} = \lambda(\bar{P}_{(m-k-1)j} - \bar{P}_{(m-k-2)j}).$$

Alors la réunion des deux surfaces B-splines de degré k X_k *(resp.* $\bar{X}_k$*) associées aux noeuds* $\mathbf{u}$ *et* $\mathbf{v}$ *et au réseau de contrôle* $\mathbf{P}$ *(resp. aux noeuds* $\bar{\mathbf{u}}$, $\mathbf{v}$ *et au réseau de contrôle* $\bar{\mathbf{P}}$*) est une surface de classe* GC^1*. Supposons de plus que*

- *il existe des constantes* $\mu > 0$ *et* μ' *telles que pour tout* j,

$$P_{2j} - 2P_{1j} + P_{0j} = \mu(\bar{P}_{(m-k-1)j} - 2\bar{P}_{(m-k-2)j} + \bar{P}_{(m-k-3)j}) + \mu'(P_{1j} - P_{0j});$$

- *pour tout* j,

$$\frac{\mu}{\lambda^2} = \frac{(u_{k+2}-u_0)(\bar{u}_m - \bar{u}_{m-k-1})}{(u_{k+1}-u_0)(\bar{u}_m - \bar{u}_{m-k-2})}.$$

Alors la réunion $X_{k,\ell} \cup \bar{X}_{k,\ell}$ *est une surface de classe* GC^2*.*

Preuve. Ces conditions linéaires sur les réseaux de contrôle entraînent pour chaque v, des relations analogues pour les dérivées

$$\frac{u_{k+1}-u_0}{k}\frac{\partial X_{k,\ell}}{\partial u}(u_0,v) = \lambda\frac{\bar{u}_m - \bar{u}_{m-k-1}}{k}\frac{\partial \bar{X}_{k,\ell}}{\partial u}(\bar{u}_m,v)$$

et

$$\begin{aligned}\frac{(u_{k+1}-u_0)(u_{k+2}-u_0)}{k(k-1)}\frac{\partial^2 X_{k,\ell}}{\partial u^2}(u_0,v) &= \mu\frac{(\bar u_m-\bar u_{m-k-1})(\bar u_m-\bar u_{m-k-2})}{k(k-1)}\frac{\partial^2 \bar X_{k,\ell}}{\partial u^2}(\bar u_m,v)\\ &\quad +\mu'\frac{u_{k+1}-u_0}{k}\frac{\partial X_{k,\ell}}{\partial u}(u_0,v).\end{aligned}$$

La première entraîne l'égalité des tangentes orientées et donc le raccord GC^1, d'après la proposition 35.

De la seconde, on tire que

$$\frac{(u_{k+1}-u_0)^2(u_{k+2}-u_0)}{k^2(k-1)}\frac{\partial X_{k,\ell}}{\partial u}\wedge\frac{\partial^2 X_{k,\ell}}{\partial u^2} = \lambda\mu\frac{(\bar u_m-\bar u_{m-k-1})^2(\bar u_m-\bar u_{m-k-2})}{k(k-1)}\frac{\partial \bar X_{k,\ell}}{\partial u}\wedge\frac{\partial^2 \bar X_{k,\ell}}{\partial u^2}$$

qui entraîne l'égalité des normales orientées. Si de plus

$$\frac{\mu}{\lambda^2} = \frac{(u_{k+2}-u_0)(\bar u_m-\bar u_{m-k-1})}{(u_{k+1}-u_0)(\bar u_m-\bar u_{m-k-2})},$$

alors les courbures coïncident. Par conséquent, pour chaque v, les courbes $u\mapsto X_{k,\ell}(u,v)$ et $u\mapsto \bar X_{k,\ell}(u,v)$ satisfont les conditions de raccord GC^2 de la proposition 35. Le corollaire du cours sur le courbure des surfaces montre alors que les surfaces se raccordent avec régularité GC^2. ∎

9.3 Raccordement le long d'une droite

Les conditions suffisantes de raccord de la proposition 51 ne sont évidemment pas nécessaires. Par exemple, pour raccorder une surface B-spline à un demi-plan, il suffit que le réseau de contrôle soit contenu dans le plan considéré.

