

Subdivision

Pierre Pansu

June 1, 2004

1 Introduction

1.1 Définition

Un *procédé de subdivision* (**subdivision scheme**) consiste en une règle qui, étant donnée une surface polyédrale P , produit une surface P' ayant davantage de sommets, et des facettes plus petites. Le procédé est dit *interpolant* (**interpolatory**) si les sommets de P sont encore des sommets de P' .

Exemple 1.1 *La subdivision barycentrique.*

La subdivision *barycentrique* d'une surface triangulée P s'obtient en ajoutant à la liste des sommets de P' les milieux des arêtes et les barycentres des facettes, en divisant chaque arête en deux et en ajoutant à la liste obtenue les segments joignant le barycentre de chaque facette aux sommets et aux milieux des arêtes de cette facette, et en divisant chaque facette en 6 facettes, chacune ayant pour sommet le barycentre, le milieu et une extrémité d'une arête. Il s'agit d'un procédé interpolant.

Ce procédé n'a pas de bonnes propriétés : les facettes deviennent de plus en plus aplaties.

Exemple 1.2 *Subdivision à 4 facettes.*

Une variante consiste à diviser chaque facette en 4 facettes délimitées par les segments reliant les milieux de deux de ses arêtes, voir figure 1.

Le résultat est meilleur, car la forme des facettes ne se détériore pas. Néanmoins, ces procédés ne modifient pas la géométrie de la surface, ils ne font qu'en modifier la description combinatoire. Il ne s'agit que de reparamétrisations d'une même surface.

1.2 Localité

Un procédé de subdivision comporte une prescription combinatoire (quelles facettes, quelles arêtes supprimer ou créer) et une prescription géométrique (comment calculer les coordonnées des sommets créés ou déplacés).

Dans de nombreux exemples de procédés de subdivisions, les deux prescriptions sont *locales*, i.e. reposent sur un *masque* qu'on déplace d'un sommet de P à un autre. Le masque, centré en

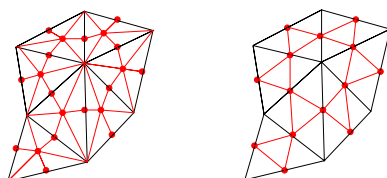


Figure 1: Subdivision barycentrique, variante à 4 facettes

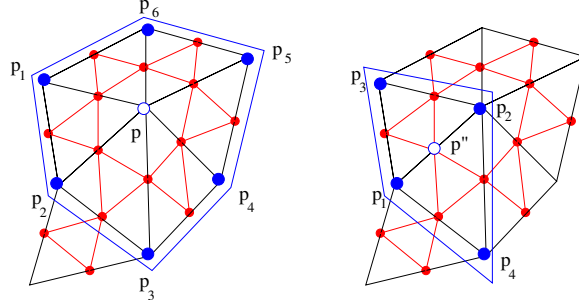


Figure 2: Loop : masques pour un point déplacé, pour un point créé

un sommet p , délimite une zone de P dont la combinatoire doit déterminer la combinatoire d'un voisinage de p dans P' , et sélectionne les sommets de P dont les coordonnées vont jouer un rôle dans le calcul des coordonnées des nouveaux sommets voisins de p . Dans un procédé *affine*, les nouveaux sommets sont des barycentres des anciens sommets sélectionnés par le masque affectés de poids donnés par le masque.

Exemple 1.3 *Subdivision d'une surface triangulée d'arité 6 limitée aux premiers voisins.*

On suppose que P a la combinatoire du plan pavé par des triangles équilatéraux. On définit le masque comme la boule unité combinatoire. Autrement dit, pour chaque sommet p de P , on ne s'intéresse qu'aux 6 sommets voisins de p , notés dans l'ordre circulaire p_1, \dots, p_6 .

Sur le plan combinatoire, on crée un nouveau sommet p_j'' sur chaque arête pp_j issue de p , une arête reliant p_j'' à p_{j+1}'' , et une facette de sommets p, p_j'' et p_{j+1}'' . Ne pas oublier la nouvelle facette au centre de chaque facette de P , commune à 3 positions du masque. Autrement dit, la prescription combinatoire est celle de l'exemple 1.2, illustrée figure 1.

La prescription géométrique fait intervenir 4 paramètres réels α, β, γ et δ . Le sommet p est déplacé en $p' = \alpha p + \beta(\sum_{j=1}^6 p_j)$, et le sommet créé p_j'' est placé en $p_j'' = \gamma(p + p_j) + \delta(p_{j-1} + p_{j+1})$.

Cette prescription est d'un intérêt limité, puisqu'elle suppose que tous les sommets de la surface initiale P ont même arité. Un procédé de subdivision doit comporter un ensemble de règles plus riche, s'appliquant à un nombre suffisant de combinatoires locales pour pouvoir traiter toutes les situations rencontrées en pratique. Par exemple, on doit donner une règle concernant les points d'où partent 4, 5, 7 ou 8 arêtes, ou même indépendante de l'arité, voir [CC].

Exemple 1.4 *L'algorithme Loop.*

La prescription combinatoire est la même que pour l'exemple 1.2.

On utilise un masque (et des paramètres) différents suivant qu'il s'agit de déplacer un sommet existant ou de placer un nouveau sommet.

Le masque pour les sommets anciens est à nouveau la boule unité combinatoire. Autrement dit, pour chaque sommet p de P , on ne s'intéresse qu'aux sommets voisins de p , notés p_1, \dots, p_6 , et on déplace p en $p' = (1 - a\beta)p + \beta \sum_j p_j$ où $\beta = \frac{1}{a}(\frac{5}{8} - \frac{1}{64}(3 + 2 \cos(2\pi/a)))$.

Le masque pour un sommet p'' créé sur une arête ancienne e consiste en les sommets des deux anciennes facettes qui partagent l'arête e : les sommets p_1 et p_2 de e et deux autres sommets p_3 et p_4 . On pose

$$p'' = \frac{3}{8}(p_1 + p_2) + \frac{1}{8}(p_3 + p_4).$$

Exemple 1.5 *L'algorithme Modified Butterfly.*

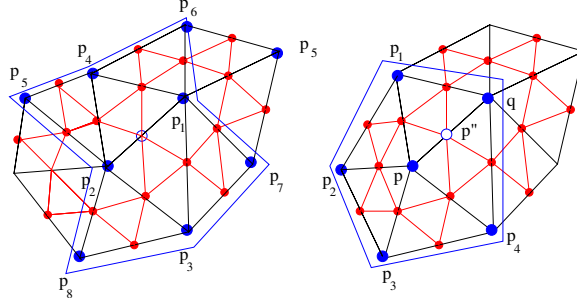


Figure 3: Modified Butterfly : masques pour un point créé sur une arête régulière, semi-régulière

La prescription combinatoire est la même que pour l'exemple 1.2.

