Géométrie Différentielle, TD 6 du 4 avril 2008

1. Feuilletages et submersions

1– Soient M et N deux variétés connexes et $f : M \to N$ une submersion. Montrer qu'il existe un feuilletage sur M dont les feuilles sont les composantes connexes des $f^{-1}(x)$ pour $x \in N$.

2– Dans la situation de la question précédente, les feuilles sont-elles nécessairement toutes difféomorphes ?

3– Montrer qu'il existe des feuilletages qui ne sont pas de cette forme.

2. Sous-groupe commutatif de SO(n)

1– Trouver dans S0(n) (resp. SO($2n+1$)) un sous-groupe de Lie immergé commutatif T de dimension n.

2– Montrer que tout sous-groupe commutatif de S0(n) (resp. SO($2n+1$)) est conjugué à un sous-groupe de T.

3– Soit $0 \leqslant p \leqslant q$ deux entiers. Trouver dans $\mathrm{SO}_0(p,q)$ un sous-groupe de Lie immergé isomorphe à :

$$\mathbb{S}_1^{[\frac{q-p}{2}]} \times \mathbb{R}^p.$$

3.

Montrer qu'il n'existe pas de structure de groupe de Lie sur les sphères de dimension $2n$.

4. Composantes connexes de $0(n,1)$

Soit $n \geqslant 1$. Soit q la forme quadratique sur $\mathbb{R}^{n+1}$ donnée par :

$$q(x_0,\dots,x_n) = x_0^2 - x_1^2 - \cdots - x_n^2.$$

On note $\mathbb{H}^n_{\mathbb{R}}$ l'ensemble des $x = (x_0,\dots,x_n)$ tels que $q(x) = 1$ et $x_0 > 0$. Montrer que $SO_0(1,n)$ agit transitivement sur $\mathbb{H}^n_{\mathbb{R}}$. En déduire le nombre de composante connexe de $O(n,1)$.

5. Quaternions

1– Montrer que les matrices complexes de la forme :

$$\begin{pmatrix} u & -\overline{v} \\ v & \overline{u} \end{pmatrix}.$$

forment une algèbre à division de dimension réelle 4, on la note $\mathbb{H}$.

2– Soit :

$$I = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\ J = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix},\ K = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}.$$

Montrer que tout quaternion s'écrit sous la forme $aE + bI + cJ + dK$ avec a, b, c, d réels et que :

$$I^2 = J^2 = K^2 = -E,\ IJ = -JI = K.$$

3– Si $q = aE + bI + cJ + dK$, on pose :
–$\overline{q} = aE - bI - cJ - dK$,
–$\mathrm{tr}(q) = q + \overline{q}$,
–$||q|| = \sqrt{q\overline{q}}$.
Montrer que :
–$q\overline{q} = \overline{q}q = a^2 + b^2 + c^2 + d^2$,
–$\overline{q_1 q_2} = \overline{q_2 q_1}$, $\mathrm{tr}(q_1 q_2) = \mathrm{tr}(q_2 q_1)$,
–$||q_1 q_2|| = ||q_1|| ||q_2||$.

4– Montrer que le groupe multiplicatif $\mathbb{H}^*$ est un groupe de Lie d'algèbre de Lie $\mathbb{H}$.

5– On note $\mathbb{H}^1$ les quaternions de norme 1. Montrer que $\mathbb{H}^1$ est difféomorphe à $\mathrm{SU}(2)$.

6– On identifie $\mathbb{R}^3$ aux quaternions de trace nulle. Si s est un quaternion de norme 1 et h un quaternion de trace nulle, on pose :

$$\rho(s) \bullet h = shs^{-1}.$$

Montrer que cette action définie un difféomorphisme :

$$\mathbb{S}^3/\pm 1 \to^{\rho} \mathrm{SO}(3).$$

7– On considère de même l'action ρ_1 de $\mathbb{S}^3 \times \mathbb{S}^3$ sur $\mathbb{H}$ définie par :

$$\rho_1(s,t) \bullet q = sqt^{-1}.$$

En déduire un difféomorphisme :

$$\mathbb{S}^3 \times \mathbb{S}^3/\pm 1 \to^{\rho_1} \mathrm{SO}(4).$$