Géométrie Différentielle, TD 4 du 7 mars 2008

1. Exemple de quotient

Soit $n \geqslant 1$. Considérons l'action de $\mathbb{Z}$ sur $\mathbb{R}^n \backslash \{0\}$ engendrée par l'homothétie de rapport 2. Montrer que le quotient est une variété différentiable difféomorphe à $\mathbb{S}_1 \times \mathbb{S}_{n-1}$.

2. Orientations

Montrer que si M est une variété, TM est orientable.

3. Groupes classiques et décomposition polaire

Soit $n \geqslant 1$.

1– Montrer que les groupes $SO_n(\mathbb{R})$, $SU_n(\mathbb{R})$ sont des sous-variétés C^∞ de $GL_n(\mathbb{C})$, et déterminer leur dimension.

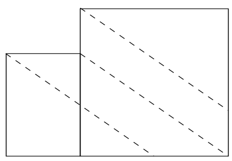
2– Montrer que exp réalise un difféomorphisme C^∞ de l'ensemble $\mathcal{H}$ des matrices hermitiennes sur l'ensemble $\mathcal{H}^+$ des matrices hermitiennes définies positives.

3– Montrer qu'il existe une unique fonction C^∞ $\sqrt{\ } : \mathcal{H}^+ \to \mathcal{H}^+$ telle que, pour tout point x de $\mathcal{H}^+$, on a $\sqrt{x}^2 = x$. En déduire que la décomposition polaire : $\mathcal{H}^+ \times U(n) \to GL(n, \mathbb{C})$ donnée par $(x, y) \to xy$ est un difféomorphisme d'inverse $x \to ((\sqrt{x^* x}), (\sqrt{x^* x})^{-1} x)$.

4– En déduire que $GL(n, \mathbb{C})$ est difféomorphe à $U(n) \times \mathbb{R}^{n^2}$.

4. Une surface de translation

On part des deux rectangles ci-dessous et on identifie par translation les côtés opposés de même longueur, comme indiqué sur le dessin (cela donne donc 4 identifications).



Montrer que la surface obtenue est homéomorphe au tore $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$. Montrer qu'elle est naturellement munie d'une structure de variété analytique, et qu'on peut même trouver un atlas (non maximal) dans lequel les changements de cartes sont donnés par des translations du plan.

5. Polynômes sur la sphère de Riemann

Soit $P \in \mathbb{C}[z]$ (on considère aussi P comme une fonction de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$). On note N le pôle nord de la sphère $\mathbb{S}_2$ et $\varphi_N : \mathbb{S}_2 \to \mathbb{C} \simeq \mathbb{R}^2$ la projection stéréographique.

1– Montrer qu'il existe une application f C^∞ de $\mathbb{S}_2$ dans $\mathbb{S}_2$ telle que pour tout x dans $\mathbb{S}_2$ différent du pôle nord N, $\varphi_N(f(x)) = P(\varphi_N(x))$.

2– Montrer que tous les points de $\mathbb{S}_2$ sauf un nombre fini sont des valeurs régulières pour f et ont une fibre de cardinal fini. Montrer que le cardinal de $f^{-1}(y)$ est constant sur l'ensemble des valeurs régulières.

3– Montrer qu'il existe $z \in \mathbb{C}$ tel que $P(z) = 0$.

6. Éclatement

Soit $n \geqslant 1$. On note $E_n = \{(x, X) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{P}^{n-1}(\mathbb{R}) \mid x \in X\}$.

1– Montrer que E_n est une sous-variété de classe C^∞ de dimension n de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{P}^{n-1}(\mathbb{R})$. Montrer que E_2 est difféomorphe à une bande de Möbius.

2– Montrer que E_n est un fibré vectoriel au-dessus de $\mathbb{P}^{n-1}(\mathbb{R})$.

3– Soit π la projection de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{P}^{n-1}(\mathbb{R})$ dans $\mathbb{R}^n$. Montrer que $E_n \backslash \pi^{-1}(0)$ est difféomorphe à $\mathbb{R}^n \backslash \{0\}$ et que $\pi^{-1}(0)$ est difféomorphe à $\mathbb{P}^{n-1}(\mathbb{R})$.

4– Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $\gamma : I \to \mathbb{R}^n$ une courbe lisse dont le vecteur dérivé ne s'annule jamais. Supposons que la restriction de γ à l'ensemble $I \backslash \gamma^{-1}(0)$ soit injective et que, pour $s \neq t$ dans I avec $\gamma(s) = \gamma(t) = 0$, on ait $\gamma'(s) \neq \gamma'(t)$. Montrer qu'il existe une unique courbe $\widetilde{\gamma} : I \to E_n$ telle que $\pi \circ \widetilde{\gamma} = \gamma$ et que $\widetilde{\gamma}$ est simple.