Toutefois, dans le cas particulier où la courbe de suture est une droite (à l'ordre 2 il faut en plus que le plan tangent soit constant le long de cette droite, ce qui est le cas pour les cylindres et les cônes), on peut donner une condition suffisante qui est génériquement nécessaire.

Proposition 52 *Soient* $\mathbf{u}$, $\bar{\mathbf{u}}$, $\mathbf{v}$ *des vecteurs de noeuds. On suppose que* $u_0=\cdots=u_k$ *et* $\bar u_{m-k}=\cdots=\bar u_m$. *Soit* $\bar{\mathbf{P}}$ *un réseau de contrôle tel que la surface B-spline* $\bar X_{k,\ell}$ *correspondante soit bordée par une droite* D. *Soit* $\mathbf{P}$ *un autre réseau de contrôle, et* $X_{k,\ell}$ *la surface B-spline de bidegré* (k,ℓ) *correspondante.*

- *Pour que les surfaces* $X_{k,\ell}$ *et* $\bar X_{k,\ell}$ *se raccordent* GC^0, *il faut et il suffit que les points* P_{0j} *soient sur* D.
- *Supposons que pour tout* j, $P_{0j}=\bar P_{(m-k-1)j}$. *Notons* τ *un vecteur directeur de la droite* D *qui borde* $\bar X_{k,\ell}$. *Pour que le raccord soit de classe* GC^1, *il suffit qu'il existe une constante* λ *telle que pour tout* j,

  $$(P_{1j}-P_{0j})\wedge\tau = \lambda(\bar P_{(m-k-1)j}-\bar P_{(m-k-2)j})\wedge\tau,$$

  et c'est génériquement nécessaire.
- *Supposons de plus que le plan tangent à* $\bar X_{k,\ell}$ *est constant le long du bord, de vecteur normal* Γ. *Pour que le raccord soit de classe* GC^2, *il faut et il suffit que pour tout* j,

  $$\frac{u_{k+1}-u_0}{u_{k+2}-u_0}(P_{2j}-P_{0j})\cdot\Gamma = \lambda^2\frac{\bar u_m-\bar u_{m-k-1}}{\bar u_m-\bar u_{m-k-2}}(\bar P_{(m-k-1)j}-\bar P_{(m-k-3)j})\cdot\Gamma.$$

Preuve. Si les points de contrôle P_{0j} sont sur D, la courbe B-spline $v\mapsto X_{k,\ell}(u_0,v)$ est contenue dans D.

Inversement, notons pr la projection parallèlement à $D = \partial \bar{X}_{k,\ell}$ sur un plan π transverse à D. S'il y a raccord GC^0, c'est que la courbe $v \mapsto X_{k,\ell}(u_0, v)$ est contenue dans la droite D, donc sa projection est constante (mettons, égale à 0). On a donc pour tout v

$$\sum_j B_{j,\ell}(v) pr(P_{0j}) = 0.$$

Comme les fonctions B-splines non nulles sur un intervalle entre deux noeuds sont linéairement indépendantes (lemme 47), cela entraîne que $pr(P_{0j}) = 0$ pour tout j, i.e. que les points P_{0j} sont sur la droite D.

Supposons que pour tout j, $P_{0j} = \bar{P}_{(m-k-1)j}$ et

$$(P_{1j} - P_{0j}) \wedge \tau = \lambda(\bar{P}_{(m-k-1)j} - \bar{P}_{(m-k-2)j}) \wedge \tau,$$

où λ ne dépend pas de j. Alors, comme dans la preuve de la proposition 51, pour tout v,

$$\frac{u_{k+1} - u_0}{k} \frac{\partial X_{k,\ell}}{\partial u}(u_0, v) \wedge \tau = \lambda \frac{\bar{u}_m - \bar{u}_{m-k-1}}{k} \frac{\partial \bar{X}_{k,\ell}}{\partial u}(\bar{u}_m, v) \wedge \tau.$$

Par conséquent, les vecteurs τ, $\dfrac{\partial X_{k,\ell}}{\partial u}(u_0, v)$ et $\dfrac{\partial \bar{X}_{k,\ell}}{\partial u}(\bar{u}_m, v)$ sont coplanaires, donc les deux surfaces ont même plan tangent en chaque point de leur bord, et le raccord est de classe GC^1.

