Géométrie Différentielle, TD 1 du 15 février 2008

Solution :

1. Inversion locale et Fonctions implicites

Montrer l'équivalence entre les deux résultats classiques suivants :

Théorème 1 (Inversion locale)**.** *Soient U un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $f : U \to \mathbb{R}^n$ une fonction C^1. Supposons que la différentielle de f en $x \in U$ est un isomorphisme de $\mathbb{R}^n$. Il existe alors un voisinage V de x tel que f soit un difféomorphisme de V sur $f(V)$.*

Théorème 2 (Fonctions implicites)**.** *Soient U un ouvert de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ et $f : U \to \mathbb{R}^m$ une fonction C^1. On note (x, y) un point de U. Soit $(a, b) \in U$ tel que $f(a, b) = 0$ et $d_y f(a, b)$ soit un isomorphisme de $\mathbb{R}^m$. Il existe alors un voisinage V de a dans $\mathbb{R}^n$, un voisinage W de b dans $\mathbb{R}^m$ avec $V \times W \subset U$, et une fonction $g : V \to W$ de classe C^1 telle que $\{(x, y) \in V \times W \mid f(x, y) = 0\} = \{(x, g(x)) \mid x \in V\}$.*

Solution :

On peut supposer sans perte de généralité que tous les points particuliers (x et $f(x)$ dans le cas de l'inversion locale, a et b dans les fonctions implicites) sont égaux à 0.

(1) $\Rightarrow$ (2) : Soit $h(x, y) = (x, f(x, y))$. La fonction h est définie sur un voisinage de 0 dans $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$, et sa différentielle est inversible. On peut donc trouver un ouvert $V \times W$ sur lequel h et h^{-1} sont définies et injectives. Notons $g(x) = \pi_2 \circ h^{-1}(x, 0)$ de classe C^1 définie sur V. On prend $V' \subset V$ tel que $g(V') \subset W$. On a alors

$$\{(x, y) \in V' \times W \mid f(x, y) = 0\} = \{(x, g(x)) \mid x \in V'\}.$$

Montrons l'inclusion $\supset$: $(x, 0) = h(x, g(x)) = (x, f(x, g(x)))$ donc $f(x, g(x)) = 0$. Montrons $\subset$: Si $f(x, y) = 0$, alors $h(x, g(x)) = (x, 0) = (x, f(x, y)) = h(x, y)$ donc, par injectivité de h sur $V' \times W$, $y = g(x)$.

(2) $\Rightarrow$ (1) : soit $h : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ donnée par $h(x, y) = f(x) - y$ (en fait, h est seulement définie sur un voisinage de 0). Alors $d_x h(0) = df_0$ est inversible, donc le théorème des fonctions implicites donne l'existence d'un voisinage $V \times W$ de $(0, 0)$ et d'une fonction $g : W \to V$ C^1 telle que $\{(x, y) \in V \times W \mid f(x) = y\} = \{(g(y), y) \mid y \in W\}$. Pour x assez proche de 0, $y := f(x)$ est bien dans V et y dans W, si bien que $x = g(y)$, puis $x = g \circ f(x)$. Ainsi, $g \circ f = \mathrm{Id}$ au voisinage de 0, et on montre de même que $f \circ g = \mathrm{Id}$.

2.

– Déterminer les sous-variétés de dimension n de $\mathbb{R}^n$.
– Soit X une sous-variété de $\mathbb{R}^n$ de dimension $\leqslant n - 2$. Montrer que $\mathbb{R}^n - X$ est connexe.

Solution :

Supposons que $\mathbb{R}^n - X$ soit la réunion de deux ouverts fermés non vides U et V. Soit $x \in X$. Un voisinage W_x de x dans $\mathbb{R}^n - X$ est connexe (puisque c'est le cas pour un sous-espace vectoriel de dimension $\leqslant n-2$). Ainsi, W_x est inclus soit dans U soit dans V.

