Géométrie Différentielle, TD 2 du 22 février 2008

1. Immersion et sous-variété.

1– Montrer que le graphe de $x \to |x|$ n'est pas une sous-variété C^∞ de $\mathbb{R}^2$.

2– Donner un exemple d'immersion dont l'image n'est pas une sous-variété.

3– Montrer qu'il n'existe pas d'immersion de $\mathbb{S}^1$ dans $\mathbb{R}$. Plus généralement, montrer qu'il n'existe pas d'immersion de $\mathbb{S}^n$ dans $\mathbb{R}^n$.

2. Intersection de sous-variété

L'intersection de la sphère unité $x^2+y^2+z^2=1$ et du cylindre d'équation $x^2+y^2-x=0$ est-elle une sous-variété ?

3. Fonction hauteur sur le tore

On considére $\mathbb{R}^3$ muni de ses coordonnées usuelles x, y, z. On appelle tore de révolution $\mathbb{T}^2$ le sous-espace de $\mathbb{R}^3$ obtenu en faisant tourner autour de l'axe des z le cercle d'équation $y=0$, $(x-2)^2+z^2=1$.

1– Montrer que $\mathbb{T}^2$ est une sous-variété de $\mathbb{R}^3$.

2– Soit $f : \mathbb{T}^2 \to \mathbb{R}$ donnée par $f(x,y,z)=x$. Quels sont ses points critiques ?

3– Décrire les courbes de niveau de f. Lesquelles sont des sous-variétés de $\mathbb{R}^3$?

4.

Montrer que si X est une sous-variété de $\mathbb{R}^n$, l'ensemble des couples $(x,v) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ tels que $x \in X$ et v est tangent à X en x est une sous-variété de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$

5. Surfaces de révolution

1– Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^*$ une application C^∞. Notons $X = \{(f(z)\cos\theta, f(z)\sin\theta, z) \mid z \in \mathbb{R}, \theta \in \mathbb{R}\}$ la surface de révolution autour de l'axe Oz engendrée par f. Pour tout $x = (f(z)\cos\theta, f(z)\sin\theta, z) \in X$, montrer qu'il existe un voisinage U de x dans X et un voisinage V de $(0,0,z)$ dans le plan $\mathbb{R}(-\sin\theta, \cos\theta, 0) + \mathbb{R}(0,0,1)$ tels que la projection orthogonale Π_x sur V soit un homéomorphisme de U dans V, dont la réciproque est une immersion.

2– Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_+^*$ une fonction C^∞. Notons $X = \{(f(z)x_1, \dots, f(z)x_p, z \mid x_1, \dots, x_p \in \mathbb{R}$ avec $\sum x_i^2 = 1, z \in \mathbb{R}^n\}$: c'est une "surface de révolution en dimension $n+p$". Énoncer et démontrer un résultat analogue à celui de la première question.

6. Une surjection du projectif sur la sphère de même dimension

1– Montrer que le sous-ensemble des points de $P^n\mathbb{R}$ dont une coordonnée homogène est nulle forme une sous-variété difféomorphe à $P^{n-1}\mathbb{R}$.

2– On considère l'application de $\mathbb{R}^{n+1} - \{0\}$ dans $\mathbb{R}^{n+1}$ définie par :

$$(t, x_1, \ldots, x_n) \to \left(\frac{2tx_1}{t^2 + ||x||^2}, \ldots, \frac{2tx_n}{t^2 + ||x||^2}, \frac{-t^2 + ||x||^2}{t^2 + ||x||^2} \right),$$

où l'on a posé :

$$||x||^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2.$$

Montrer que cette application définit par passage au quotient une application p de $P^n\mathbb{R}$ dans $\mathbb{S}^n$ et que p est C^∞. Quelle est l'image réciproque du pôle nord $N = (0, \ldots, 0, 1)$? Du pôle sud $(0, \ldots, 0, -1)$?

3– En utilisant la projection stéréographique de pôle N, montrer que P induit un difféomorphisme de $P^n\mathbb{R} - p^{-1}(N)$ sur $\mathbb{S}^n - N$.

4– Que peut-on dire de p pour $n = 1$?

5– Montrer que l'ensemble des points de $P^n\mathbb{R}$ dont une coordonnée homogène est non nulle est connexe. En admettant le fait que le complémentaire dans $\mathbb{S}^2$ d'une courbe fermée simple a deux composantes connexes, en déduire que $P^2\mathbb{R}$ n'est pas homéomorphe à $\mathbb{S}^2$.