Géométrie Différentielle, TD 7 du 11 avril 2008

1. Quaternions

1– Montrer que les matrices complexes de la forme :

$$\begin{pmatrix} u & -\overline{v} \\ v & \overline{u} \end{pmatrix}.$$

forment une algèbre à division de dimension réelle 4, on la note $\mathbb{H}$.

2– Soit :

$$I = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\ J = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix},\ K = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}.$$

Montrer que tout quaternion s'écrit sous la forme $aE + bI + cJ + dK$ avec a, b, c, d réels et que :

$$I^2 = J^2 = K^2 = -E,\ IJ = -JI = K.$$

3– Si $q = aE + bI + cJ + dK$, on pose :
–$\overline{q} = aE - bI - cJ - dK$,
–$\mathrm{tr}(q) = q + \overline{q}$,
–$||q|| = \sqrt{q\overline{q}}$.
Montrer que :
–$q\overline{q} = \overline{q}q = a^2 + b^2 + c^2 + d^2$,
–$\overline{q_1 q_2} = \overline{q_2 q_1}$, $\mathrm{tr}(q_1 q_2) = \mathrm{tr}(q_2 q_1)$,
–$||q_1 q_2|| = ||q_1|| ||q_2||$.

4– Montrer que le groupe multiplicatif $\mathbb{H}^*$ est un groupe de Lie d'algèbre de Lie $\mathbb{H}$.

5– On note $\mathbb{H}^1$ les quaternions de norme 1. Montrer que $\mathbb{H}^1$ est difféomorphe à $\mathrm{SU}(2)$.

6– On identifie $\mathbb{R}^3$ aux quaternions de trace nulle. Si s est un quaternion de norme 1 et h un quaternion de trace nulle, on pose :

$$\rho(s) \bullet h = shs^{-1}.$$

Montrer que cette action définie un difféomorphisme :

$$\mathbb{S}^3/\pm 1 \to^{\rho} \mathrm{SO}(3).$$

7– On considère de même l'action ρ_1 de $\mathbb{S}^3 \times \mathbb{S}^3$ sur $\mathbb{H}$ définie par :

$$\rho_1(s, t) \bullet q = sqt^{-1}.$$

En déduire un difféomorphisme :

$$\mathbb{S}^3 \times \mathbb{S}^3/\pm 1 \to^{\rho_1} \mathrm{SO}(4).$$

2. SO(n) n'est pas simplement connexe.

On considère la forme quadratique sur $E = \mathbb{R}^n$:

$$q(x_1, \dots, x_n) = x^1 + \cdots + x_n^2$$

On appelle algèbre de Clifford et on note $C(q)$ le quotient de l'algèbre tensorielle $T(E)$ par l'idéal bilatère engendré par les $x \otimes x - q(x)$. On note i l'application composée $E \to T(E) \to C(q)$.

1– Montrer que $\dim C(q) = 2^n$.

2– On note $C(q)^+$ l'image du sous-espace de $T(E)$ engendré par les tenseurs pairs. Calculer la dimension de $C(q)^+$ et montrer que $C(q)^+$ est une sous-algèbre de $C(q)$.

3– Supposons que $n = 3$, montrer que $C(q)^+$ est isomorphe au corps $\mathbb{H}$ des quaternions.

4– Montrer que l'opération $(x_1 \otimes \cdots \otimes x_m)' = (x_m \otimes \cdots \otimes x_1)$, définit une anti-involution sur $C(q)$. On note $\mathrm{Spin}(q) = \{S \in C^+(q) |\ SES^{-1} \subset E, SS' = 1\}$.

5– Montrer que l'application :

$$\mathrm{Spin}(q) \to^{\pi} \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$$

est à valeur dans $\mathrm{SO}(q)$.

6– Si $a \in E$ est tel que $q(a) = 1$, montrer que pour tout $x \in E$, $axa^{-1} \in E$ et déterminer la transformation induite sur E.

7– En déduire que l'application π est surjective sur $\mathrm{SO}(q)$.

8– Montrer que le centre de $C(q)$ est $\mathbb{R}$ si n pair, $\mathbb{R} + \mathbb{R}e_1 \dots e_n$ si n est impair.

9– Calculer le noyau de $\mathrm{Spin}(q) \to \mathrm{SO}(q)$.

10– Montrer que $\mathrm{Spin}(q)$ est compact connexe. En déduire que $\mathrm{SO}(q)$ n'est pas simplement connexe.