Géométrie Différentielle, TD 9 du 05 mai 2008

1. Forme différentielle sur $\mathbb{R}^3$

Soit X un champs de vecteur de $\mathbb{R}^3$. On définit :

$$\omega_X^1(u) = u \bullet X$$

$$\omega_X^2(u,v) = \det(u,v,X)$$

1– Montrer que ω_X^i est une i-forme pour $i = 1,2$ et que l'application $(X \mapsto \omega_X^i)$ identifie les champs de vecteurs aux i-formes $(i = 1,2)$.

2– Montrer que :
–$\omega_X^1 \wedge \omega_Y^1 = \omega_{X \wedge Y}^2$
–$\omega_X^1 \wedge \omega_Y^2 = X \bullet Y dx \wedge dy \wedge dz$
–$df = \omega_{\mathrm{grad} f}^1$
–$d\omega_X^1 = \omega_{\mathrm{rot} X}^2$
–$d\omega_X^2 = \mathrm{div}(X) dx \wedge dy \wedge dz$

3– Retrouver les formules classiques :
–$\mathrm{rot} \circ \mathrm{grad} = 0$
–$\mathrm{div} \circ \mathrm{rot} = 0$
–$\mathrm{div}(X \wedge Y) = Y \bullet \mathrm{rot} X - X \bullet \mathrm{rot} Y$
–$\mathrm{rot}(fX) = f \mathrm{rot} X + \mathrm{grad} f \wedge X$

2. Comatrice

Soit ω la $n-1$-forme différentielle sur $\mathbb{R}^n$ donnée par $\omega = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i-1} x_i \, \mathrm{d}x_1 \wedge \ldots \widehat{\mathrm{d}x_i} \ldots \wedge \mathrm{d}x_n$.

1– Calculer $\mathrm{d}\omega$.

2– Soit $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ une application linéaire. Que vaut $A^*\omega$?

3– Montrer que ω est à constante près la seule forme de degré $n-1$ invariante par $\mathrm{SL}(n, \mathbb{R})$.

3. Forme de Liouville

1– Considérons dans $\mathbb{R}^{2n}$ la 2-forme linéaire alternée ω_0 définie par $\omega_0 = \mathrm{d}x_1 \wedge \mathrm{d}x_2 + \mathrm{d}x_3 \wedge \mathrm{d}x_4 + \ldots + \mathrm{d}x_{2n-1} \wedge \mathrm{d}x_{2n}$. Calculer le produit extérieur de n exemplaires de ω_0.

2– Soit $E = \mathbb{R}^n$, et $F = E \times E^*$ (qu'on peut identifier à $\mathbb{R}^{2n}$). On définit une 1-forme différentielle sur F par $\omega(q,p).(u,v) = \langle p, u \rangle$. Montrer que sa différentielle est donnée par $\mathrm{d}\omega(q,p).((u_1,v_1),(u_2,v_2)) = \langle v_1,u_2\rangle - \langle v_2,u_1\rangle$. Que pensez-vous de la notation classique $\mathrm{d}\omega = \mathrm{d}p \wedge \mathrm{d}q$?

3– Soient M une variété de dimension n, et $\pi : T^*M \to M$ la projection canonique. On définit une 1-forme ω sur T^*M par $\omega(x)(X) = \langle x, T_x\pi(X)\rangle$ pour $x \in T^*M$ et $X \in T_x(T^*M)$). Vérifier que cette définition a un sens, puis montrer que le produit extérieur de n exemplaires de $\mathrm{d}\omega$ est non nul en tout point.

4. Théorie du repère mobile

1– Soit ω une 1-forme différentielle sur une variété M de dimension n. Montrer que pour tous les champs de vecteurs X et Y on a

$$\mathrm{d}\omega(X,Y) = X\cdot\omega(Y) - Y\cdot\omega(X) - \omega([X,Y]) \tag{1}$$

où $X\cdot g$ désigne la dérivation de la fonction g suivant la direction X (parfois notée également $X(g)$ ou $\mathcal{L}_X(g)$).

2– Soient X_1 et X_2 deux champs de vecteurs sur une variété M de dimension 2, linéairement indépendants en tout point de M. Supposons que α_1 et α_2 sont deux 1-formes différentielles sur M telles qu'en chaque point x de M les bases $(\alpha_1(x),\alpha_2(x))$ et $(X_1(x),X_2(x))$ sont duales. Si les fonctions f et g sont définies par l'égalité $[X_1,X_2] = fX_1 + gX_2$, montrer que l'on a :

$$\mathrm{d}\alpha_1 = (-f)\alpha_1\wedge\alpha_2,\ \ \mathrm{d}\alpha_2 = (-g)\alpha_1\wedge\alpha_2.$$

3– Soient $X_1,\dots,X_n$ n champs de vecteurs sur une variété M de dimension n, linéairement indépendants en tout point de M. Supposons que $\alpha_1,\dots\alpha_n$ sont des 1-formes différentielles sur M telles qu'en chaque point x de M les bases $(\alpha_1(x),\dots,\alpha_n(x))$ et $(X_1(x),\dots X_n(x))$ sont duales. Définissons les fonctions c_{ij}^k par les égalités $[X_i,X_j] = \sum_k c_{ij}^k X_k$. Montrer que l'on a :

$$\mathrm{d}\alpha_k = -\sum_{i<j} c_{ij}^k\alpha_i\wedge\alpha_j.$$

5.

Soit ω une 1-forme ne s'annulant pas sur une variété M. Montrer qu'il existe une 1-forme θ sur M telle que $\mathrm{d}\omega = \theta\wedge\omega$ si et seulement si $\mathrm{d}\omega\wedge\omega = 0$. Que se passe-t-il si ω admet des zéros ?

6. Théorème de Frobenius, versions formes différentielles

1– Soit $P(x)$ un champ de k-plans dans une variété M de dimension n. On note $\mathcal{I}$ l'idéal de $\Omega(M)$ engendré par les formes différentielles de degré 1 qui s'annulent sur P. Montrer que le champ P est intégrable si et seulement si $\mathcal{I}$ est stable par la différentielle extérieure.

On pourra utiliser l'énoncé du théorème de Frobenius sur les champs de vecteurs et la formule (1).

2– Soient $\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-k}$ des formes différentielles de degré 1 sur M, linéairement indépendantes en tout point. Posons $P(x) = \bigcap_{i=1}^{n-k} \mathrm{Ker}(\alpha_i(x))$, et $\omega = \alpha_1 \wedge \ldots \wedge \alpha_k$. Montrer que le champ de k-plans P est intégrable si et seulement si il existe au voisinage de tout x une fonction f non nulle en x telle que $\mathrm{d}(f\omega) = 0$. Existe-t-il nécessairement une telle fonction globalement ?

7. Une formule pour la différentielle extérieure

Soit ω une k-forme sur une variété de dimension n, et $X_1, \ldots, X_{k+1}$ des champs de vecteurs C^∞. Montrer que

$$\begin{aligned}\mathrm{d}\omega(X_1, \ldots, X_{k+1}) = &\sum_{i=1}^{k+1} (-1)^{i+1} X_i \left(\omega(X_1, \ldots, \widehat{X_i}, \ldots, X_{k+1})\right) \\ &+ \sum_{i<j} (-1)^{i+j} \omega([X_i, X_j], X_1, \ldots, \widehat{X_i}, \ldots, \widehat{X_j}, \ldots, X_{k+1}).\end{aligned}$$