

Surfaces B-splines

Pierre Pansu

February 7, 2004

1 Surfaces B-splines produits tensoriels

1.1 Définition

On étend naïvement à la dimension 2 l'idée des courbes B-splines. Le domaine de variation des paramètres est un rectangle, produit cartésien de deux intervalles. On se donne deux vecteurs de noeuds u_0, \dots, u_m et $v_0, \dots, v_{m'}$. On se donne, à la place d'un polygone de contrôle, un *réseau de contrôle* (**control net**), i.e. des points P_{ij} indexés par les couples de noeuds $i = 0, \dots, m$, $j = 0, \dots, m'$.

Définition 1.1 La surface B-spline de bidegré (k, ℓ) associée aux vecteurs de noeuds \mathbf{u} et \mathbf{v} et au réseau de contrôle \mathbf{P} est la surface paramétrée

$$(u, v) \mapsto \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^{m'} B_{i,k}(u) B_{j,\ell}(v) P_{ij}.$$

Dans le cas particulier où les deux vecteurs de noeuds sont de la forme $(0, \dots, 0, 1, \dots, 1)$, on parle de carreau de Bézier (**Bézier rectangular patch**).

Si on se donne en plus un poids w_{ij} pour chaque point de contrôle, la surface B-spline rationnelle de bidegré (k, ℓ) associée à toutes les données est la surface paramétrée

$$(u, v) \mapsto \frac{\sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^{m'} w_{ij} B_{i,k}(u) B_{j,\ell}(v) P_{ij}}{\sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^{m'} w_{ij} B_{i,k}(u) B_{j,\ell}(v)}.$$

Remarque. Noter que la restriction d'une telle surface paramétrée à toute droite du plan (u, v) parallèle à l'un des axes de coordonnées est une courbe B-spline (resp. rationnelle). Ce n'est pas le cas pour les droites obliques.

Remarque. Il y a des généralisations moins naïves des courbes B-splines aux dimensions supérieures. En effet, il y a une théorie des fonctions B-splines en plusieurs variables, les splines polyédrales, voir par exemple [R] paragraphe 4.7.

Lemme 1.2 Soit $X_{k,\ell}$ la surface B-spline de bidegré (k, ℓ) associée aux vecteurs de noeuds \mathbf{u} et \mathbf{v} et au réseau de contrôle \mathbf{P} . Supposons que $u_0 = \dots = u_k$ est un noeud de multiplicité $k+1$. En tout point (u_0, v) , les dérivées partielles par rapport à u , $\frac{\partial X_{k,\ell}}{\partial u}(u_0, v)$ et $\frac{\partial^2 X_{k,\ell}}{\partial u^2}(u_0, v)$, coïncident avec les valeurs en v de deux courbes B-splines de degré ℓ associées aux polygones de contrôle

$$R_j^1 = \frac{k}{u_{k+1} - u_0} (P_{1j} - P_{0j})$$

et

$$R_j^2 = \frac{k(k-1)}{(u_{k+1} - u_0)(u_{k+2} - u_0)} (P_{2j} - 2P_{1j} + P_{0j})$$

respectivement.

Preuve.

La courbe $u \mapsto X_{k,\ell}(u, v)$ est la B-spline de degré k associée au polygone de contrôle

$$P_i(v) = \sum_j B_{j,\ell}(v) P_{ij}.$$

Si u_0 est un noeud de multiplicité $k + 1$, sa dérivée est donnée par la proposition ??

$$\begin{aligned} \frac{\partial X_{k,\ell}}{\partial u}(u_0, v) &= \frac{k}{u_{k+1} - u_0} (P_1(v) - P_0(v)) \\ &= \sum_j B_{j,\ell}(v) \frac{k}{u_{k+1} - u_0} (P_{1j} - P_{0j}), \end{aligned}$$

qui est la valeur en v de la courbe B-spline de degré ℓ associée au polygone de contrôle

$$R_j^1 = \frac{k}{u_{k+1} - u_0} (P_{1j} - P_{0j}).$$

Le mécanisme est le même pour la dérivée seconde. ■

1.2 Condition suffisante de raccord pour des surfaces B-splines

Les quantités mises en oeuvre dans le théorème du cours sur la courbure des surfaces ne sont pas données par des formules simples (bien que le calcul soit immédiat à l'aide de l'algorithme de de Casteljaou), car elles sont non linéaires. Néanmoins, on peut donner une condition suffisante, mais non nécessaire, de raccord.