Notons $U' = U \cup \{x \mid W_x \subset U\}$ et $V' = V \cup \{x \mid W_x \subset V\}$: c'est une partition de $\mathbb{R}^n$. Montrons que ces ensembles sont fermés.

Soit x_n une suite de U' qui tend vers $x \in \mathbb{R}^n$. Si $x_n \in X$, on le remplace par un point très proche de U, et on peut donc supposer $x_n \in U$. Si $x \in \mathbb{R}^n - X$, comme U est fermé dans $\mathbb{R}^n - X$, $x \in U$. Si $x \in X$, U rencontre des voisinages arbitrairement petits de x, donc $W_x \subset U$, puis $x \in U'$.

Ainsi, U' est fermé, de même que V'. Cela contredit la connexité de $\mathbb{R}^n$.

3.

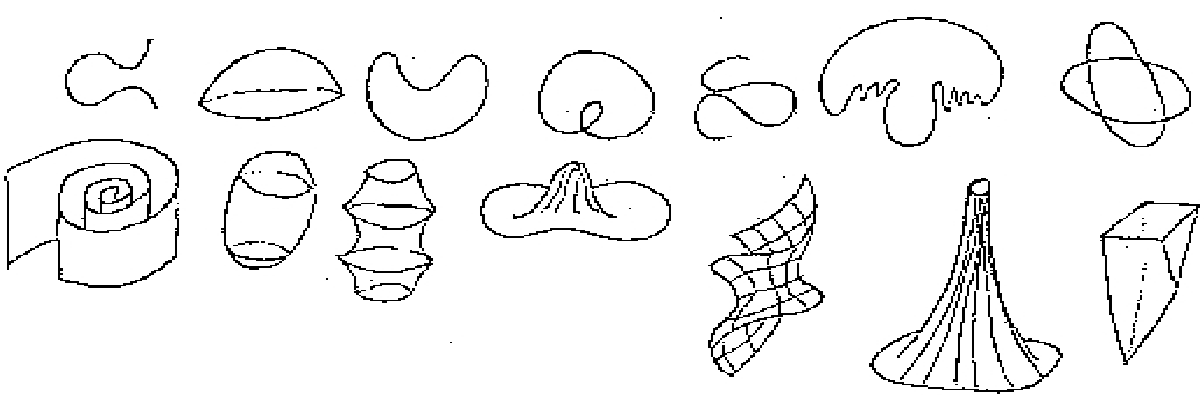
On considère $a, b \in \mathbb{R}$, et X l'ensemble des points $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tels que :

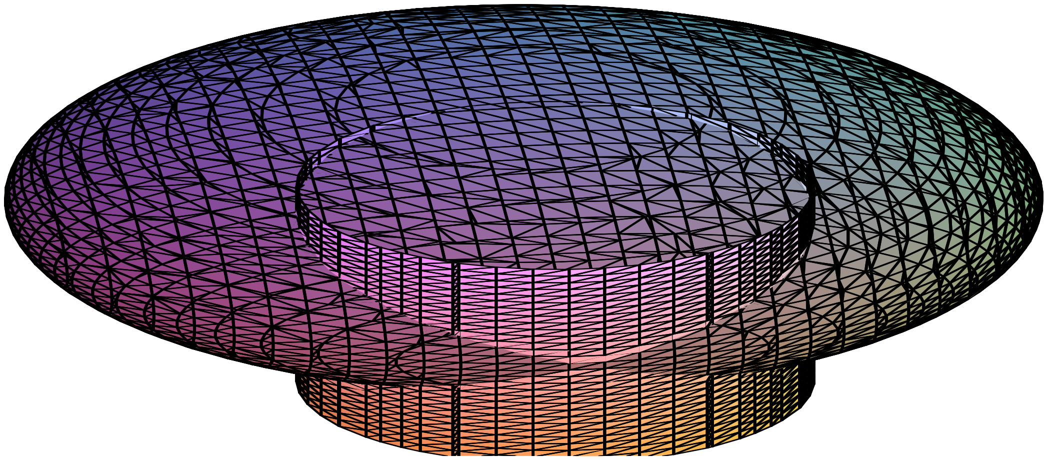
$$y^2 = x^3 + ax + b.$$

Au voisinage de quels points X est-il une sous-variété C^∞ de $\mathbb{R}^2$?