Modified Butterfly est un procédé interpolant, i.e. les sommets existants ne sont pas déplacés. On utilise un masque (et des paramètres) différents suivant que l'arête e sur laquelle on crée un sommet p'' a ses deux extrémités d'arité 6 ou non.

Cas des arêtes régulières, i.e. dont les deux extrémités sont d'arité 6. Le masque contient les sommets anciens des anciennes facettes contenant e , ainsi que des facettes adjacentes à celles-là : les sommets p_1 et p_2 de e , les deux autres sommets p_3 et p_4 des facettes contenant e , et quatre autres sommets p_5 , p_6 , p_7 et p_8 . On pose

$$p'' = \frac{1}{2}(p_1 + p_2) + \frac{1}{8}(p_3 + p_4) - \frac{1}{16}(p_5 + p_6 + p_7 + p_8).$$

Cas des arêtes $e = pq$ semi-régulières, i.e. dont exactement une extrémité p est d'arité a différente de 6. Le masque est constitué des voisins de p , notés $p_0 = q, p_1, \dots, p_n$ dans l'ordre circulaire, où $n = a - 1$, et on pose $p'' = \frac{3}{4}q + \sum_{j=1}^n w_j p_j$ où, pour $j \geq 1$,

$$w_j = \frac{1}{n} \left(\frac{1}{4} + \cos(2\pi j/n) + \beta \cos(4\pi j/n) \right),$$

avec $\beta = \frac{1}{2}$ si $n > 4$, $\beta = \frac{1}{4}$ si $n = 4$ et $\beta = 0$ si $n = 3$.

Cas des arêtes $e = pq$ dont les deux extrémités sont d'arités différentes de 6. On calcule une position p''_1 par la règle semi-régulière relative à p , une autre p''_2 par la règle semi-régulière relative à q , et on prend le milieu $p'' = \frac{1}{2}(p''_1 + p''_2)$.

1.3 Subdivision et design

Un procédé de subdivision peut servir à construire automatiquement une surface complexe à partir d'une ébauche grossière.

On s'attend à ce que l'application répétée d'un procédé local produise une surface polyédrale approximativement *auto-similaire*, i.e., présentant le même aspect à plusieurs échelles différentes. On appelle cela un objet *fractal*.

Parmi les objets fractals, les surfaces lisses sont rares. Pourtant, un procédé de lissage automatique d'une surface polyédrale quelconque serait diablement commode. Spécifier un objet lisse de topologie non triviale par les moyens usuels de la CAO (construire morceau par morceau un BRep, en veillant à la différentiabilité des raccords) est fastidieux. En revanche, construire une ébauche non lisse à l'aide d'opérations booléennes est rapide, voir figure 4, en trianguler le bord (facetage) est une opération effectuée automatiquement par les bibliothèques graphiques. Si on pouvait automatiser aussi l'opération de lissage (remplacement d'une surface polyédrale par une autre dont les sommets sont proches d'une surface lisse), cela ouvrirait de nouvelles perspectives pour les utilisateurs de CAO par exemple.

Ceci motive la question suivante, posée par D. Doo et M. Sabin, [DS].

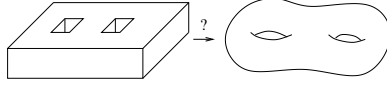


Figure 4: Ebauche d'une surface de genre 2

Problème 1 *Quels sont les procédés de subdivision qui font converger les surfaces polyédrales vers des surfaces de classe C^1 , de classe C^2 ?*

1.4 Plan du chapitre

Dans ces notes très succinctes, on apporte une réponse partielle à la version 1-dimensionnelle du problème 1, i.e., pour les procédés de subdivision locaux, interpolants et affines des courbes fermées polyédrales, i.e. des *polygones*. On suit [K]. En section 2, on énonce une condition suffisante, démontrée en appendice, pour qu'une suite de polygones converge vers une courbe de classe C^k . Ce théorème ramène l'étude de la régularité des courbes limites à une majoration de la norme de l'opérateur de raffinement. En section 3, on introduit la fonction de transfert $H(z)$ qui permet d'obtenir une expression simple de l'opérateur de raffinement, puis d'exprimer sa transformée de Fourier (discrète) en section 4. Cela conduit au théorème suivant.

Théorème 1 *Soit s un opérateur de raffinement de fonction de transfert H . Pour que pour tout polygone P à N sommets, les itérés $s^m(P)$ convergent vers une fonction de classe C^k , il suffit que*

$$\max_{|z|=1} \frac{1}{2} (|z+1|^{-k-1} |H(z)| + |z-1|^{-k-1} |H(-z)|) < 2^{-k}. \quad (1)$$

On applique le théorème à quelques exemples en section 5.

2 Subdivision de courbes

2.1 Polygones

On modélise un polygone à N sommets dans \mathbf{R}^n par une suite périodique de période N de points de \mathbf{R}^n . Comme la discussion sera entièrement invariante par application affine, il suffit de la mener pour $n = 1$. On code donc un polygone P à N sommets dans \mathbf{R} par une application de $\mathbf{Z}/N\mathbf{Z}$ dans \mathbf{R} , i.e. par un point $P = (p_0, \dots, p_{N-1})$ de \mathbf{R}^N , en adoptant la convention que les indices $j \in \mathbf{Z}/N\mathbf{Z}$ sont entendus modulo N . La permutation circulaire des sommets d'un polygone peut donc s'écrire

$$P = (p_j) \mapsto \tau(P) = (p_{j+1}).$$

Sur l'espace des polygones à N côtés, on utilise la norme $\ell^\infty : \|P\|_\infty = \max |p_j|$.

2.2 Subdivision : aspect combinatoire

Du point de vue combinatoire, la règle consiste toujours à couper les arêtes en deux, en ajoutant un sommet sur chaque arête. La subdivision d'un polygone à N sommets $P = (p_0, \dots, p_{N-1})$ produit donc un polygone à $2N$ sommets $P' = (p'_0, \dots, p'_{2N-1})$ où on pense à p'_{2j} comme étant obtenu par un petit déplacement de p_j , et p'_{2j+1} comme à un petit déplacement du milieu de l'arête $p_j p_{j+1}$.