On se donne deux surfaces B-splines qu'on cherche à recoller le long d'une courbe à u constant. On donne les conditions pour que les courbes à v constant présentent un raccord G^1 (resp. G^2) pour tout v .

Proposition 1.3 *Soient \mathbf{u}, \mathbf{v} et $\bar{\mathbf{u}}$ des vecteurs de noeuds. Soient \mathbf{P} et $\bar{\mathbf{P}}$ des réseaux de contrôle. On suppose que*

- $u_0 = \dots = u_k$ et $\bar{u}_{m-k} = \dots = \bar{u}_m$;
- pour tout j , $P_{0j} = \bar{P}_{(m-k-1)j}$;
- il existe une constante $\lambda > 0$ telle que pour tout j ,

$$P_{1j} - P_{0j} = \lambda(\bar{P}_{(m-k-1)j} - \bar{P}_{(m-k-2)j}).$$

Alors la réunion des deux surfaces B-splines de degré k X_k (resp. \bar{X}_k) associées aux noeuds \mathbf{u} et \mathbf{v} et au réseau de contrôle \mathbf{P} (resp. aux noeuds $\bar{\mathbf{u}}, \mathbf{v}$ et au réseau de contrôle $\bar{\mathbf{P}}$) est une surface de classe G^1 . Supposons de plus que

- il existe des constantes $\mu > 0$ et μ' telles que pour tout j ,

$$P_{2j} - 2P_{1j} + P_{0j} = \mu(\bar{P}_{(m-k-1)j} - 2\bar{P}_{(m-k-2)j} + \bar{P}_{(m-k-3)j}) + \mu'(P_{1j} - P_{0j});$$

- pour tout j ,

$$\frac{\mu}{\lambda^2} = \frac{(u_{k+2} - u_0)(\bar{u}_m - \bar{u}_{m-k-1})}{(u_{k+1} - u_0)(\bar{u}_m - \bar{u}_{m-k-2})}.$$

Alors la réunion $X_{k,\ell} \cup \bar{X}_{k,\ell}$ est une surface de classe G^2 .

Preuve. Ces conditions linéaires sur les réseaux de contrôle entraînent pour chaque v , des relations analogues pour les dérivées

$$\frac{u_{k+1} - u_0}{k} \frac{\partial X_{k,\ell}}{\partial u}(u_0, v) = \lambda \frac{\bar{u}_m - \bar{u}_{m-k-1}}{k} \frac{\partial \bar{X}_{k,\ell}}{\partial u}(\bar{u}_m, v)$$

et

$$\begin{aligned} \frac{(u_{k+1} - u_0)(u_{k+2} - u_0)}{k(k-1)} \frac{\partial^2 X_{k,\ell}}{\partial u^2}(u_0, v) &= \mu \frac{(\bar{u}_m - \bar{u}_{m-k-1})(\bar{u}_m - \bar{u}_{m-k-2})}{k(k-1)} \frac{\partial^2 \bar{X}_{k,\ell}}{\partial u^2}(\bar{u}_m, v) \\ &+ \mu' \frac{u_{k+1} - u_0}{k} \frac{\partial X_{k,\ell}}{\partial u}(u_0, v). \end{aligned}$$

La première entraîne l'égalité des tangentes orientées et donc le raccord G^1 , d'après la proposition ??.

De la seconde, on tire que

$$\frac{(u_{k+1} - u_0)^2(u_{k+2} - u_0)}{k^2(k-1)} \frac{\partial X_{k,\ell}}{\partial u} \wedge \frac{\partial^2 X_{k,\ell}}{\partial u^2} = \lambda \mu \frac{(\bar{u}_m - \bar{u}_{m-k-1})^2(\bar{u}_m - \bar{u}_{m-k-2})}{k(k-1)} \frac{\partial \bar{X}_{k,\ell}}{\partial u} \wedge \frac{\partial^2 \bar{X}_{k,\ell}}{\partial u^2}$$

qui entraîne l'égalité des normales orientées. Si de plus

$$\frac{\mu}{\lambda^2} = \frac{(u_{k+2} - u_0)(\bar{u}_m - \bar{u}_{m-k-1})}{(u_{k+1} - u_0)(\bar{u}_m - \bar{u}_{m-k-2})},$$

alors les courbures coïncident. Par conséquent, pour chaque v , les courbes $u \mapsto X_{k,\ell}(u, v)$ et $u \mapsto \bar{X}_{k,\ell}(u, v)$ satisfont les conditions de raccord G^2 de la proposition ??. Le corollaire du cours sur le courbure des surfaces montre alors que les surfaces se raccordent avec régularité G^2 . ■

