Géométrie Différentielle, TD 3 du 29 février 2008

1. Ruban de Moebius

En utilisant le fait que $P^n(\mathbb{R})$ est homéomorphe à la sphère S^n où on a identifié tous les couples de points diamétralement opposés, montrer que $P^2(\mathbb{R})$ privé d'un disque ouvert est homéomorphe à un ruban de moebius.

2.

Soit $v \in S^n$. Montrer que l'application :

$$\begin{array}{ccc} SO(n+1) & \to & S^n \\ g & \mapsto & g(v) \end{array}$$

est une fibration de fibre $SO(n)$.

3. Fibration de Hopf

1– Montrer que $P^n(\mathbb{C})$ admet une structure de variété différentiable.

2– Montrer que l'application :

$$\begin{array}{ccc} P^1(\mathbb{C}) & \to & S^2 \subset \mathbb{C} \times \mathbb{R} \\ (u:v) & \mapsto & \left(\frac{2u\overline{v}}{|u|^2+|v|^2}, \frac{|u|^2-|v|^2}{|u|^2+|v|^2}\right) \end{array}$$

est un difféomorphisme.

3– On identifie S^{2n+1} à $\{(z_0, \ldots, z_n) \in \mathbb{C}^{n+1} | \ \sum_{i=1}^{n+1} |z_i|^2 = 1\}$. Démontrer que l'application :

$$\begin{array}{ccc} S^{2n+1} & \to & P^n(\mathbb{C}) \\ (z_0, \ldots, z_n) & \mapsto & (z_0 : \ldots : z_n) \end{array}$$

est une fibration de fibre S^1. Pour $n = 1$ cette fibration est appelée la fibration de Hopf.

4. L'image d'une sous-variété est-elle une sous-variété ?

Soient M et N deux variétés et $f : M \to N$ une application C^∞.

1– On suppose que f est une immersion propre et que le cardinal de $f^{-1}(f(x))$ est constant et fini. Montrer que $f(M)$ est une sous-variété de N et que $f : M \to f(M)$ est un revêtement (une fibration à fibre discrète).

2– On suppose que f est propre de rang constant et que le nombre de composantes connexes de $f^{-1}(f(x))$ est constant. Montrer que $f(M)$ est une sous-variété de N.

5. Plongements du plan projectif

Soit $\Phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^6$ donnée par $(x, y, z) \mapsto (x^2, y^2, z^2, \sqrt{2}xy, \sqrt{2}zx, \sqrt{2}yz)$.

1– Montrer que $M = \Phi(\mathbb{R}^3\backslash\{0\})$ est une sous-variété de $\mathbb{R}^6$ (on a le droit d'utiliser les résultats de l'exercice suivant).

2– Montrer que $M \cap \mathbb{S}^5$ est une sous-variété de $\mathbb{S}^5$, difféomorphe à $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$.

3– On identifie $\mathbb{R}^n$ avec l'espace des polynômes en T de degré au plus $n-1$. En utilisant l'application $\chi : \begin{cases} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^5 \\ x+yT+zT^2 & \mapsto & (x+yT+zT^2)^2 \end{cases}$, construire un plongement de $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ dans $\mathbb{S}^4$.

6. Quelques difféomorphismes

1– Montrer que $SU(2)$ est C^∞-difféomorphe à $\mathbb{S}_3$.

2– Montrer que $SO(3)$ est C^∞-difféomorphe à $\mathbb{P}_3(\mathbb{R})$.

7. Variété des droites orientées de $\mathbb{R}^2$

Pour chacun des trois dessins suivants, dire s'il est possible de faire tourner la droite de manière à la ramener sur elle-même en ayant fait un demi-tour, sans qu'elle soit jamais tangente à la courbe.