2.3 Procédés interpolants affines

On s'intéresse ici aux procédés de subdivision locaux, affines et interpolants. Autrement dit, on se donne une suite de coefficients presque tous nuls α_ℓ , $\ell \in \mathbf{Z}$, telle que $\sum_\ell \alpha_\ell = 1$. La règle de

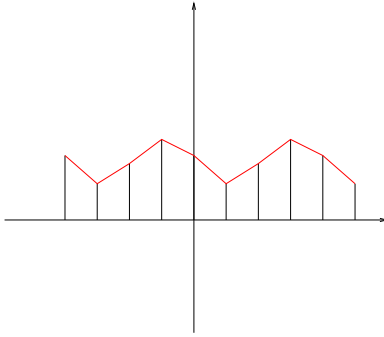


Figure 5: Fonction affine par morceaux associée à un polygone

subdivision $P \mapsto s(P) = P'$ s'écrit, pour chaque j ,

$$p'_{2j} = p_j, \quad p'_{2j+1+\ell} = \sum_{\ell \in \mathbf{Z}} \alpha_\ell p_{j+\ell} = 0.$$

On appelle parfois s l'opérateur de raffinement.

Exemple 2.1 Les schémas de Lagrange ([DD]).

Etant donné un entier positif u , on considère l'ensemble S des entiers compris entre $-u + 1$ et u . Pour $\ell \in S$, soit L_ℓ le polynôme d'interpolation de Lagrange pour les points de S , i.e. L est de degré $2u - 1$, $L_\ell(v) = 1$ et L_ℓ s'annule aux autres points de S .

La prescription consiste à placer entre p_j et p_{j+1} le point

$$p'_{2j+1} = \sum_{v \in S} L_\ell\left(\frac{1}{2}\right) p_{j+\ell}.$$

Autrement dit, $p'_{2j+1} = f\left(j + \frac{1}{2}\right)$ où f est le polynôme de degré $\leq 2u - 1$ tel que $f(j + v) = p_{j+v}$ pour tout $v \in S$. En particulier, si les p_j sont tous égaux, $p'_{2j+1} = p_j$, ce qui montre que la somme des coefficients $L_\ell\left(\frac{1}{2}\right)$ vaut 1.

Voici quelques valeurs des coefficients, pour $u = 1$, $u = 2$ et $u = 3$.

ℓ	0	1
$L_\ell\left(\frac{1}{2}\right)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

ℓ	-1	0	1	2
$L_\ell\left(\frac{1}{2}\right)$	$-\frac{1}{16}$	$\frac{9}{16}$	$\frac{9}{16}$	$-\frac{1}{16}$

ℓ	-2	-1	0	1	2	3
$L_\ell\left(\frac{1}{2}\right)$	$\frac{3}{256}$	$-\frac{25}{256}$	$\frac{150}{256}$	$\frac{150}{256}$	$-\frac{25}{256}$	$\frac{3}{256}$

2.4 Critère de convergence vers une courbe différentiable

Définition 2.2 Soit P un polygone à N sommets dans \mathbf{R} . On note f_P la fonction continue sur \mathbf{R}/\mathbf{Z} qui est affine sur chaque intervalle $\left[\frac{j}{N}, \frac{j+1}{N}\right]$ de la subdivision uniforme de \mathbf{R}/\mathbf{Z} et interpole P , voir figure 5. Remarquer que $\|f_P\|_\infty = \|P\|_\infty$.

Soit P_m une suite de polygones. On dit que la suite (P_m) converge vers une fonction $f : \mathbf{R}/\mathbf{Z} \rightarrow \mathbf{R}$ si les fonctions f_{P_m} convergent uniformément sur \mathbf{R}/\mathbf{Z} vers f .

Définition 2.3 Soit P un polygone à N sommets. On dira qu'un polygone Q subdivise P si Q a $2N$ sommets et $q_{2j} = p_j$.

La condition suffisante de convergence qu'on va énoncer s'applique à n'importe quelle suite de polygones telle que chacun est une subdivision du précédent. La règle précise de subdivision n'a pas d'importance et peut changer à chaque étape. Le critère porte sur la taille des "dérivées" des polygones. Ce qui remplace la dérivée, pour un polygone, c'est le polygone des différences.

Notation 2.4 On note $Q = \Delta P$ le polygone définie par $q_j = p_{j+1} - p_j$. Autrement dit, $\Delta P = \tau(P) - P$.

Théorème 2 (L. Kobbelt, [K]). Soit P_m une suite de polygones telle que chacun subdivise le précédent. S'il existe des entiers k et $\ell \geq 1$ tels que

$$\sum_{m=0}^{+\infty} \| 2^{km} \Delta^{k+\ell} P_m \|_{\infty} < +\infty,$$

alors la suite P_m converge vers une fonction de classe C^k .

Dans cet énoncé, ce qui détermine le degré de dérivabilité de la limite, c'est l'exposant dans le facteur 2^{km} . Le nombre de différences $k+\ell$ a moins d'importance, tant que $\ell \geq 1$. Le cas limite est $\ell = 1$. Si l'hypothèse du théorème est satisfaite avec $\ell = 0$, les P_m convergent vers une application constante.

On trouvera la preuve de ce théorème en section 6

3 Fonction de transfert

Désormais, on étudie un procédé de subdivision local, affine et interpolant. On rappelle que la règle de subdivision $P \mapsto s(P) = P'$ s'écrit, pour chaque j ,

$$p'_{2j} = p_j, \quad p'_{2j+1+\ell} = \sum_{\ell \in \mathbf{Z}} \alpha_{\ell} p_{j+\ell}.$$

On commence par transformer ce système d'équations en une seule équation entre fonctions génératrices.

3.1 Fonction génératrice

Définition 3.1 Soit P un polygone à N sommets. On appelle fonction génératrice de P le polynôme

$$g_P(z) = \sum_{j=0}^{N-1} p_j z^j.$$

3.2 Fonction de transfert

Définition 3.2 On définit la fonction de transfert H du procédé de subdivision par

$$H(z) = 1 + \sum_{\ell \in \mathbf{Z}} \alpha_{\ell} z^{1-2\ell}.$$

Exemple 3.3 Soit H_u la fonction de transfert du schéma de Lagrange sur $2u$ points. Alors

$$H_1(z) = 1 + \frac{1}{2}z + \frac{1}{2}z^{-1} = \frac{1}{2}z^{-1}(z+1)^2.$$

$$H_2(z) = 1 - \frac{1}{16}z^3 + \frac{9}{16}z + \frac{9}{16}z^{-1} - \frac{1}{16}z^{-3} = \frac{1}{16}z^{-3}(z+1)^4(-z^2 + 4z - 1).$$

$$\begin{aligned} H_3(z) &= 1 + \frac{3}{256}z^5 - \frac{25}{256}z^3 + \frac{150}{256}z + \frac{150}{256}z^{-1} - \frac{25}{256}z^{-3} + \frac{3}{256}z^{-5} \\ &= \frac{1}{256}z^{-5}(z+1)^6(3z^4 - 18z^3 + 38z^2 - 18z + 3). \end{aligned}$$