1.3 Raccordement le long d'une droite

Les conditions suffisantes de raccord de la proposition 1.3 ne sont évidemment pas nécessaires. Par exemple, pour raccorder une surface B-spline à un demi-plan, il suffit que le réseau de contrôle soit contenu dans le plan considéré.

Toutefois, dans le cas particulier où la courbe de suture est une droite (à l'ordre 2 il faut en plus que le plan tangent soit constant le long de cette droite, ce qui est le cas pour les cylindres et les cônes), on peut donner une condition suffisante qui est génériquement nécessaire.

Proposition 1.4 *Soient \mathbf{u} , $\bar{\mathbf{u}}$, \mathbf{v} des vecteurs de noeuds. On suppose que $u_0 = \dots = u_k$ et $\bar{u}_{m-k} = \dots = \bar{u}_m$. Soit $\bar{\mathbf{P}}$ un réseau de contrôle tel que la surface B-spline $\bar{X}_{k,\ell}$ correspondante soit bordée par une droite D . Soit \mathbf{P} un autre réseau de contrôle, et $X_{k,\ell}$ la surface B-spline de bidegré (k, ℓ) correspondante.*

- Pour que les surfaces $X_{k,\ell}$ et $\bar{X}_{k,\ell}$ se raccordent G^0 , il faut et il suffit que les points P_{0j} soient sur D .
- Supposons que pour tout j , $P_{0j} = \bar{P}_{(m-k-1)j}$. Notons τ un vecteur directeur de la droite D qui borde $\bar{X}_{k,\ell}$. Pour que le raccord soit de classe G^1 , il suffit qu'il existe une constante λ telle que pour tout j ,

$$(P_{1j} - P_{0j}) \wedge \tau = \lambda (\bar{P}_{(m-k-1)j} - \bar{P}_{(m-k-2)j}) \wedge \tau,$$

et c'est génériquement nécessaire.

- Supposons de plus que le plan tangent à $\bar{X}_{k,\ell}$ est constant le long du bord, de vecteur normal Γ . Pour que le raccord soit de classe G^2 , il faut et il suffit que pour tout j ,

$$\frac{u_{k+1} - u_0}{u_{k+2} - u_0} (P_{2j} - P_{0j}) \cdot \Gamma = \lambda^2 \frac{\bar{u}_m - \bar{u}_{m-k-1}}{\bar{u}_m - \bar{u}_{m-k-2}} (\bar{P}_{(m-k-1)j} - \bar{P}_{(m-k-3)j}) \cdot \Gamma.$$

Preuve. Si les points de contrôle P_{0j} sont sur D , la courbe B-spline $v \mapsto X_{k,\ell}(u_0, v)$ est contenue dans D .

Inversement, notons pr la projection parallèlement à $D = \partial\bar{X}_{k,\ell}$ sur un plan π transverse à D . S'il y a raccord G^0 , c'est que la courbe $v \mapsto X_{k,\ell}(u_0, v)$ est contenue dans la droite D , donc sa projection est constante (mettons, égale à 0). On a donc pour tout v

$$\sum_j B_{j,\ell}(v) pr(P_{0j}) = 0.$$

Comme les fonctions B-splines non nulles sur un intervalle entre deux noeuds sont linéairement indépendantes (lemme ??), cela entraîne que $pr(P_{0j}) = 0$ pour tout j , i.e. que les points P_{0j} sont sur la droite D .