La condition que pour tout j, $P_{0j} = \bar{P}_{(m-k-1)j}$ n'est pas nécessaire mais on la suppose satisfaite, car c'est seulement dans ce cas que la condition de raccord GC^1 est linéaire. Supposons le raccord de classe GC^1. Alors pour tout v, les plans tangents en $X_{k,\ell}(u_0, v)$ aux surfaces $\bar{X}_{k,\ell}$ et $X_{k,\ell}$ sont égaux, donc les vecteurs

$$\frac{\bar{u}_m - \bar{u}_{m-k-1}}{k} \frac{\partial X_{k,\ell}}{\partial u}(u_0, v) \wedge \tau = (\ A\ )(v) B(v) C(v)$$

et

$$\frac{u_{k+1} - u_0}{k} \frac{\partial \bar{X}_{k,\ell}}{\partial u}(\bar{u}_m, v) \wedge \tau = (\ E\ )(v) F(v) G(v)$$

sont colinéaires. Pour un choix générique du réseau de contrôle $\bar{\mathbf{P}}$, les polynômes A et B (resp. A et C) sont premiers entre eux, donc l'égalité $AF - EB = 0$ (resp. $AG - EC = 0$) entraîne que C divise G, B divise F et A divise E, donc il existe un polynôme H tel que $E = HA$, $F = HB$ et $G = HC$. Comme les polynômes en jeu sont de même degré ℓ, nécessairement $H = \lambda$ est constant. Or

$$(\ E\ ) FG - \lambda (\ A\ ) BC$$

est la courbe B-spline de degré ℓ associée au polygone de contrôle

$$(P_{1j} - P_{0j} - \lambda(\bar{P}_{(m-k-1)j} - \bar{P}_{(m-k-2)j})) \wedge \tau.$$

Si elle est identiquement nulle, tous les points de contrôle sont nuls, donc pour tout j,

$$(P_{1j} - P_{0j} - \lambda(\bar{P}_{(m-k-1)j} - \bar{P}_{(m-k-2)j})) \wedge \tau = 0.$$

Supposons que le plan tangent à la surface $\bar{X}_{k,\ell}$ le long de D est constant, de vecteur normal Γ. Pour toute surface X contenant D et de vecteur normal constant, égal à Γ, le long de D, la seconde forme fondamentale en tout point P du bord est dégénérée, avec τ comme direction principale, de courbure principale nulle. En effet,

$$II_P(\tau, w) = \frac{\partial \Gamma}{\partial v} \cdot w = 0$$

pour tout vecteur $w \in T_P X$. Par conséquent $II_P(w)$ ne dépend que de la composante orthogonale à τ de w. Soient $\bar{w}$ et w deux vecteurs orthogonaux à Γ, et tels que

$$w \wedge \tau = \bar{w} \wedge \tau \neq 0.$$

Alors les surfaces $\bar{X}_{k,\ell}$ et $X_{k,\ell}$ ont même seconde forme fondamentale en P si et seulement si

$$\bar{II}_P(\bar{w}) = II_P(w).$$

Au point $P = X_{k,\ell}(u_0, v)$, on choisit

$$\bar{w} = \lambda(\bar{u}_m - \bar{u}_{m-k-1})\frac{\partial \bar{X}_{k,\ell}}{\partial u}(\bar{u}_m, v) \quad \text{et} \quad w = (u_{k+1} - u_0)\frac{\partial X_{k,\ell}}{\partial u}(u_0, v).$$

Or

$$II_P(\frac{\partial X_{k,\ell}}{\partial u}(u_0, v)) = \Gamma \cdot \frac{\partial^2 X_{k,\ell}}{\partial u^2}(u_0, v)$$

et le lemme 50 donne

$$\frac{\partial^2 X_{k,\ell}}{\partial u^2}(u_0, v) = \sum_j B_{j,\ell}\frac{k(k-1)}{(u_{k+1} - u_0)(u_{k+2} - u_0)}(P_{2j} - 2P_{1j} + P_{0j}),$$

donc l'identité

$$\bar{II}_{X_{k,\ell}(u_0,v)}(\bar{w}) = II_{X_{k,\ell}(u_0,v)}(w).$$

est satisfaite pour tout v si et seulement si pour tout j,

$$\frac{u_{k+1} - u_0}{u_{k+2} - u_0}(P_{2j} - P_{0j}) \cdot \Gamma = \lambda^2 \frac{\bar{u}_m - \bar{u}_{m-k-1}}{\bar{u}_m - \bar{u}_{m-k-2}}(\bar{P}_{(m-k-1)j} - \bar{P}_{(m-k-3)j}) \cdot \Gamma.$$