Proposition 3.4 *Soit P un polygone à N sommets, soit $s(P)$ le polygone obtenu par subdivision. Alors*

$$g_{s(P)}(z) = H(z)g_P(z^2) \text{ mod } z^{2N} - 1.$$

Preuve. On étend $(p_j)_{j=0,\dots,N-1}$ en une suite périodique $(p_j)_{j \in \mathbf{N}}$. On définit la série formelle

$$\tilde{g}_P(z) = \sum_{j \in \mathbf{Z}} p_j z^j = \frac{1}{1 - z^N} g_P(z).$$

Notant $P' = s(P)$, on calcule la série formelle

$$\begin{aligned} \tilde{g}_{s(P)}(z) &= \sum_{j=0}^{\infty} p'_{2j} z^{2j} + \sum_{j=0}^{\infty} p'_{2j+1} z^{2j+1} \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} p_j z^{2j} + \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{\ell} \alpha_{\ell} p_{j+\ell} z^{2j+1} \\ &= \tilde{g}_P(z^2) + \sum_{\ell} \alpha_{\ell} z^{1-2\ell} \left(\sum_{j=0}^{\infty} p_{j+\ell} z^{2(j+\ell)} \right) \\ &= \tilde{g}_P(z^2) + \sum_{\ell} \alpha_{\ell} z^{1-2\ell} \left(\sum_{j'=\ell}^{\infty} p_{j'} z^{2j'} \right) \\ &= \tilde{g}_P(z^2) + \sum_{\ell} \alpha_{\ell} z^{1-2\ell} \left(\sum_{j'=0}^{\infty} p_{j'} z^{2j'} \right) - \sum_{\ell} \alpha_{\ell} z^{1-2\ell} \left(\sum_{j'=0}^{\ell-1} p_{j'} z^{2j'} \right) \\ &= \tilde{g}_P(z^2) \left(1 + \sum_{\ell} \alpha_{\ell} z^{1-2\ell} \right) - K(z), \end{aligned}$$

où K est un polynôme. Autrement dit, la série formelle prépériodique de période $2N$ $\tilde{g}_{s(P)}(z) - \tilde{g}_P(z^2)H(z)$ n'a qu'un nombre fini de termes non nuls. Cela signifie que la somme des termes correspondant à une période est nulle. Or cette somme, modulo $z^{2N} - 1$, coïncide avec $g_{s(P)}(z) - H(z)g_P(z^2)$. ■

4 Analyse de Fourier

Ce qui nous intéresse, c'est la norme de l'opérateur $\Delta^{\ell} \circ s^m : \mathbf{R}^N \rightarrow \mathbf{R}^{2^m N}$. Pour l'évaluer, il est commode de se placer dans des bases dans lesquelles les opérateurs s et Δ sont diagonaux. Ces bases sont fournies par la transformation de Fourier discrète. En effet, de même que décomposer une fonction périodique en série de Fourier, c'est calculer ses composantes dans la base des exponentielles $x \mapsto \exp(2\pi i n x)$, qui sont les vecteurs propres de l'opérateur de dérivation $f \mapsto f'$, décomposer un polygone en série de Fourier discrète, c'est le décomposer dans la base des vecteurs propres de l'opérateur de différence τ .

4.1 Transformation de Fourier discrète

Sur \mathbf{R}^N , l'opérateur τ satisfait $\tau^N = 1$. Il est donc diagonalisable sur \mathbf{C} , et ses valeurs propres sont les racines N -èmes de l'unité. On se place dans \mathbf{C}^N . On note $\zeta_N = \exp(\frac{2\pi i}{N})$. Pour $r = 0, \dots, N-1$, on définit un vecteur $E^r \in \mathbf{C}^N$ par

$$E_j^r = \zeta_N^{rj}.$$

Alors les E^r forment une base de vecteurs propres pour τ , $\tau(E^r) = \zeta_N^r E^r$. Noter que E^0 est réel, et que E^{N-r} est le conjugué de E^r .

Pour le produit hermitien ℓ^2

$$\langle P, Q \rangle = \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} p_j \bar{q}_j,$$

la base (E^r) est unitaire. Par conséquent, les composantes d'un polygone (complexe) P dans cette base se calculent au moyen du produit hermitien,

$$P = \sum_{r=0}^{N-1} x_r E^r \Leftrightarrow x_r = \langle P, E^r \rangle = \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} p_j \zeta_N^{-rj}. \quad (2)$$

On peut interpréter les composantes x_r comme des coefficients de Fourier et les noter $x_r = \hat{P}_r$. Un polygone est réel si et seulement si ses coefficients de Fourier satisfont $\hat{P}_0 \in \mathbf{R}$ et $\overline{\hat{P}_r} = \hat{P}_{N-r}$ pour $r \neq 0$.

On peut aussi interpréter les coefficients de Fourier \hat{P}_r comme les composantes d'un vecteur \hat{P} .

Définition 4.1 Soit P un polygone à N côtés. Sa transformée de Fourier est le vecteur $\hat{P} \in \mathbf{C}^N$ dont les composantes sont

$$\hat{P}_r = \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} p_j \zeta_N^{-rj}.$$

4.2 Expression de l'opérateur de raffinement s en Fourier

Lemme 4.2 Soit P un polygone à N sommets, \hat{P} sa transformée de Fourier. Alors, pour $r = 0, \dots, N-1$,

$$\widehat{\Delta^k P}_r = (\zeta_N^r - 1)^k \hat{P}_r,$$

et pour $r = 0, \dots, 2N-1$,

$$\widehat{s(P)}_r = \frac{1}{2} H(\zeta_{2N}^r) \hat{P}_r.$$

Preuve. La permutation circulaire τ multiplie E^r par ζ_N^r , donc $\Delta^k = (\tau - id)^k$ multiplie E^r par $(\zeta_N^r - 1)^k$.

D'après la définition 4.1,

$$\begin{aligned} \widehat{s(P)}_r &= \frac{1}{2N} \sum_{j=0}^{2N-1} p'_j \zeta_{2N}^{-rj} \\ &= \frac{1}{2N} g_{s(P)}(\zeta_{2N}^{-r}) \\ &= \frac{1}{2N} H(\zeta_{2N}^{-r}) g_P(\zeta_{2N}^{-2r}) \\ &= \frac{1}{2N} H(\zeta_{2N}^{-r}) g_P(\zeta_N^{-r}) \\ &= \frac{1}{2} H(\zeta_{2N}^{-r}) \hat{P}_r, \end{aligned}$$

où on a utilisé la proposition 3.4 et le fait que $\zeta_{2N}^2 = \zeta_N$. ■

Corollaire 4.3 Soit P un polygone à N côtés. On suppose que $\hat{P}_0 = 0$. Alors pour $r = 0, \dots, 2N-1$,

$$(\Delta^k \circ \widehat{s \circ \Delta^{-k} P})_r = \frac{1}{2} (\zeta_{2N}^r + 1)^{-k} H(\zeta_{2N}^{-r}) \hat{P}_r.$$

Preuve. L'opérateur Δ est une bijection sur le sous-espace des polygones P tels que $\hat{P}_0 = 0$. L'expression $\Delta^{-k} P$ a donc un sens. ■

4.3 Normes

L'objectif est de majorer des normes ℓ^∞ de polygones. Il suffira de majorer les normes ℓ^1 de leur transformée de Fourier.