Supposons que pour tout j , $P_{0j} = \bar{P}_{(m-k-1)j}$ et

$$(P_{1j} - P_{0j}) \wedge \tau = \lambda(\bar{P}_{(m-k-1)j} - \bar{P}_{(m-k-2)j}) \wedge \tau,$$

où λ ne dépend pas de j . Alors, comme dans la preuve de la proposition 1.3, pour tout v ,

$$\frac{u_{k+1} - u_0}{k} \frac{\partial X_{k,\ell}}{\partial u}(u_0, v) \wedge \tau = \lambda \frac{\bar{u}_m - \bar{u}_{m-k-1}}{k} \frac{\partial \bar{X}_{k,\ell}}{\partial u}(\bar{u}_m, v) \wedge \tau.$$

Par conséquent, les vecteurs τ , $\frac{\partial X_{k,\ell}}{\partial u}(u_0, v)$ et $\frac{\partial \bar{X}_{k,\ell}}{\partial u}(\bar{u}_m, v)$ sont coplanaires, donc les deux surfaces ont même plan tangent en chaque point de leur bord, et le raccord est de classe G^1 .

La condition que pour tout j , $P_{0j} = \bar{P}_{(m-k-1)j}$ n'est pas nécessaire mais on la suppose satisfaite, car c'est seulement dans ce cas que la condition de raccord G^1 est linéaire. Supposons le raccord de classe G^1 . Alors pour tout v , les plans tangents en $X_{k,\ell}(u_0, v)$ aux surfaces $\bar{X}_{k,\ell}$ et $X_{k,\ell}$ sont égaux, donc les vecteurs

$$\frac{\bar{u}_m - \bar{u}_{m-k-1}}{k} \frac{\partial X_{k,\ell}}{\partial u}(u_0, v) \wedge \tau = \begin{pmatrix} A(v) \\ B(v) \\ C(v) \end{pmatrix}$$

et

$$\frac{u_{k+1} - u_0}{k} \frac{\partial \bar{X}_{k,\ell}}{\partial u}(\bar{u}_m, v) \wedge \tau = \begin{pmatrix} E(v) \\ F(v) \\ G(v) \end{pmatrix}$$

sont colinéaires. Pour un choix générique du réseau de contrôle $\bar{\mathbf{P}}$, les polynômes A et B (resp. A et C) sont premiers entre eux, donc l'égalité $AF - EB = 0$ (resp. $AG - EC = 0$) entraîne que C divise G , B divise F et A divise E , donc il existe un polynôme H tel que $E = HA$, $F = HB$ et $G = HC$. Comme les polynômes en jeu sont de même degré ℓ , nécessairement $H = \lambda$ est constant. Or

$$\begin{pmatrix} E \\ F \\ G \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} A \\ B \\ C \end{pmatrix}$$

est la courbe B-spline de degré ℓ associée au polygone de contrôle

$$(P_{1j} - P_{0j} - \lambda(\bar{P}_{(m-k-1)j} - \bar{P}_{(m-k-2)j})) \wedge \tau.$$

Si elle est identiquement nulle, tous les points de contrôle sont nuls, donc pour tout j ,

$$(P_{1j} - P_{0j} - \lambda(\bar{P}_{(m-k-1)j} - \bar{P}_{(m-k-2)j})) \wedge \tau = 0.$$

Supposons que le plan tangent à la surface $\bar{X}_{k,\ell}$ le long de D est constant, de vecteur normal Γ . Pour toute surface X contenant D et de vecteur normal constant, égal à Γ , le long de D , la seconde

forme fondamentale en tout point P du bord est dégénérée, avec τ comme direction principale, de courbure principale nulle. En effet,

$$II_P(\tau, w) = \frac{\partial \Gamma}{\partial v} \cdot w = 0$$

pour tout vecteur $w \in T_P X$. Par conséquent $II_P(w)$ ne dépend que de la composante orthogonale à τ de w . Soient \bar{w} et w deux vecteurs orthogonaux à Γ , et tels que

$$w \wedge \tau = \bar{w} \wedge \tau \neq 0.$$

Alors les surfaces $\bar{X}_{k,\ell}$ et $X_{k,\ell}$ ont même seconde forme fondamentale en P si et seulement si

$$\bar{II}_P(\bar{w}) = II_P(w).$$

Au point $P = X_{k,\ell}(u_0, v)$, on choisit

$$\bar{w} = \lambda(\bar{u}_m - \bar{u}_{m-k-1}) \frac{\partial \bar{X}_{k,\ell}}{\partial u}(\bar{u}_m, v) \quad \text{et} \quad w = (u_{k+1} - u_0) \frac{\partial X_{k,\ell}}{\partial u}(u_0, v).$$