4. Exemples et contre-exemples de sous-variétés

Les dessins suivants représentent des parties de $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$. Lesquelles sont des sous-variétés lisses ?





Solution :

Les parties de $\mathbb{R}^2$ sont toutes des sous-variétés lisses à l'exception de la quatrième et de la septième de la première ligne, qui présentent des recoupements.

Pour les parties de $\mathbb{R}^3$, la troisième et la dernière de la deuxième ligne ne sont pas des sous-variétés lisses, car elles présentent des coins. Pour les autres, la réponse dépend ou non de l'inclusion du bord dans ces parties : si on n'inclut pas le bord, on a bien des sous-variétés, tandis que si on inclut le bord on n'a plus de sous-variétés.

5. Théorème du rang constant

Pour faciliter l'étude locale des difféomorphismes, il est intéressant d'en avoir des écritures simples, au moins localement. On va montrer que c'est possible sous des hypothèses sur le rang de la différentielle. Commençons par un peu de vocabulaire.

Définition 3. *Soient U et V deux ouverts respectivement de $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{R}^p$ et $f : U \to V$ une application de classe C^1. Soit $x \in U$.*

1– On dit que f est une submersion en x (ou que f est submersive en x) si df_x est une surjection.

2– On dit que f est une immersion en x (ou que f est immersive en x) si df_x est injective.

3– On dit que f est de rang constant au voisinage de x (ou parfois que f est subimmersive) si le rang de la différentielle df_y est constant pour y dans un voisinage de x.

Les submersions, immersions et applications de rang constant admettent des modèles locaux très simples :

Théorème 4. *Soient U et V deux ouverts respectivement de $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{R}^p$ contenant 0, et $f : U \to V$ une application de classe C^1 telle que $f(0) = 0$.*

1– *Supposons que f est submersive en 0. Alors, à changement de coordonnées près à la source, f se met sous la forme $f(x) = (x_1, \ldots, x_p)$. Autrement dit, il existe un difféomorphisme φ défini sur un voisinage de 0 dans $\mathbb{R}^n$ tel que $f \circ \varphi^{-1}(x_1, \ldots, x_n) = (x_1, \ldots, x_p)$.*

2– *Supposons que f est une immersion en 0. Alors, à changement de coordonnées près à la cible, f se met sous la forme $f(x_1, \ldots, x_n) = (x_1, \ldots, x_n, 0, \ldots, 0)$.*

3– *Supposons que f est de rang constant r au voisinage de 0. Alors, à changement de coordonnées près à la source et à la cible, f se met sous la forme $f(x_1, \ldots, x_n) = (x_1, \ldots, x_r, 0, \ldots, 0)$.*

Montrer ce théorème.

Solution :

On notera $e_1, \ldots, e_n$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$ et $f_1, \ldots, f_p$ celle de $\mathbb{R}^p$.

1– En permutant les coordonnées dans $\mathbb{R}^n$, on peut supposer que $df_0(e_1), \ldots, df_0(e_p)$ forme une base de $\mathbb{R}^p$. Soit alors $a : (x_1, \ldots, x_n) \mapsto (f(x_1, \ldots, x_n), x_{p+1}, \ldots, x_n)$: sa différentielle en 0 est inversible, si bien que, par le théorème d'inversion locale, a admet un inverse local b. Alors $a(b(x_1, \ldots, x_n)) = (x_1, \ldots, x_n)$, ce qui donne en considérant les p premières coordonnées que $f \circ b(x_1, \ldots, x_n) = (x_1, \ldots, x_p)$.