Lemme 4.4 *Soit P un polygone à N sommets, \hat{P} sa transformée de Fourier. Alors*

$$\|P\|_\infty \leq \|\hat{P}\|_1 = \sum_{r=0}^{N-1} |\hat{P}_r|.$$

Preuve. D'après la définition 4.1,

$$P = \sum_r \hat{P}_r E^r,$$

donc

$$p_j = \sum_r \hat{P}_r \zeta_N^{rj},$$

d'où

$$|p_j| \leq \sum_r |\hat{P}_r|. \blacksquare$$

4.4 Preuve du théorème 1

La proposition suivante est un peu plus générale que le théorème 1.

Proposition 4.5 *Soit s un opérateur de raffinement de fonction de transfert H . Pour que pour tout polygone P à N sommets, les itérés $s^m(P)$ convergent vers une fonction de classe C^k , il suffit qu'il existe un entier $\ell \geq 1$ tel que*

$$\max_{|z|=1} \frac{1}{2} (|z+1|^{-k-\ell} |H(z)| + |z-1|^{-k-\ell} |H(-z)|) < 2^{-k}. \quad (3)$$

D'après le théorème 2 et le lemme 4.4, il suffit de majorer la norme ℓ^1 de la transformée de Fourier de $2^{km} \Delta^{k+\ell} \circ s^m(P)$. Notons $F_N \subset \mathbf{C}^N$ le sous-espace des polygones Q tels que $\hat{Q}_0 = 0$. Les opérateurs Δ et $s : \mathbf{C}^N \rightarrow \mathbf{C}^{2N}$ envoient F_N dans F_N (resp. F_{2N}). Le corollaire 4.3 donne l'expression en Fourier de $\Delta^{k+\ell} \circ s \circ \Delta^{-k-\ell}$: pour $Q \in F_N$,

$$(\Delta^{k+\ell} \circ \widehat{s \circ \Delta^{-k-\ell}} Q) = \sum_{r=0}^{2N-1} \lambda_r \hat{Q}_r E^r,$$

où

$$\lambda_r = \frac{1}{2} (\zeta_{2N}^r + 1)^{-k-\ell} H(\zeta_{2N}^{-r}),$$

d'où

$$\begin{aligned} \|(\Delta^{k+\ell} \circ \widehat{s \circ \Delta^{-k-\ell}} Q)\|_1 &= \sum_{r=1}^{2N-1} |\lambda_r| |\hat{Q}_r| \\ &= \sum_{r=1}^{N-1} (|\lambda_r| + |\lambda_{r+N}|) |\hat{Q}_r| \end{aligned}$$

En posant $z = \zeta_{2N}^{-r}$,

$$\begin{aligned} |\lambda_r| + |\lambda_{r+N}| &= \frac{1}{2}(|z^{-1} + 1|^{-k-\ell}|H(z)| + |-z^{-1} + 1|^{-k-\ell}|H(-z)|) \\ &= \frac{1}{2}(|z + 1|^{-k-\ell}|H(z)| + |z - 1|^{-k-\ell}|H(-z)|) \\ &\leq q, \end{aligned}$$

pour un $q < 2^{-k}$, par hypothèse. Il vient

$$\begin{aligned} \|(\Delta^{k+1} \circ \widehat{s \circ \Delta^{-k-1}} Q)\|_1 &\leq q \sum_{r=1}^{N-1} |\hat{Q}_r| \\ &= q \|\hat{Q}\|_1. \end{aligned}$$

Comme $\Delta^{k+\ell} P \in F_N$,

$$\begin{aligned} 2^{mk} \|\Delta^{k+\ell} \circ s^m(P)\|_\infty &\leq 2^{mk} \|(\Delta^{k+\ell} \widehat{s^m(P)})\|_1 \\ &= 2^{mk} \|(\Delta^{k+\ell} \circ s \circ \widehat{\Delta^{-k-\ell}})^m(\Delta^{k+\ell} P)\|_1 \\ &\leq (2^k q)^m \|(\widehat{\Delta^{k+\ell} P})\|_1, \end{aligned}$$

qui est le terme général d'une série convergente. Le théorème 2 s'applique, et les polygones $s^m P$ convergent vers une fonction de classe C^k . ■

Remarque 4.6 *La méthode se généralise immédiatement aux règles de subdivision implicites, où la prescription est que les p'_{2j+1} , au lieu de s'exprimer explicitement en fonction des p_i , sont les solutions d'un système linéaire dans lequel les p_i figurent au second membre.*

En effet, un opérateur de raffinement défini de cette façon possède une fonction de transfert rationnelle, voir [K].

Remarque 4.7 *Pour que l'hypothèse (3) de la proposition 4.5 soit satisfaite, il faut que la fonction de transfert H s'annule à l'ordre au moins $k+\ell$ en -1 (ce qui se traduit par des équations linéaires satisfaites par les α_ℓ), et qu'en plus elle soit petite sur tout le cercle unité (ce qui se traduit par des inégalités).*

Remarque 4.8 *La fonction de transfert H s'annule toujours à l'ordre au moins 1 en -1 , car $H(-1) = 1 - \sum \alpha_\ell$. Si le procédé d'interpolation est symétrique, ie si $\alpha_{1-\ell} = \alpha_\ell$, alors $H(z^{-1}) = H(z)$, si bien que l'ordre d'annulation de H en -1 est toujours pair.*

5 Exemples

5.1 Schémas de Lagrange

Lemme 5.1 *Soit H_u la fonction de transfert du schéma de Lagrange sur $2u$ points. Alors le polynôme $z^{2u-1}H_u$ est divisible par $(z+1)^{2u}$.*

Preuve. On a $H_u(-1) = 1 - \sum_\ell L_\ell(\frac{1}{2}) = 0$. Pour $k \geq 1$, la dérivée k -ème de H_u s'écrit

$$H_u^{(k)}(z) = \sum_{\ell \in S} L_\ell\left(\frac{1}{2}\right) (1-2\ell)(-2\ell)(-2\ell-1) \cdots (-2\ell+2-k) z^{-2\ell+1-k},$$

d'où

$$H_u^{(k)}(-1) = (-1)^{1-k} \sum_{\ell \in S} L_\ell\left(\frac{1}{2}\right) f(\ell),$$

où $f(x) = (1 - 2x)(-2x)(-2x - 1) \cdots (-2x + 2 - k)$ est un polynôme de degré k . Si $k \leq 2u - 1$, f est le polynôme d'interpolation de Lagrange pour ses propres valeurs aux points de S , donc $H_u^{(k)}(-1) = (-1)^{1-k} f(\frac{1}{2}) = 0$. Par conséquent, la fonction H_u s'annule à l'ordre $2u$ en -1 . ■

