Géométrie Différentielle, TD 5 du 21 mars 2008

1. Fibrés vectoriels

1.

Montrer que le fibré tautologique de $P^n(\mathbb{R})$ (c'est à dire le fibré $l \to l$) n'est pas trivialisable.

2. Fibrés en droites sur $\mathbb{S}^1$

1– Construire un fibré en droite non trivialisable sur le cercle $\mathbb{S}_1$.

2– Montrer qu'il existe exactement deux classes d'isomorphisme de fibrés en droites de base $\mathbb{S}^1$. (Le fibré construit à la question précédente s'appelle un ruban de Möbius.)

2. Champs de vecteur

3.

Soit M une variété connexe.

1– Soit x et y dans M. Montrer qu'il existe un champs de vecteur X sur M tel que le flot de X envoie x sur y.

2– On suppose $\dim M > 1$. Montrer que pour tout entier p l'ensemble des difféomorphismes de M est p-transitif : pour tous p-uplets $(x_1, \ldots, x_p)$ et $(y_1, \ldots, y_p)$ de points distincts de M, il existe un difféomorphisme φ de M tel que pour tout $1 \leqslant i \leqslant p$, $\varphi(x_i) = y_i$.

4.

Définir sur $\mathbb{R}^2 \backslash \{0\}$ des champs de vecteurs u_r et u_θ de norme 1, et calculer leur crochet de Lie.

Trouve-t-on les mêmes champs en tirant en arrière les champs $\frac{\partial}{\partial r}$ et $\frac{\partial}{\partial \theta}$ par le difféomorphisme local $(x, y) \to (r, \theta)$?

5. Champs de vecteurs sur les sphères

Le but de cet exercice est de montrer que la sphère $\mathbb{S}^n$ possède des champs de vecteurs C^∞ ne s'annulant jamais si et seulement si n est impair.

1– Si $n = 2p + 1$ est impair, construire un champ de vecteur C^∞ ne s'annulant jamais sur $\mathbb{S}^n$ (on pourra considérer $\mathbb{S}^n$ comme la sphère unité de $\mathbb{C}^{p+1}$).

2– Soient K une partie compacte de $\mathbb{R}^{n+1}$, U un ouvert de $\mathbb{R}^{n+1}$ contenant K et v une application de classe C^∞ de U dans $\mathbb{R}^{n+1}$. Pour t dans $\mathbb{R}$, on définit une application $F_t : \left\{ \begin{array}{ccc} U & \to & \mathbb{R}^{n+1} \\ x & \mapsto & x + tv(x) \end{array} \right.$. Montrer qu'il existe un ouvert V de U contenant K et $\varepsilon > 0$ tels que, pour tout t avec $|t| \leqslant \varepsilon$, F_t soit un difféomorphisme de V sur son image. Montrer que la mesure de Lebesgue de $F_t(K)$ est alors un polynôme en t.

3– Soit v un champ de vecteurs unitaire sur $\mathbb{S}^n$. On pose toujours, pour t dans $\mathbb{R}$ et x dans $\mathbb{S}^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$, $F_t(x) = x + tv(x)$. Montrer que, pour t suffisamment petit, F_t est un difféomorphisme entre $\mathbb{S}^n$ et la sphère de rayon $\sqrt{1+t^2}$.

4– Conclure.

6.

On se place dans $\mathbb{R}^3$ muni de ses coordonnées usuelles (x, y, z). On considère les trois champs de vecteurs suivants :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} X_1(x,y,z) & = & -2z\frac{\partial}{\partial z} + 2y\frac{\partial}{\partial y} \\ X_2(x,y,z) & = & -y\frac{\partial}{\partial x} + 2x\frac{\partial}{\partial z} \\ X_3(x,y,z) & = & z\frac{\partial}{\partial x} - 2x\frac{\partial}{\partial y} \end{array} \right.$$

1– Montrer que l'application $\Delta : (x,y,z) \to Vect(X_1, X_2, X_3)$ est un champ de 2-plans C^∞ intégrable sur $\mathbb{R}^3\backslash\{0\}$.

2– Soit $\mathcal{F}$ le feuilletage de $\mathbb{R}^3\backslash\{0\}$ auquel est tangent Δ. Montrer que toutes les feuilles sont des sous-variétés de $\mathbb{R}^3\backslash\{0\}$, C^∞-difféomorphes soit au plan $\mathbb{R}^2$, soit au cylindre $\mathbb{R} \times \mathbb{S}_1$.

3. Groupe de Lie

7. Quelques difféomorphismes

1– Montrer que $SU(2)$ est C^∞-difféomorphe à $\mathbb{S}_3$.

2– Montrer que $SO(3)$ est C^∞-difféomorphe à $\mathbb{P}_3(\mathbb{R})$.