En particulier, si $g(x_1, \ldots, x_p) = b(x_1, \ldots, x_p, 0, \ldots, 0)$, c'est un inverse à droite de f.

2– Quitte à appliquer un isomorphisme linéaire de $\mathbb{R}^p$, on peut supposer que l'image de df_0 est engendrée par les n premiers vecteurs de base de $\mathbb{R}^p$. Soit alors $a(x_1, \ldots, x_p) = f(x_1, \ldots, x_n) + (0, \ldots, 0, x_{n+1}, \ldots, x_p)$: a a une différentielle inversible en 0, donc $b = a^{-1}$ est bien défini. Ainsi,

$$(x_1, \ldots, x_n, 0, \ldots, 0) = b \circ a(x_1, \ldots, x_n, 0, \ldots, 0) = b \circ f(x_1, \ldots, x_n).$$

3– On peut supposer que $df_0(e_i) = f_i$ pour $i = 1, \ldots, r$, et $df_0(e_i) = 0$ pour $i = r + 1, \ldots, n$.

Soit π la projection sur les r premières composantes dans $\mathbb{R}^p$, et $F : (x_1, \ldots, x_n) \mapsto (\pi(f(x_1, \ldots, x_n)), x_{r+1}, \ldots, x_n)$. Comme $dF_0 = \mathrm{Id}$, F admet un inverse local G, et il satisfait $\pi \circ f \circ G(x_1, \ldots, x_n) = (x_1, \ldots, x_r)$. Autrement dit, en faisant un changement de coordonnées à la source, on s'est ramené au cas où $f(x_1, \ldots, x_n) = (x_1, \ldots, x_r, g(x_1, \ldots, x_n))$.

Montrons que g ne dépend que de $x_1, \ldots, x_r$. Soit g_i une composante de g, et $j > r$. Le mineur de df_x donné par les r premières composantes et la coordonnée (i, j) est nul, puisque df_x est de rang r, si bien que $\frac{\partial g_i}{\partial x_j}(x) = 0$. Ainsi, $g(x_1, \ldots, x_n) = g(x_1, \ldots, x_r, 0, \ldots, 0)$. f peut donc se factoriser par la projection sur $\mathbb{R}^r \times \{0\}$.

Considérons maintenant f restreinte à $\mathbb{R}^r \times \{0\}$: elle est immersive, si bien qu'on peut la transformer en $(x_1, \ldots, x_r) \mapsto (x_1, \ldots, x_r, 0, \ldots, 0)$ par un changement de coordonnées à la cible. Cela conclut.

Remarque : ce résultat est moins anodin qu'il n'y paraît. Essayez par exemple de montrer le résultat suivant : soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dont la différentielle est partout de rang 1, égale à l'identité sur $\mathbb{R} \times \{0\}$. Alors l'image de f est incluse dans $\mathbb{R} \times \{0\}$. Directement, ce n'est pas évident que f ne va pas s'écarter de la droite des abscisses, et que la condition de rang de la différentielle est une contrainte suffisante.

6. Exponentielle de matrice

On définit la fonction exponentielle de $M(n, \mathbb{R})$ dans $GL(n, \mathbb{R})$ par la formule suivante, pour tout M dans $M(n, \mathbb{R})$: $exp(M) = \sum_{k \geqslant 0} \frac{M^k}{k!}$

1– Montrer que exp est bien définie et C^∞. Calculer sa différentielle en tout point M de $M(n, \mathbb{R})$ et en déduire qu'il existe un ouvert U de $M(N, \mathbb{R})$ contenant 0 et un ouvert V de $GL(n, \mathbb{R})$ contenant Id tels que exp réalise un difféomorphisme C^∞ de U sur V.