Proposition 5.2 *Le schéma de Lagrange à $2u = 4$ points (resp. à $2u = 6$ points) converge vers des courbes de classe C^1 (resp. de classe C^2).*

Preuve. Posons $z = e^{ix}$. Alors $|z+1|^{-4}|H_2(z)| = \frac{1}{16}|2 \cos x - 4| = \frac{1}{8}(2 - \cos x)$, $|z-1|^{-4}|H_2(-z)| = \frac{1}{16}|2 \cos x + 4| = \frac{1}{8}(2 + \cos x)$, d'où

$$\frac{1}{2}(|z+1|^{-4}|H_2(z)| + |z-1|^{-4}|H_2(-z)|) = \frac{1}{4} < 2^{-1}.$$

On applique la proposition 4.5 avec $k = 1$ et $\ell = 3$, et on conclut que pour tout polygone, le procédé converge vers une courbe de classe C^1 .

De même, $|z+1|^{-6}|H_3(z)| = \frac{1}{256}|12 \cos^2 x - 36 \cos x + 32|$, $|z-1|^{-6}|H_3(-z)| = \frac{1}{256}|12 \cos^2 x + 36 \cos x + 32|$, et ces deux fonctions sont positives. Par conséquent

$$\frac{1}{2}(|z+1|^{-6}|H_3(z)| + |z-1|^{-6}|H_3(-z)|) = \frac{1}{256}(12 \cos^2 x + 32),$$

qui est toujours inférieur ou égal à $11/64 < 1/4$. On applique la proposition 4.5 avec $k = 2$ et $\ell = 4$, et on conclut que pour tout polygone, le procédé converge vers une courbe de classe C^2 . ■

Remarque 5.3 *La majoration des H_u , $u > 3$, est plus délicate.*

Pour $u = 4$, une variante du théorème 1 (obtenue en majorant plus finement la norme de $\Delta^k \circ s^2 \circ \Delta^{-k}$), donne que les courbes limites du schéma de Lagrange à 8 points sont de classe C^3 , voir [K]. En revanche, il est clair que le schéma de Lagrange à 2 points ($u = 1$) ne régularise pas : c'est la subdivision barycentrique, en dimension 1.

5.2 Familles à un paramètre de schémas de subdivision

Le schéma symétrique s le plus général à $2u$ points (i.e. tel que la position de p'_{2j+1} dépende de celles de $2u$ points p_j consécutifs) dépend de $u - 1$ paramètres, car les coefficients α_ℓ , qui satisfont $\alpha_{1-\ell} = \alpha_\ell$, sont contraints seulement par la relation

$$\sum_{\ell=u+1}^u \alpha_\ell = 2 \sum_{\ell=1}^u \alpha_\ell = 1.$$

Demander que la fonction de transfert H de s s'annule à l'ordre $2u$ en $z = -1$ conduit à un système linéaire qui possède comme solution unique le schéma de Lagrange à $2u$ points.

Considérons les schémas symétriques s à $2u$ points dont la fonction de transfert s'annule à l'ordre $2u - 2$ en -1 . De nouveau, cela conduit à un système linéaire. Il possède une famille à un paramètre de solutions $s_{u,\alpha}$, $\alpha \in \mathbf{R}$, qui contient évidemment les systèmes de Lagrange à $2u$ et $2u - 2$ points.

Pour $u = 2$, le système $s_{2,\alpha}$ peut s'écrire

$$p'_{2j+1} = \alpha(p_j + p_{j+1}) + \left(\frac{1}{2} - \alpha\right)(p_{j-1} + p_{j+2}).$$

$s_{2,0}$ est le schéma de Lagrange à 2 points. Le schéma de Lagrange à 4 points est obtenu pour $\alpha = 9/16$.

Sa fonction de transfert vaut

$$H_\alpha(z) = 1 + \left(\frac{1}{2} - \alpha\right)z^{-3} + \alpha z^{-1} + \alpha z + \left(\frac{1}{2} - \alpha\right)z^3 = z^{-3}(z+1)^2(\alpha z^2 + \left(\frac{1}{2} - \alpha\right)(z^2 - z + 1)^2).$$

On calcule

$$|i+1|^{-2}|H(i)| = |-i+1|^{-2}|H(-i)| = \frac{1}{2},$$

donc

$$\max_{|z|=1} \frac{1}{2} (|z+1|^{-2}|H(z)| + |z-1|^{-2}|H(-z)|) = \frac{1}{2},$$

si bien que le théorème 1 ne s'applique pas avec $k=1$. Dommage, car il est possible que ce schéma converge vers des courbes de classe C^1 pour tout α suffisamment proche de $9/16$.

Pour $u=3$, le système $s_{3,\alpha}$ peut s'écrire

$$p'_{2j+1} = \alpha(p_j + p_{j+1}) + \left(-\frac{1}{16} - 3\alpha\right)(p_{j-1} + p_{j+2}) + \left(\frac{9}{16} + 2\alpha\right)(p_{j-2} + p_{j+3}).$$

$s_{3,0}$ est le schéma de Lagrange à 4 points. Le schéma de Lagrange à 6 points est obtenu pour $\alpha = 3/256$.

Sa fonction de transfert vaut

$$H(z) = z^{-2}(z+1)^4(\alpha z^3 - 4\alpha z^2 + \left(-\frac{1}{16} + 7\alpha\right)z + \frac{1}{4} - 8\alpha + \left(-\frac{1}{16} + 7\alpha\right)z^{-1} - 4\alpha z^{-2} + \alpha z^{-3}).$$

Proposition 5.4 *Pour tout $\alpha \in]0, 3/128[$, le schéma $s_{3,\alpha}$ converge vers des courbes de classe C^2 . Pour tout $\alpha \in]-3/128, 5/128[$, $s_{3,\alpha}$ converge vers des courbes de classe C^1 .*

Preuve. Posant $z = e^{ix}$, on trouve que $z^2(z+1)^{-4}H(z) = f(\cos x)$ où f est le polynôme

$$f(t) = 8\alpha t^3 - 16\alpha t^2 + \left(-\frac{1}{8} + 8\alpha\right)t + \frac{1}{4}.$$

On doit majorer le maximum sur l'intervalle $[-1, 1]$ de la fonction $t \mapsto \frac{1}{2}(|f(t)| + |f(-t)|)$.