Or

$$II_P\left(\frac{\partial X_{k,\ell}}{\partial u}(u_0, v)\right) = \Gamma \cdot \frac{\partial^2 X_{k,\ell}}{\partial u^2}(u_0, v)$$

et le lemme 1.2 donne

$$\frac{\partial^2 X_{k,\ell}}{\partial u^2}(u_0, v) = \sum_j B_{j,\ell} \frac{k(k-1)}{(u_{k+1} - u_0)(u_{k+2} - u_0)} (P_{2j} - 2P_{1j} + P_{0j}),$$

donc l'identité

$$\bar{II}_{X_{k,\ell}(u_0, v)}(\bar{w}) = II_{X_{k,\ell}(u_0, v)}(w).$$

est satisfaite pour tout v si et seulement si pour tout j ,

$$\frac{u_{k+1} - u_0}{u_{k+2} - u_0} (P_{2j} - P_{0j}) \cdot \Gamma = \lambda^2 \frac{\bar{u}_m - \bar{u}_{m-k-1}}{\bar{u}_m - \bar{u}_{m-k-2}} (\bar{P}_{(m-k-1)j} - \bar{P}_{(m-k-3)j}) \cdot \Gamma.$$

On conclut à l'aide du théorème du cours sur la courbure des surfaces. ■

2 Surfaces NURBS

2.1 Définition

Définition 2.1 Une surface NURBS dans \mathbf{R}^3 , c'est la projection centrale d'une surface B-spline produit tensoriel dans \mathbf{R}^4 . Autrement dit, on se donne deux vecteurs de noeuds, un polyèdre de contrôle et un poids w_{ij} pour chaque point de contrôle P_{ij} , et la surface associée est paramétrée par

$$(u, v) \mapsto X(u, v) = \frac{\sum_{i,j} B_{i,k}(u) B_{j,k'}(v) w_{ij} P_{ij}}{\sum_{i,j} B_{i,k}(u) B_{j,k'}(v) w_{ij}}.$$

De la sorte, les courbes à u constant et à v constant sont des NURBS.

2.2 Surfaces de révolution

Proposition 2.2 Soit γ une NURBS de degré k tracée dans un plan Π et soit D une droite de Π . La surface de révolution obtenue en faisant tourner γ autour de D est une NURBS de bidegré $(2, k)$.

Preuve. Montrons le pour un quart de cette surface (pour obtenir la totalité de la surface par une paramétrisation périodique, utiliser l'exercice ??). On va utiliser la paramétrisation rationnelle d'un quart de cercle,

$$u \mapsto \left(\frac{1-u^2}{1+u^2}, \frac{2u}{1+u^2} \right).$$

On voit cette courbe comme la projection centrale de la courbe de Bézier quadratique σ de \mathbf{R}^3 donnée par

$$u \mapsto \sigma(u) = (1+u^2, 1-u^2, 2u).$$

On peut supposer que la droite D est l'axe Oz et Π le plan des x et z . Notons P_{0j} le polygone de contrôle de γ , w_{0j} les poids et $R_{0j} = (w_{0j}, w_{0j}P_{0j}) \in \mathbf{R}^4$. Notons v le paramètre sur γ . On veut qu'à v constant, $u \mapsto X(u, v)$ soit le quart de cercle du plan $\{z = z(v)\}$ d'origine $\gamma(v) = (x(v), 0, z(v))$ et d'extrémité $(0, y(v), z(v))$, paramétré rationnellement. On pose donc

$$\begin{aligned} X(u, v) &= \begin{pmatrix} x(v) \frac{1-u^2}{1+u^2} \\ x(v) \frac{2u}{1+u^2} \\ z(v) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{1-u^2}{1+u^2} & -\frac{2u}{1+u^2} & 0 \\ \frac{2u}{1+u^2} & \frac{1-u^2}{1+u^2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \gamma(v). \end{aligned}$$

Soit

$$c(v) = \sum_j B_{j,k}(v) R_{0j}$$

la courbe B-spline dans \mathbf{R}^4 dont la projection centrale est γ . Posons

$$Y(u, v) = \begin{pmatrix} 1+u^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1-u^2 & -2u & 0 \\ 0 & 2u & 1-u^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1+u^2 \end{pmatrix} c(v).$$

Alors $Y(u, v) = (\sigma_0(u)c_0(v), \sigma_0(u)c_0(v)X(u, v))$. Autrement dit, X est la projection centrale de Y .