On conclut à l'aide du théorème du cours sur la courbure des surfaces. ■

10 Appendice : Résolution numérique d'un problème d'interpolation par une courbe B-spline

On va traiter le cas le plus favorable.

Supposons que $k = 3$, que le vecteur de noeuds est uniforme $t_i = i$ et que s_j est au maximum de la fonction $B_{j,3}$, i.e. $s_j = t_j + 2$ et $B_{j,3}(s_j) = 2/3$. On se donne un polygone périodique ($Q_m = Q_0$) à interpoler et on cherche un polygone de contrôle périodique. On peut supposer que $n = 1$. Il s'agit de résoudre le système $A\mathbf{P} = \mathbf{Q}$ pour $\mathbf{Q}$ et $\mathbf{P} \in \mathbf{R}^N$ et $A_{ij} = B_{i,3}(s_j)$. Cela s'écrit (les indices sont modulo N)

$$\frac{1}{6}P_{j-1} + \frac{2}{3}P_j + \frac{1}{6}P_{j+1} = Q_j.$$

La matrice A est symétrique. Les coefficients non nuls de A se rangent dans au plus 4 diagonales. De plus (on utilise la structure euclidienne de $\mathbf{R}^N$), la matrice A est *coercive*,

$$A\mathbf{p}.\mathbf{p} \geq \frac{1}{3} \parallel \mathbf{P} \parallel^2 .$$

Cela indique que la résolution devrait être efficace. On applique la méthode du *gradient conjugué*.

10.1 Rappels sur la méthode du gradient conjugué

Soit E un espace de Hilbert et q une forme quadratique définie positive sur E, $q(x) = Ax \cdot x$. Alors x est solution de l'équation $Ax = y$ si et seulement si x est le minimum de la fonction $z \mapsto f(z) = \frac{1}{2}Az \cdot z - y \cdot z$. La méthode consiste à chercher les minima x_r de la fonction f sur les sous-espaces vectoriels croissants

$$E_r = vect\{y, Ay, \ldots, A^r y\}.$$

Alors $x_r - x_{r-1}$ est donné par une formule simple au moyen de produits scalaires. La suite x_r converge vers la solution véritable x_∞. En particulier, si E est de dimension N, alors $x_N = x_\infty$. L'expérience prouve que $x_{N/5}$ est souvent déjà très proche de x_∞.

Proposition 53 *On définit trois suites x_r, v_r et e_r par $x_0 = 0$, $v_0 = y$, les relations de récurrence*

$$x_{r+1} = x_r - \frac{e_r \cdot v_r}{Av_r \cdot v_r} v_r,$$

$$v_{r+1} = e_{r+1} - \frac{Av_r \cdot e_{r+1}}{Av_r \cdot v_r} v_r$$

et

$$e_r = Ax_r - y.$$

Alors la fonction $f : x \mapsto \frac{1}{2} Ax \cdot x - y \cdot x$ atteint son minimum sur E_r en x_r. La suite x_r converge vers l'unique solution x_∞ de l'équation $Ax = y$. De plus, on a l'estimation a posteriori

$$A(x_\infty - x_r) \cdot (x_\infty - x_r) = e_r \cdot (x_{r+1} - x_r).$$

Si A est coercive, i.e. $\| x \|^2 \leq C\, Ax \cdot x$, on a l'estimation a posteriori

$$\| x_\infty - x_r \| \leq C \ \| Ax_r - y \| .$$

Preuve. Définissons x_r comme le point de E_r où la restriction de f à E_r atteint son minimum. Il existe et est unique par stricte convexité. Pour la même raison, si E_∞ est l'adhérence de la réunion des E_r, la fonction uniformément convexe f atteint son minimum sur E_∞ en un unique point x_∞.