En un point t où $f(t)$ et $f(-t)$ sont de même signe,

$$\frac{1}{2}(|f(t)| + |f(-t)|) = \frac{1}{2}|f(t) + f(-t)| = |-16\alpha t^2 + \frac{1}{4}| \leq \max\left\{\frac{1}{4}, |-16\alpha + \frac{1}{4}|\right\},$$

qui est $< 1/4$ pourvu que $0 < \alpha < 1/32$. Ce nombre est $< 1/2$ pourvu que $-1/64 < \alpha < 3/64$.

En un point t où $f(t)$ et $f(-t)$ sont de signes opposés,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}(|f(t)| + |f(-t)|) &= \frac{1}{2}|f(t) - f(-t)| = |8\alpha t^3 + \left(-\frac{1}{8} + 8\alpha\right)t| \\ &\leq |8\alpha t^2 - \frac{1}{8} + 8\alpha| \\ &\leq \max\left\{|8\alpha - \frac{1}{8}|, |16\alpha - \frac{1}{8}|\right\}, \end{aligned}$$

car $|8\alpha t^2 - \frac{1}{8} + 8\alpha|$ atteint son maximum sur $[-1, 1]$ en 0 ou en 1. Ce nombre est $< 1/4$ pourvu que $-1/128 < \alpha < 3/128$. Il est $< 1/2$ pourvu que $-3/128 < \alpha < 5/128$.

On conclut que si $0 < \alpha < 3/128$,

$$\max_{|z|=1} \frac{1}{2} (|z+1|^{-4}|H(z)| + |z-1|^{-4}|H(-z)|) < \frac{1}{4}.$$

La proposition 4.5 s'applique avec $k = \ell = 2$, donc le schéma converge vers des courbes de classe C^2 . Si $-3/128 < \alpha < 5/128$,

$$\max_{|z|=1} \frac{1}{2} (|z+1|^{-4}|H(z)| + |z-1|^{-4}|H(-z)|) < \frac{1}{2}.$$

La proposition 4.5 s'applique avec $k=1, \ell=3$, donc le schéma converge vers des courbes de classe C^1 . ■

6 Appendice : preuve du critère de convergence

On montre d'abord que, étant donnée une suite de polygones dont le nombre de côtés tend vers l'infini, si la suite des différences renormalisées converge, alors les polygones eux-mêmes convergent vers une fonction de classe C^1 . On dit qu'une fonction $f : \mathbf{R}/\mathbf{Z} \rightarrow \mathbf{R}$ interpole un polygone P à N sommets si pour tout $j = 0, \dots, N-1$, $f(\frac{j}{N}) = p_j$.

Lemme 6.1 *Soit P_N un polygone à N sommets. Si les P_N sont interpolées par une même fonction f de classe C^1 , alors la suite $N\Delta P_N$ converge vers f' . Réciproquement, si la suite $N\Delta P_N$ converge vers une fonction continue g , et si p_0^N converge, alors P_N converge vers une fonction périodique f de classe C^1 telle que $g = f'$.*

Preuve. Supposons P_N interpolée par une fonction f de classe C^1 sur \mathbf{R}/\mathbf{Z} . Notons $P = P_N$, $Q = \Delta P_N$. Pour tout $j = 0, \dots, N-1$, il existe $\xi_j \in [\frac{j}{N}, \frac{j+1}{N}]$ tel que

$$p_{j+1} - p_j = f\left(\frac{j+1}{N}\right) - f\left(\frac{j}{N}\right) = \frac{1}{N}f'(\xi_j).$$

Soit $x = (1-t)\frac{j}{N} + t\frac{j+1}{N} \in [\frac{j}{N}, \frac{j+1}{N}]$. Alors

$$\begin{aligned} f_{NQ}(x) &= (1-t)f_{NQ}\left(\frac{j}{N}\right) + tf_{NQ}\left(\frac{j+1}{N}\right) \\ &= (1-t)N(p_{j+1} - p_j) + tN(p_{j+2} - p_{j+1}) \\ &= (1-t)f'(\xi_j) + tf'(\xi_{j+1}), \end{aligned}$$

d'où

$$f_{NQ}(x) - f'(x) = f'(\xi_j) - f'(x) + t(f'(\xi_{j+1}) - f'(\xi_j))$$

qui est uniformément petit si N est grand, car f' est uniformément continue.

Inversement, supposons que $N\Delta P_N$ converge vers une fonction continue g , et que p_0^N converge vers ℓ . Avec les mêmes notations, l'intégrale de f_{NQ} sur l'intervalle $[\frac{j}{N}, \frac{j+1}{N}]$ vaut

$$\int_{\frac{j}{N}}^{\frac{j+1}{N}} f_{NQ}(x) dx = \frac{1}{2}(q_{j+1} + q_j),$$

d'où

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{k}{N}} f_{NQ}(x) dx &= \frac{1}{2}(q_k + q_0) + q_{k-1} + \dots + q_1 \\ &= \frac{1}{2}(p_{k+1} + p_k - p_1 - p_0) \\ &= f_P\left(\frac{2k+1}{2N}\right) - f_P\left(\frac{1}{2N}\right). \end{aligned}$$

Posons, pour $x \in \mathbf{R}$, $f(x) = \ell + \int_0^x g(t) dt$. Comme $\|NQ\|_\infty = \|f_{NQ}\|_\infty$ est borné par un nombre L , la fonction f_P est lipschitzienne avec une constante de Lipschitz L indépendante de N . Par conséquent

$$\left|f_P\left(\frac{2k+1}{2N}\right) - f_P\left(\frac{k}{N}\right)\right| \leq \frac{L}{N}, \quad \left|f_P\left(\frac{1}{2N}\right) - f_P(0)\right| \leq \frac{L}{N},$$

d'où

$$\left|f_P\left(\frac{k}{N}\right) - f\left(\frac{k}{N}\right)\right| \leq \frac{2L}{N} + \int_0^{\frac{k}{N}} |f_{NQ}(x) - g(x)| dx + |p_0^N - \ell|$$

tend vers 0 lorsque N tend vers $+\infty$ uniformément en k . On conclut que f_P converge uniformément vers f , et que f est périodique. ■

Remarque 6.2 En appliquant k fois le lemme 6.1, on montre que si P_N est une suite de polygones à N sommets, telle que $N^k \Delta^k P_N$ converge vers une fonction continue, alors la suite P_N converge vers une fonction de classe C^k , à une constante additive près.

