Géométrie Différentielle, TD 8 du 18 avril 2008

1. $\frac{1}{2}$-plan de Poincaré

Soit $\mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C} | \Im(z) > 0\}$. On fait agir un élément :

$$g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$$

sur $\mathbb{H}$ par la formule :

$$g \bullet z = \frac{az + b}{cz + d}$$

1– Montrer que $\Im(g \bullet z) = \frac{\Im(z)}{|cz+d|^2}$, en déduire que la formule précédente définie bien une action de groupe.

2– Montrer que $\mathbb{H}$ est difféomorphe au quotient :

$$\mathrm{SL}(2, \mathbb{R})/\mathrm{SO}(2)$$

3– En déduire la décomposition $'KAN'$ de $\mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$.

2. Surface modulaire.

On appelle groupe modulaire le groupe $G = \mathrm{PSL}(2, \mathbb{Z})$. On pose :

$$S = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Soit G' le sous-groupe de G engendré par S et T et :

$$D = \{z \in \mathbb{H} \mid |z| > 1 \text{ et } \Re(z) < \frac{1}{2}\}$$

Montrer que :

1– Pour tout $z \in \mathbb{H}$ il existe $g \in G'$ tel que $g \bullet z \in \overline{D}$.

2– Pour tout $z \in D$ et $z' \in \overline{D}$ si $g \bullet z = z'$ alors $z = z'$ et $g = 1$.

3– Le groupe G est engendré par S et T.

3. Fibré unitaire de $\mathbb{H}$.

On munit $\mathbb{H}$ de la norme sur les vecteurs tangents $m = \frac{dx^2+dy^2}{y^2}$.

1– Montrer que si $g \in \mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$, $g^*m = m$.

2– On note $T^1\mathbb{H}$ le fibré unitaire de $\mathbb{H}$. On note u le vecteur tangent en i de coordonnée $(0,1)$. Montrer que l'application :

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{PSL}(2,\mathbb{R}) & \to & T^1(\mathbb{H}) \\ g & \mapsto & (g \bullet i, dg(u)) \end{array}$$

est un difféomorphisme.

4. Sous-groupe de congruence

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ non nul, soit :

$$\Gamma[n] = \left\{ \left(\begin{array}{cc} a & b \\ c & d \end{array} \right) \in \mathrm{SL}(2,\mathbb{Z}) | \left(\begin{array}{cc} a & b \\ c & d \end{array} \right) = 1 \mathrm{mod}(n) \right\}$$

1– Montrer que si $n \geqslant 2$ le groupe $\Gamma[n]$ agit librement et donc que $X(n) = \Gamma[n] \backslash \mathbb{H}$ a une structure de variété quotient.

2– Montrer que $X(2)$ est difféomorphe à une sphère privée de trois points. (Indication : à l'aide du domaine fondamental du groupe modulaire, en construire un pour $\Gamma[2]$).

3– Montrer que m définie aussi une norme sur les vecteurs tangents de $X(n)$ et que $T^1X(n)$ est difféomorphe à :

$$\Gamma[n] \backslash \mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$$

5. Espace des réseaux.

Soit L un réseau de $\mathbb{R}^2$. On définit son volume $v(L)$ comme l'aire d'un parallélogramme fondamental de $\mathbb{R}^2/L$ et sa taille $s(L)$ par :

$$s(L) = min\{||v|| \; |v \in L - \{0\}\}$$

Soit $\mathcal{R}$ l'ensemble des réseaux de $\mathbb{R}^2$ de volume 1. Montrer que :

1– Montrer que $\mathcal{R}$ est un bijection avec $\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z}) \backslash \mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$, on munit ainsi $\mathcal{R}$ d'une topologie.

2– Soit $M \subset \mathcal{R}$, montrer que M est relativement compact si et seulement si $\inf_{L \in M} s(L) > 0$ (indication : on utilisera que $\mathcal{R}$ est un fibré en cercle au dessus de la surface modulaire).