Il reste à montrer que Y est une surface B-spline produit tensoriel. Décomposons la matrice

$$M(u) = \begin{pmatrix} 1+u^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1-u^2 & -2u & 0 \\ 0 & 2u & 1-u^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1+u^2 \end{pmatrix}$$

dans la base des polynômes de Bernstein de degré 2. Il vient

$$M(u) = (1-u)^2 M_0 + 2u(1-u) M_1 + u^2 M_2$$

où

$$\begin{aligned} M_0 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \\ M_1 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \\ M_2 &= \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Il vient

$$\begin{aligned} Y(u, v) &= M(u)c(v) \\ &= \left(\sum_i B_{i,2}(u)M_i\right)\left(\sum_j B_{j,k}(v)R_{0j}\right) \\ &= \sum_{i,j} B_{i,2}(u)B_{j,k}(v)R_{ij} \end{aligned}$$

où $R_{ij} = M_i R_{0j}$. On conclut que Y est une surface B-spline produit tensoriel de bidegré $(2, k)$, donc X est une surface NURBS.

Le polyèdre de contrôle de X s'obtient à partir de celui de γ comme suit. Les P_{0j} sont les points de contrôle de γ . P_{2j} est l'image de P_{0j} par la rotation de 90° autour de l'axe Oz , et P_{1j} est l'image de P_{0j} par la rotation de 45° autour de l'axe Oz suivie d'une dilatation d'un facteur $\sqrt{2}$ dans les directions horizontales.

Les poids pour la surface X sont les $w_{ij} = w'_i w_j$ où les w'_i sont les poids 1, 1 et 2 du quart de cercle et les w_j sont les poids de γ . ■

Exercice 1 Déterminer le polyèdre de contrôle et les poids pour un quart de cylindre droit d'axe vertical, de hauteur h et de section circulaire de rayon 1 et pour un huitième de la sphère unité.

Exercice 2 Soit V un vecteur de \mathbf{R}^3 . Soit γ une courbe NURBS dans \mathbf{R}^3 . Déterminer le polyèdre de contrôle et les poids pour la surface balayée par la translation de γ le long de V .

Exercice 3 Soit Q un point de \mathbf{R}^3 . Soit γ une courbe NURBS dans \mathbf{R}^3 ne passant pas par Q . Déterminer le polyèdre de contrôle et les poids pour le cône de sommet Q sur γ , i.e. la réunion des segments reliant Q aux points de γ .

2.3 Surfaces de balayage

La terminologie de ce paragraphe et du suivant est empruntée à CATIA.

Une *surface de balayage* (**sweep surface**) dépend de la donnée de trois courbes

1. La *courbe guide* (**guide**) g , dans l'espace.
2. Le *profil* (**profile**) p , dans un plan.
3. L'*épine dorsale* (**spine**) s , dans l'espace.

Lorsque l'épine dorsale est une droite, l'idée est de translater le profil le long de la guide. La surface obtenue a pour bord deux translattées de la guide et deux translattées du profil. Plus généralement, on souhaite, tout en le translattant, faire tourner le plan où se trouve le profil. Dans le cas général, l'épine dorsale sert à spécifier un plan mobile via son plan normal. Plus précisément, soit $F(u)$ la rotation de l'espace qui amène le repère de la scène sur le repère de Frenet (ses colonnes sont les composantes des vecteurs τ , ν et b dans le repère fixe). Alors la surface de balayage est obtenue en appliquant la rotation $F(u)F(0)^{-1}$ au profil, puis en le translattant de $g(u)$. Noter le paramètre u commun à s et g : on dit que g et s sont *couplées*.

Définition 2.3 Etant données une courbe plane p et deux courbes gauches g et s couplées, i.e. paramétrées par le même paramètre, la surface de balayage correspondante est paramétrée par

$$X(u, v) = g(u) + F(u)F(0)^{-1}p(v).$$

où $F(u)$ est la matrice dont les colonnes sont les composantes des vecteurs τ , ν et b du repère de Frenet de s dans le repère fixe.