Lemme 6.3 Soit P un polygone, soit Q un polygone qui subdivise P . Alors

$$\|f_P - f_Q\|_\infty \leq \|\Delta Q\|_\infty.$$

Plus généralement,

$$\|f_{\Delta^k P} - 2^k f_{\Delta^k Q}\|_\infty \leq 4^{k+1} \|\Delta^{k+1} Q\|_\infty.$$

Preuve. La fonction $|f_P - f_Q|$ est affine sur chaque intervalle $[\frac{\ell}{2N}, \frac{\ell+1}{2N}]$, elle s'annule aux points de la forme $\frac{2j}{2N}$, donc elle atteint son maximum en un point de la forme $\frac{2j+1}{2N}$. En un tel point, elle vaut

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{2}(p_j + p_{j+1}) - q_{2j+1} \right| &= \left| \frac{1}{2}(q_{2j} - q_{2j+1}) + \frac{1}{2}(q_{2j+2} - q_{2j+1}) \right| \\ &= \frac{1}{2} |(\Delta Q)_{2j+1} - (\Delta Q)_{2j}| \\ &\leq \|\Delta Q\|_\infty. \end{aligned}$$

Plus généralement, on remarque que pour tout k , $\Delta^k P$ s'exprime en fonction de $\Delta^k Q$,

$$(\Delta^k P)_j = \sum_{\ell=0}^k \binom{k}{\ell} (\Delta^k Q)_{2j+\ell}. \quad (4)$$

En effet, notons $\delta : \mathbf{R}^{2N} \rightarrow \mathbf{R}^N$ l'application qui à un polygone R associe R' tel que $R'_j = R_{2j}$. Le fait que Q subdivise P se traduit par l'équation $\delta Q = P$. Si on note τ la permutation circulaire des sommets sur \mathbf{R}^{2N} ou sur \mathbf{R}^N , on a $\delta \circ \tau^2 = \tau \circ \delta$. Comme $\Delta = \tau - 1$,

$$\Delta \circ \delta = \delta \circ (\tau^2 - 1),$$

d'où

$$\begin{aligned} \Delta^k \circ \delta &= \delta \circ (\tau^2 - 1)^k \\ &= \delta \circ (\tau + 1)^k \circ (\tau - 1)^k \\ &= \delta \circ (\tau + 1)^k \circ \Delta^k. \end{aligned}$$

En particulier, $\Delta^k P = \delta \circ (\tau + 1)^k (\Delta^k Q)$, ce qui se traduit par l'équation (4).

Les valeurs $(f_{\Delta^k P} - 2^k f_{\Delta^k Q})(\frac{2j}{2N})$ forment un vecteur R tel que

$$\begin{aligned} R &= \Delta^k P - \delta(2^k \Delta^k Q) \\ &= \delta \circ ((\tau + 1)^k - 2^k) (\Delta^k Q) \\ &= \delta \circ \pi_k(\tau) \circ (\tau - 1) (\Delta^k Q) \\ &= \delta \circ \pi_k(\tau) \circ \Delta^{k+1}(Q), \end{aligned}$$

où π_k est le polynôme tel que $\pi_k(x)(x-1) = (x+1)^k - 2^k$. Comme chaque racine de π_k a un module inférieur à 3, $\pi_k(\tau)$ a une norme inférieure à 4^{k-1} . Par conséquent

$$\|R\|_\infty \leq 4^{k-1} \|\Delta^{k+1} Q\|_\infty.$$

Comme $f_{\Delta^k P}(\frac{2j+1}{2N}) = \frac{1}{2}(\Delta^k P)_{j+1} + (\Delta^k P)_j = \frac{1}{2}((\tau + 1) \circ \Delta^k(P))_j$ et $(\Delta^k Q)_{2j+1} = (\delta \circ \tau \circ \Delta^k Q)_j$, les valeurs $(f_{\Delta^k P} - 2^k f_{\Delta^k Q})(\frac{2j+1}{2N})$ forment un vecteur R' tel que

$$\begin{aligned} R' &= \frac{1}{2}(\tau + 1)\Delta^k P - 2^k \delta \circ \tau \circ \Delta^k Q \\ &= \left(\frac{1}{2}(\tau + 1) \circ \delta \circ (\tau + 1)^k \Delta^k - 2^k \delta \circ \tau \circ \Delta^k\right)(Q) \\ &= \left(\frac{1}{2}\delta \circ ((\tau^2 + 1) \circ (\tau + 1)^k - 2^k \tau)\right)(\Delta^k Q) \\ &= \delta \circ \pi'_k(\tau) \circ (\tau - 1)(\Delta^k Q) \\ &= \delta \circ \pi'_k(\tau)(\Delta^{k+1} Q), \end{aligned}$$

où π'_k est le polynôme tel que $(x - 1)\pi'_k(x) = \frac{1}{2}(x^2 + 1)(x + 1)^k - 2^k x$. Comme chaque racine de π'_k a un module inférieur à 3, $\pi'_k(\tau)$ a une norme inférieure à 4^{k+1} . Par conséquent

$$\|R'\|_\infty \leq 4^{k+1} \|\Delta^{k+1} Q\|_\infty.$$

Comme la fonction affine par morceaux $f_{\Delta^k P} - 2^k f_{\Delta^k Q}$ atteint son maximum en l'un des points $\frac{\ell}{2N}$, on conclut que sa norme L^∞ est majorée par $4^{k+1} \|\Delta^{k+1} Q\|_\infty$. ■

6.1 Preuve du théorème 2

Supposons que $\ell = 1$. Le lemme 6.3, appliqué à $P = 2^{km} P_m$, donne

$$\|2^{km} \Delta^k P_m - 2^{k(m+1)} \Delta^k P_{m+1}\|_\infty \leq 4^{k+1} \|2^{km} \Delta^{k+1} P_{m+1}\|_\infty.$$

L'hypothèse garantit que la série de fonctions de terme général $2^{km} f_{\Delta^k P_m} - 2^{k(m+1)} f_{\Delta^k P_{m+1}}$ converge normalement sur \mathbf{R} . Autrement dit, la suite $2^{km} \Delta^k P_m$ converge. Comme le nombre de sommets de P_m est proportionnel à 2^m , le lemme 6.1 (et la remarque 6.2) s'appliquent : les polygones P_m convergent vers une fonction de classe C^k . ■

References

- [CC] E. Catmull, J. Clark, *Recursively generated B-spline surfaces on arbitrary topological meshes*. Comput. Aided Des. **10**, 350 – 355 (1978).
- [DD] G. Deslauriers, S. Dubuc, *Symmetric iterative interpolation processes*. Constr. Approx. **5**, 49 – 68 (1989).
- [DS] D. Doo, M. Sabin, *Behaviour of recursive division surfaces near extraordinary points*. Comput. Aided Des. **10**, 356 – 360 (1978).
- [K] L. KOBBELT, *Using the discrete Fourier transform to analyze the convergence of subdivision schemes*. Appl. Comp. Harm. Anal. **5**, 68 – 91 (1998).