2– En déduire que le groupe $GL(n, \mathbb{R})$ n'a pas de sous groupe arbitrairement petits. C'est-à-dire qu'il existe un ouvert W de $GL(n, \mathbb{R})$ contenant Id tels que tout sous-groupe G de $GL(n, \mathbb{R})$ inclus dans W est réduit à l'identité.

3– On note $\mathfrak{so}(n)$ l'ensemble des matrices antisymétriques de $M(n, \mathbb{R})$. Montrer que exp envoie surjectivement $\mathfrak{so}(n)$ dans $SO(n)$.

4– On note $\mathfrak{sl}(n)$ l'ensemble des matrices de trace nulle de $M(n, \mathbb{R})$. Montrer que exp envoie $\mathfrak{sl}(n)$ dans $SL(n)$. Montrer que pour $n = 2$, ce n'est pas une surjection.

5– Montrer que exp réalise un difféomorphisme de l'ensemble des matrices symétriques sur l'ensemble des matrices symétriques définies positives.

Solution :

On se fixe une norme $\|.\|$ sur $M(n, \mathbb{R})$.

1– La série définissant exp est une série normalement convergente. Donc la fonction exp est bien définie sur $M(n, \mathbb{R})$ et C^∞.

On calcule directement d'après la formule de définition :

$$\mathrm{d}exp_M(X) = \sum_{k \geqslant 0} \frac{\sum_{i=1}^{k-1} M^i X M^{k-i-1}}{k!}$$

Pour $M = 0$, cela donne $\mathrm{d}exp_0 = Id$. On applique alors le théorème d'inversion locale pour conclure.

2– Soient $U \subset M(n, \mathbb{R})$ et $V \subset GL(n, \mathbb{R})$ deux ouverts contenant respectivement 0 et Id tels que exp réalise un difféomorphisme de U sur V. Posons $U' = \frac{1}{2}U$ et $W = exp(U')$. Soit maintenant g un élément de $W - \{Id\}$. On veut montrer qu'il existe $k > 0$ tel que g^k n'appartient pas à W.

Pour cela, notons x l'élément de U' tel que $exp(x) = g$. Alors il existe $k > 0$ tel que $(k-1)x$ appartient à U', mais kx appartient à $U - U'$. Ainsi $g^k = exp(kx)$ n'est pas l'image d'un élément de U'. Cet élément n'appartient donc pas à W.

Donc le groupe engendré par g n'est pas inclus dans W. On en conclut que W ne contient pas d'autres sous-groupes de $GL(n, \mathbb{R})$ que $\{Id\}$.

3– Si une matrice M appartient à $\mathfrak{so}(n)$, elle vérifie ${}^tM = -M$. On a alors : ${}^texp(M) = exp({}^tM) = exp(-M) = exp(M)^{-1}$. C'est-à-dire que $exp(M)$ est bien dans $SO(n)$.

Soit maintenant A dans $SO(n)$. Alors il existe une matrice P dans $SO(n)$ telle que $A = PBP^{-1}$ où B est diagonale par blocs, les blocs étant soit des 1 soit des matrices de rotation $r_\theta = \begin{pmatrix} cos\theta & -sin\theta \\ sin\theta & cos\theta \end{pmatrix}$. Or r_θ est l'exponentielle de la matrice $\begin{pmatrix} 0 & -\theta \\ \theta & 0 \end{pmatrix}$. Donc B est l'exponentielle d'une matrice antisymétrique M, et $A = exp(PM{}^tP)$ est bien dans l'image de $\mathfrak{so}(n)$.

4– Remarquons tout d'abord que pour tout A dans $M(n, \mathbb{R})$: $det(exp(A)) = exp(tr(A))$ (le faire pour les matrices trigonales, puis trigonalisables, puis conclure par continuité). Donc l'image de $\mathfrak{sl}(n)$ par exp est bien incluse dans $SL(n)$.