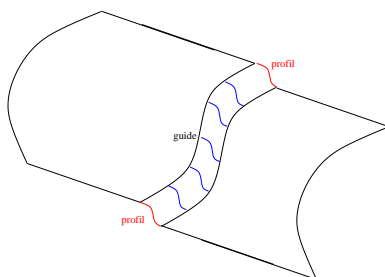


Figure 1: Loft servant à raccomoder une surface brisée

Exemple. Une surface de révolution peut être vue comme une surface de balayage. Le profil est la méridienne, dans un plan. La guide et l'épine dorsale sont des cercles dont l'axe est l'axe de révolution.

Exemple. Un tube est une surface de balayage pour laquelle le profil est un cercle, la guide et l'épine dorsale coïncident.

Exemple. On peut prescrire le bord de la surface, pourvu que deux arêtes opposées soient translatées l'une de l'autre. Par exemple, imaginons qu'on casse une surface en deux le long d'une courbe g et qu'on translate une moitié. On construit des raccords plans pour les courbes qui formaient le bord de la surface initiale. Alors une surface de balayage à spine rectiligne convient pour raccorder la surface brisée, voir figure 1.

Exemple. Les surfaces de balayage, et plus généralement les lofts, ont plus de degrés de liberté et permettent de traiter des situations plus générales.

Par exemple, pour une surface de balayage, on peut prescrire le bord, à condition qu'il soit formé de deux translatés de la guide et de deux images du profil par des déplacements. En effet, soient Π et Π' les plans contenant les deux copies du profil. Soit Π'' un plan perpendiculaire à Π et à Π' . Si la seconde copie est obtenue à partir de la première par une rotation d'axe parallèle à Π , toute courbe tracée dans Π'' et coupant orthogonalement Π et Π' peut servir d'épine dorsale.

Clairement, si g , p et $u \mapsto M(u)$ sont des NURBS, la surface de balayage est rationnelle, donc c'est une surface NURBS. On décrit deux exemples de surfaces de balayage pour lesquelles on peut préciser le réseau de contrôle.

Proposition 2.4 *Si s est une droite et si g et p sont des NURBS de degrés k et k' , la surface de balayage est une surface NURBS de bidegré (k, k') . Si P_i (resp. w_i) sont les points de contrôle (resp. les poids) de g et Q_j (resp. w'_j) les points de contrôle (resp. les poids) de p , alors le réseau de contrôle de la surface de balayage est $P_{i,j} = P_i + Q_j$ et ses poids sont $w_{i,j} = w_i w'_j$.*

Preuve. Lorsque l'épine dorsale est une droite, la surface de balayage est paramétrée par

$$\begin{aligned}
 X(u, v) &= g(u) + p(v) \\
 &= \frac{\sum_i B_{i,k}(u) w_i P_i}{\sum_i B_{i,k}(u) w_i} + \frac{\sum_j B_{j,k'}(v) w'_j Q_j}{\sum_j B_{j,k'}(v) w'_j} \\
 &= \frac{\sum_{i,j} B_{i,k}(u) B_{j,k'}(v) w_i w'_j (P_i + Q_j)}{\sum_{i,j} B_{i,k}(u) B_{j,k'}(v) w_i w'_j}. \blacksquare
 \end{aligned}$$

Remarque. Si l'épine dorsale s est une NURBS, les vecteurs τ , ν et b du repère de Frenet, qui ne dépendent pas linéairement de s , ne sont pas des NURBS en général. Il sera donc nécessaire de les remplacer par des B-splines obtenue par exemple par interpolation. C'est pourquoi l'énoncé suivant répond bien aux exigences de la pratique.

Proposition 2.5 Soit p une courbe NURBS plane de poids w'_j , de points de contrôle Q_j . Soit g une courbe B-spline gauche de points de contrôle P_i . Soit $u \mapsto M(u)$ une courbe B-spline dans l'espace des matrices 3×3 , de points de contrôle M_i . On suppose M couplée à g , avec même degré et même vecteur de noeuds. Alors la surface paramétrée par

$$X(u, v) = g(u) + M(u)p(v)$$

est une surface NURBS de poids $w_{i,j} = w'_j$ et de réseau de contrôle $P_{i,j} = P_i + M_i Q_j$.