On utilise le produit scalaire associé à la forme quadratique q,

$$a \cdot_A b = Aa \cdot b.$$

Relativement à cette structure euclidienne, les ensembles de niveau de f sont des sphères centrées en x_∞. Les ensembles de niveau de la restriction de f à E_r sont des sphères centrées en x_r. Soit $s \leq r - 1$. Au point x_s où f atteint son minimum sur E_s cette sphère est tangente à E_s, donc $x_r - x_s \perp_A E_s$. En particulier $x_\infty - x_s \perp_A E_s$.

Posons $e_r = Ax_r - y$. Alors $e_r \in E_{r+1}$. Or $e_r = A(x_r - x_\infty) \perp E_r$, donc en particulier $e_r \cdot e_{r-1} = 0$.

Considérons la suite v_r définie par $v_0 = y$ et par la relation de récurrence

$$v_{r+1} = e_{r+1} - \frac{v_r \cdot_A e_{r+1}}{v_r \cdot_A v_r} v_r.$$

Montrons par récurrence sur r que $v_r \in E_{r+1}$, $v_r \perp_A E_r$ et

$$x_{r+1} = x_r - \frac{e_r \cdot v_r}{Av_r \cdot v_r} v_r.$$

Lorsque $r = 0$, $v_0 = y \in E_1$ par définition et $E_0 = \{0\}$.

Supposons connu que $v_{r-1} \in E_r$, $v_{r-1} \perp_A E_{r-1}$ et

$$x_r = x_{r-1} - \frac{e_{r-1} \cdot v_{r-1}}{Av_{r-1} \cdot v_{r-1}} v_{r-1}.$$

On remarque que $e_r \in AE_r \subset E_{r+1}$ donc $v_r \in E_{r+1}$.

D'autre part, $x_\infty - x_r \perp_A E_r$, donc $e_r = A(x_\infty - x_r) \perp_A A^{-1}E_r$. Or $AE_{r-1} \subset E_r$ donc $e_r \perp_A E_{r-1}$. Comme v_r est un vecteur du plan engendré par e_r et v_{r-1}, il est orthogonal à E_{r-1}. Par construction, $v_r \perp_A v_{r-1}$.

Si $v_{r-1} = 0$, alors d'après l'hypothèse de récurrence, $x_r = x_{r-1}$, donc $e_r = e_{r-1}$. Comme $e_r \cdot e_{r-1} = O$, nécessairement $e_{r-1} = 0$, donc $x_\infty = x_{r-1}$. On conclut que $x_{r+1} = x_r$, $v_r = 0$ et la relation de récurrence pour x_{r+1} est satisfaite.

On peut donc supposer que $v_{r-1} \neq 0$. Alors E_r est engendré par E_{r-1} et v_{r-1}, donc $v_r \perp_A E_r$.

Si $v_r = 0$, alors e_r est colinéaire à v_{r-1}. Or $e_r \perp E_{r-1}$. Nécessairement $e_r = 0$, donc $x_{r+1} = x_r$ et la relation de récurrence pour x_{r+1} est à nouveau satisfaite.

On peut donc supposer que $v_r \neq 0$. Alors v_r est une base de l'orthogonal de E_{r-1} dans E_r, donc il existe un réel λ tel que $x_{r+1} - x_r = \lambda v_r$. Comme cette valeur de λ minimise $f(x_r + \lambda v_r)$, nécessairement

$$\lambda = -\frac{x_r \cdot_A v_r - y \cdot v_r}{v_r \cdot_A v_r},$$

comme annoncé.

Par construction, la distance (mesurée au moyen de $x \mapsto AX \cdot x$) de x_∞ au sous-espace E_r est atteinte en x_r. Comme la réunion des E_r est dense dans E_∞, cette distance, égale à $A(x_\infty - x_r) \cdot (x_\infty - x_r)$, tend vers 0. Remarquer que les vecteurs $x_{r+1} - x_r$ sont deux à deux orthogonaux (ils sont colinéaires aux vecteurs obtenus en orthonormalisant la base y, Ay,...,$A^r y$...). On a donc

$$\sum_{r=0}^{\infty} A(x_{r+1} - x_r) \cdot (x_{r+1} - x_r) = Ax_\infty \cdot x_\infty.$$