On suppose maintenant que $n = 2$. Soit A une matrice de $\mathfrak{sl}(2)$, c'est-à-dire de trace nulle. Alors ses valeurs propres λ et μ sont soit réeles de la forme a et $-a$, soit complexes conjuguées donc de la forme ib et $-ib$. Dans les deux cas, on vérifie aisément que $e^\lambda + e^\mu \geqslant -2$.

Donc la matrice $\begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$ n'est pas dans l'image de exp.

5– L'image par exp d'une matrice symétrique est symétrique et a toutes ses valeurs propres strictement positives, donc est symétrique définie positive.

Réciproquement si A est symétrique définie positive, on peut la diagonaliser et donc supposer que $A = \mathrm{diag}(x_1, \ldots, x_n)$ où les x_i sont des réels strictement positifs. Donc $A = exp(\mathrm{diag}(ln(x_1), \ldots, \ln(x_n))$. De plus, si P est le polynôme de Lagrange qui vaut $ln(x_i)$ en x_i, alors on voit que $M = P(A)$.

Montrons que M est le seul antécédent de A. En effet, si M' en est un autre, M' commute avec $A = exp(M')$, donc avec $M = P(A)$. Donc M et M' sont simultanément diagonalisable. Comme leur exponentielles sont égales, M et M' sont égales.

Ainsi exp réalise une bijection de l'ensemble des matrices symétriques sur l'ensembles des matrices symétriques définies positives. Il reste à montrer que c'est un difféomorphisme, et pour cela il suffit de vérifier que la différentielle est partout injective.

On commence par remarquer que pour toutes matrices M, P et X, on a :

$$\mathrm{d}(exp)_{PMP^{-1}}(X) = P\,\mathrm{d}(exp)_M(P^{-1}XP)P^{-1}$$

Soit donc M une matrice symétrique. On veut montrer que $\mathrm{d}exp_M$ est injective, et d'après la remarque précédente, on peut supposer que M est diagonale de valeurs propres $x_1, \ldots x_n$.

On calcule alors pour les matrices élémentaires :

$$\mathrm{d}exp_M(E_{ij}) = \left(\sum_{k\geqslant 1} \frac{\sum_{l=0}^{k-1} x_i^l x_j^{k-l-1}}{k!}\right) E_{ij}$$

On vérifie alors que le coefficient $\displaystyle\sum_{k\geqslant 1} \frac{\sum_{l=0}^{k-1} x_i^l x_j^{k-l-1}}{k!}$ est non nul, ce qui termine la preuve.

7. Sous-variétés de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

Soient $0 \leqslant r \leqslant n$ des entiers, avec $n \geqslant 2$.

1– Montrer qu'il existe un voisinage U de 0 dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ tel que, si $\begin{pmatrix} A & C \\ B & D \end{pmatrix} \in U$, alors la matrice $\begin{pmatrix} I_r + A & C \\ B & D \end{pmatrix}$ est de rang r si et seulement si $D = B(I_r + A)^{-1}C$.

2– Soit $V_r \subset \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices à coefficients réels de rang r. Montrer que c'est une sous-variété de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et calculer sa codimension.

3– Montrer que les matrices symétriques de rang r forment une sous-variété de l'espace des matrices symétriques. Calculer sa codimension.

4– (*) Montrer que les projecteurs orthogonaux de rang r forment une sous-variété de l'espace des matrices symétriques, de dimension $r(n-r)$.

5– (*) Montrer que les matrices de rang $\leqslant n-1$ ne forment pas une sous-variété de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On pourra par exemple considérer ce qui se passe en 0.