Preuve. Par hypothèse,

$$M(u) = \sum_i B_{i,k}(u) M_i,$$

$$g(u) = \sum_i B_{i,k}(u) P_i$$

et

$$p(v) = \frac{\sum_j B_{j,k'}(v) w'_j Q_j}{\sum_j B_{j,k'}(v) w'_j}.$$

Il vient

$$X(u, v) = \frac{\sum_{i,j} B_{i,k}(u) B_{j,k'}(v) w'_j (P_i + M_i Q_j)}{\sum_j B_{j,k'}(v) w'_j}$$

qui est bien la surface NURBS de poids $w_{i,j} = w'_j$ et de réseau de contrôle $P_{i,j} = P_i + M_i Q_j$. ■

Remarque. Si g et M sont des NURBS de degré k , alors la surface de balayage est une surface NURBS de bidegré $(2k, k')$, dont le réseau de contrôle est donné par une formule moins simple.

2.4 Surfaces de remplissage

Une *surface de remplissage* (**loft**) est déterminée par

- une *courbe guide* (**guide**) g dans l'espace ;
- deux *profils* (**profiles**) p_0 et p_1 tracés dans un même plan ;
- une *épine dorsale* (**spine**) s dans l'espace.

Comme dans le cas de la surface de balayage, la guide sert à traduire le premier profil, l'épine dorsale sert à spécifier une famille de matrices $u \mapsto M(u)$. Pour compléter la description, il faut spécifier un procédé de déformation continu du premier profil au second. Choisissons une déformation affine

$$u \mapsto (1 - u)p_0(v) + up_1(v).$$

Définition 2.6 Etant données deux courbes gauches g et s et deux courbes p_0 et p_1 tracées dans un même plan, la surface de remplissage correspondante est paramétrée par

$$X(u, v) = g(u) + F(u)F(0)^{-1}((1 - u)p_0(v) + up_1(v))$$

où $F(u)$ est la matrice dont les colonnes sont les composantes dans le repère fixe des vecteurs $\tau(u)$, $\nu(u)$ et $b(u)$ du repère de Frenet de s .

Proposition 2.7 Soient p_1 et p_2 deux courbes B-splines couplées, ayant même degré et même vecteur de noeuds, tracées dans un même plan. Soit g une courbe B-spline dans l'espace. Soient $u \mapsto M_0(u)$ et $u \mapsto M_1(u)$ deux courbes B-spline dans l'espace des matrices 3×3 , couplées à g , de même degré et même vecteur de noeuds. Alors la surface paramétrée par

$$X(u, v) = g(u) + M_0(u)p_0(v) + M_1(u)p_1(v)$$

est la surface B-spline (resp. une surface NURBS) de réseau de contrôle $P_{i,j} = P_i + M_i^0 Q_j^0 + M_i^1 Q_j^1$.

Preuve. Par hypothèse,

$$M(u) = \sum_i B_{i,k}(u)M_i,$$

$$g(u) = \sum_i B_{i,k}(u)P_i$$

et

$$p_0(v) = \sum_j B_{j,k'}(v)Q_j^0, \quad p_1(v) = \sum_j B_{j,k'}(v)Q_j^1$$

Il vient

$$X(u, v) = \sum_{i,j} B_{i,k}(u)B_{j,k'}(v)w'_j(P_i + M_i^0Q_j^0 + M_i^1Q_j^1). \blacksquare$$

Remarque. A quelle condition une surface de balayage ou de remplissage est-elle régulière ? L'expérience semble prouver qu'il vaut mieux choisir la spine la plus simple possible. Lorsque c'est possible, une droite a des chances de donner le meilleur résultat.

References

- [F] G. FARIN, *Curves and surfaces for computer aided geometric design, a practical guide*. 2nd ed. Academic Press. Boston, Mass. (1990).
- [N] G. FARIN, *NURBS. From projective geometry to practical use*. 2nd ed. A. K. Peters, Wellesley, Mass. (1999).
- [HL] J. HOSCHEK, D. LASSER, *Grundlagen der geometrischen Datenverarbeitung*. Teubner, Stuttgart (1989). **English translation** : *Fundamentals of computer aided geometric design*. A. K. Peters, Wellesley, Mass. (1993).
- [R] J.-J. RISLER, *Méthodes mathématiques pour la CAO*. Masson, Paris (1991).