Enfin,

$$\begin{aligned} \| x_r - x_\infty \|^2 &\leq C\, A(x_r - x_\infty) \cdot (x_r - x_\infty) \\ &= (Ax_r - y) \cdot (x_r - x_\infty) \\ &\leq \| Ax_r - y \| \| x_r - x_\infty \| \end{aligned}$$

d'où

$$\| x_\infty - x_r \| \leq C \ \| Ax_r - y \| . \blacksquare$$

10.2 Méthode de Jacobi

On peut aussi utiliser la méthode de résolution de Jacobi (voir [K], Theorem 4.2 page 55). Soit D est la diagonale de A. Alors

$$Ax = y \Leftrightarrow x = -D^{-1}(A - D)x + D^{-1}y$$

et on itère la transformation affine $x \mapsto -D^{-1}(A - D)x + D^{-1}y$. Celle-ci est contractante lorsque $\mathbf{R}^{n+1}$ est muni de la norme ℓ^1. En effet,

$$q = \| D^{-1}(A - D) \|_{\ell^1 \to \ell^1} = \max\{|A_{jj}|^{-1} \sum_{i \neq j} |A_{ji}| \ ; \ j = 0, \ldots, m\}$$

qui dans le cas présent vaut $q = 1/2$. Posant $x_0 = O$ et

$$x_{\nu+1} = -D^{-1}(A - D)x_\nu + D^{-1}y,$$

on peut affirmer que la solution x satisfait

$$\| x - x_\nu \|_{\ell^1} \leq \frac{q^\nu}{1 - q} \| D^{-1}y \|_{\ell^1} .$$

et dans le cas présent $\dfrac{q^\nu}{1-q} = 2^{1-\nu}$.

Exemple. Interpolation d'un polygone régulier à m côtés par une courbe B-spline cubique périodique.

Le polygone à interpoler (la donnée y) est

$$Q_j = (\cos(2\pi j/m), \sin(2\pi j/m)).$$

Munissons $(\mathbf{R}^2)^m$ de la norme

$$\| \mathbf{Q} \|_{\ell^1} = \sum_{j=1}^{m} \| Q_j \| .$$

Alors

$$\| D^{-1}y \| = \frac{3m}{2}$$

donc après ν itérations, la distance ℓ^1 à la solution vaut au plus $12m/2^\nu$. Si $m = 10$, pour que la somme des erreurs (distances de la courbe aux points à interpoler) soit inférieure à 10^{-8}, il suffit de 33 itérations. L'estimation

$$\| x - x_\nu \|_{\ell^1} \leq \frac{q}{1-q} \| x_\nu - x_{\nu-1} \|_{\ell^1}$$

indique qu'il suffit de s'arrêter lorsque $\| x_\nu - x_{\nu-1} \|_{\ell^1} \leq 10^{-8}$.

Noter que chaque itération nécessite moins de $10m$ opérations arithmétiques et une capacité de stockage du même ordre.

References

[F] G. FARIN, *Curves and surfaces for computer aided geometric design, a practical guide.* 2nd ed. Academic Press. Boston, Mass. (1990).

[HL] J. HOSCHEK, D. LASSER, *Grundlagen der geometrischen Datenverarbeitung.* Teubner, Stuttgart (1989). `English translation :` *Fundamentals of computer aided geometric design.* A. K. Peters, Wellesley, Mass. (1993).

[K] R. KRESS, *Numerical Analysis.* Graduate Texts in Math. **181**. Springer, Heidelberg (1998).

[M] J. MILNOR, *Topology from the differential viewpoint.* The University Press of Virginia. Charlottesville, Virg. (1965).

[N] G. FARIN, *NURBS. From projective geometry to practical use.* 2nd ed. A. K. Peters, Wellesley, Mass. (1999).

[R] J.-J. RISLER, *Méthodes mathématiques pour la CAO.* Masson, Paris (1991).

Laboratoire de Mathématique d'Orsay
U.M.R. 8628 du C.N.R.S.
Bâtiment 425
Université de Paris-Sud
91405 Orsay
France
`Pierre.Pansu@math.u-psud.fr`
`http://www.math.u-psud.fr/~pansu`