Solution :

1– Notons $a_1, \ldots, a_n$ les colonnes de la matrice A. En utilisant la multilinéarité du déterminant, on vérifie que

$$\det(A+H) = \det(a_1, \ldots, a_n) + \sum_{k=1}^{n} \det(a_1, \ldots, a_{k-1}, h_k, a_{k+1}, \ldots, a_n) + O(\|H\|^2).$$

Ainsi, la différentielle du déterminant est donnée par

$$d(\det)_A(H) = \sum_{k=1}^{n} \det(a_1, \ldots, a_{k-1}, h_k, a_{k+1}, \ldots, a_n).$$

Supposons que $d(\det)_A = 0$. Choisissons pour H une matrice élémentaire $E_{k,l}$ avec des 0 partout sauf un 1 en position (k,l). L'équation $d(\det)_A(H) = 0$ montre que le mineur de taille $n-1$ de A obtenu en supprimant la $k^{\text{ème}}$ ligne et la $l^{\text{ème}}$ colonne de

A est nul. Ainsi, $d(\det)_A = 0$ si et seulement si tous les mineurs de taille $n-1$ de A sont nuls, i.e., si et seulement si le rang de A est $< n-1$.

Soit $X = SL_n(\mathbb{R})$. La fonction $\Phi : A \mapsto \det(A) - 1$ est une submersion en tout point de X, et X s'écrit localement comme $\Phi^{-1}(0)$. La caractérisation des sous-variétés comme surfaces de niveau locales de submersions montre donc que X est une sous-variété de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

L'argument est le même pour l'ensemble Y des matrices de rang $n-1$. On utilise alors la fonction $\Phi : A \mapsto \det(A)$. Il faut utiliser de plus que, si $A \in Y$, il existe un voisinage U de A tel que $Y \cap U = \{\Phi^{-1}(0)\} \cap U$, ce qui découle de la semi-continuité du rang (localement, le rang ne peut que croître).

2– Si $\begin{pmatrix} A & C \\ B & D \end{pmatrix}$ est une matrice assez proche de 0 pour que $I_r + A$ soit inversible, on a

$$\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ -B & I_{n-r} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (I_r+A)^{-1} & 0 \\ 0 & I_{n-r} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_r + A & C \\ B & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_r & (I_r+A)^{-1}C \\ 0 & D - B(I_r+A)^{-1}C \end{pmatrix}.$$

Ainsi, $\begin{pmatrix} I_r + A & C \\ B & D \end{pmatrix}$ est de rang r si et seulement si $D = B(I_r + A)^{-1}C$.

3– Soit $X \in V_r$. Il existe des matrices inversibles P et Q telles que $PXQ = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} =: I_{r,0}$. Si on savait que V_r était une sous-variété au voisinage de $I_{r,0}$, on en déduirait donc le même résultat au voisinage de X puisque le difféomorphisme $\Psi : Y \mapsto PYQ$ laisse V_r invariant.

Il suffit donc de travailler au voisinage de $I_{r,0}$. Soit

$$\Phi : \begin{pmatrix} I_r + A & C \\ B & D \end{pmatrix} \mapsto D - B(I_r+A)^{-1}C \tag{1}$$

définie au voisinage de $I_{r,0}$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ à valeurs dans $\mathcal{M}_{n-r}(\mathbb{R})$. Sa différentielle est surjective en $I_{r,0}$ car elle est donnée par $d\Phi_{I_{r,0}} \begin{pmatrix} A & C \\ B & D \end{pmatrix} = D$. Ainsi, le théorème des submersions s'applique et montre que $\Phi^{-1}(0)$ est une sous-variété au voisinage de $I_{r,0}$. La question précédente montre de plus qu'elle coïncide avec V_r au voisinage de $I_{r,0}$, ce qui conclut. Sa codimension est $\dim \mathcal{M}_{n-r}(\mathbb{R}) = (n-r)^2$.

4– Lorsque $p + q = r$, notons $I_{p,q} = \begin{pmatrix} I_p & 0 \\ 0 & -I_q \end{pmatrix}$ et $I_{p,q,0} = \begin{pmatrix} I_{p,q} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Toute matrice symétrique s'écrit sous la forme ${}^tPI_{p,q,0}P$ pour une certaine matrice P, et il suffit donc comme dans le cas précédent de montrer que les matrices symétriques de rang r forment une sous-variété au voisinage de $I_{p,q,0}$.

Comme plus haut, une matrice symétrique $\begin{pmatrix} I_{p,q} + A & {}^tB \\ B & D \end{pmatrix}$ proche de $I_{p,q,0}$ est de rang r si et seulement si $D = B(I_{p,q} + A)^{-1}\,{}^tB$. On considère donc une application

Φ comme en (1). Sa différentielle est encore surjective (cette fois sur l'espace des matrices symétriques), donc on conclut comme plus haut. Ici, la codimension est la dimension des matrices symétriques de taille $n-r$, i.e. $\frac{(n-r)(n-r+1)}{2}$.

5– Comme plus haut, on se ramène au voisinage de $I_{r,0}$. Soit $M = \begin{pmatrix} I_r + A & {}^tB \\ B & D \end{pmatrix}$ une matrice symétrique proche de $I_{r,0}$. Elle est de rang r si et seulement si $D = B(I_r+A)^{-1}{}^tB$. En ce cas, la matrice $M^2 - M$ est égale à

$$\begin{pmatrix} A + A^2 + {}^tBB & A^tB + {}^tBB(I_r+A)^{-1}{}^tB \\ BA + B(I_r+A)^{-1}{}^tBB & B^tB + B(I_r+A)^{-1}{}^tBB(I_r+A)^{-1}{}^tB - B(I_r+A)^{-1}{}^tB \end{pmatrix}.$$

La matrice M est un projecteur si et seulement si cette matrice est nulle, ce qui équivaut à $A + A^2 + {}^tBB = 0$, i.e. ${}^tBB = -A(I_r+A)$: on vérifie en effet que cette condition implique que les quatre cases de la matrice écrite ci-dessus sont nulles.

On définit donc une application

$$\Phi : \begin{pmatrix} I_r + A & C \\ B & D \end{pmatrix} \mapsto (D - B(I_r+A)^{-1}{}^tB, A + A^2 + {}^tBB).$$

Une matrice M proche de $I_{r,0}$ est un projecteur orthogonal de rang r si et seulement si $\Phi(M) = 0$. De plus, $d\Phi_{I_{r,0}}$ est surjective. On conclut donc comme plus haut.

6– Soit X l'ensemble des matrices de rang au plus $n-1$. Supposons que X soit une sous-variété. Sur un voisinage V de 0, il existe un paramétrage local f de X, i.e., il existe une application f de classe C^1 définie sur un voisinage U de 0 dans $\mathbb{R}^k$ (avec $k \leqslant n^2$) qui est une immersion et un homéomorphisme sur son image, avec $f(0) = 0$ et $f(U) = X \cap V$.

Comme $n \geqslant 2$, la matrice $E_{k,l}$ appartient à X. Pour t assez petit, il existe donc un élément $e_{k,l}(t)$ de U tel que $f(e_{k,l}(t)) = tE_{k,l}$. Comme f est un homéomorphisme sur son image, $e_{k,l}(t)$ tend vers 0 quand t tend vers 0. La suite $\frac{e_{k,l}(1/p)}{\|e_{k,l}(1/p)\|}$ appartient à la sphère unité compacte de $\mathbb{R}^k$, on peut donc supposer qu'elle converge vers un vecteur $v_{k,l}$ de norme 1. Alors

$$df_0(v_{k,l}) = \lim \frac{f(e_{k,l}(1/p))}{\|e_{k,l}(1/p)\|}.$$

Comme $f(e_{k,l}(1/p))$ est proportionnel à la matrice $E_{k,l}$, on obtient en passant à la limite que $df_0(v_{k,l}) = \lambda E_{k,l}$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$. Comme df_0 est injective, $\lambda \neq 0$. Ainsi, l'image de l'application linéaire df_0 contient toutes les matrices $E_{k,l}$, elle est donc surjective. En particulier, $k = n^2$. Le théorème d'inversion locale assure alors que X contient un voisinage de 0, ce qui est absurde.