Géométrie différentielle

P. Pansu

29 mai 2009

1 Variétés

Remonte à Lagrange, qui remplaçait les coordonnées cartésiennes par les coordonnées action-angle en mécanique céleste. Importance des exemples obtenus comme espaces quotients.

1.1 Définitions

Définition 1 *Soit X un espace topologique. Un* atlas de classe C^r *pour X est la donnée*
- *d'un recouvrement de X par des ouverts U_i ;*
- *pour tout i, d'un homéomorphisme $\phi_i : U_i \to V_i$ ouvert de $\mathbb{R}^n$,*

tels que, pour tous i et j, $\phi_j \circ \phi_i^{-1} : \phi_i(U_i \cap U_j) \to \phi_j(U_i \cap U_j)$ est un C^r-difféomorphisme.

On appelle les ϕ_i les *cartes* de l'atlas, et les U_i les *domaines de cartes.*

Définition 2 *Deux atlas (U_i, ϕ_i) et (W_α, ψ_α) sont* compatibles *si les applications $\psi_\alpha \circ \phi_i^{-1}$ sont des C^r-difféomorphismes. Une* structure différentielle *sur X est une classe d'atlas compatibles.*

On peut alors prendre l'atlas formé de toutes les cartes compatibles avec un atlas de la structure différentielle. C'est l'*atlas maximal* de la structure différentielle. Se donner la structure différentielle revient à se donner l'atlas maximal.

Définition 3 *On appelle* variété *un espace topologique séparé, à base dénombrable, muni d'une structure différentielle. Un* difféomorphisme *entre variétés est une bijection qui préserve les structures différentielles.*

Exemple 4 *Deux structures différentielles différentes sur $\mathbb{R}$, mais difféomorphes.*

Exemple 5 *Atlas à deux cartes pour $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$.*

Exemple 6 *Atlas pour $\mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$. Variété produit.*

1.2 Sous-variétés de $\mathbb{R}^n$

Ce sont les exemples qui guident l'intuition.

Définition 7 *Redressement sur un sous-espace vectoriel.*

Exemple 8 *Exemples d'objets singuliers qui ne sont pas des sous-variétés.*

Rappel 9 Théorème des submersions. *Si $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n-d}$ est une submersion au-dessus de y, alors $f^{-1}(y)$ est ou bien vide, ou bien une sous-variété de dimension d de $\mathbb{R}^n$.*

Fin du cours n^{0}1

1.3 Groupes classiques

Non traité en cours en 2009. Voir TD1.

1.4 L'espace projectif

Rappel 10 *Elements de perspective, projection centrale, utilisation des coordonnées homogènes.*

Définition 11 *Espace projectif* $P^n(\mathbb{R})$ *= espace des droites vectorielles de* $\mathbb{R}^{n+1}$*. Idem* $P^n(\mathbb{C})$*.*

Exemple 12 *Atlas à deux cartes pour la droite projective, réelle ou complexe.*

Exemple 13 *Atlas à* $n+1$ *cartes affines pour l'espace projectif, réel ou complexe.*

1.5 Objets différentiables

Définition 14 *Applications différentiables, immersions, submersions, sous-variétés, difféomorphismes, points critiques, valeurs critiques.*

Exercice 15 *Vérifier que les applications projectives sont différentiables, que les sous-variétés linéaires sont des sous-variétés.*

Exercice 16 *Le quotient de deux formes quadratiques définies positives définit une fonction sur* $P^n(\mathbb{R})$*, dont les points critiques sont les droites propres d'une matrice symétrique.*

1.6 Grassmanniennes

Non traité en 2009. Voir TD1.

1.7 Espaces quotients

Définition 17 *Soit* G *un groupe agissant continûment sur un espace topologique* X *localement compact.*

L'action est libre *si le seul élément de* G *qui possède des points fixes est l'élément neutre.*

L'action est proprement discontinue *si, pour tout compact* $K \subset X$*, l'ensemble des* $g \in G$ *tels que* $gK \cap K \neq \emptyset$ *est fini.*

Proposition 18 *Soit* G *un groupe agissant par difféomorphismes d'une variété* X*. On suppose l'action libre et proprement discontinue. Alors l'espace quotient* $G\backslash X$ *est séparé, et il existe une unique structure différentielle sur* $G\backslash X$ *qui fait de la projection* $X \to G\backslash X$ *un difféomorphisme local.*

Fin du cours n^{0}2

Exemple 19 $P^n(\mathbb{R})$ *est difféomorphe au quotient de la sphère* S^n *par le sous-groupe* $\{\pm 1\}$ *du groupe orthogonal.*

Exemple 20 *Le tore* T^n *est le quotient de* $\mathbb{R}^n$ *par le sous-groupe* $\mathbb{Z}^n$ *des translations entières.*

Exemple 21 *Le quotient de* $\mathbb{R}^2$ *par le sous-groupe cyclique infini engendré par l'application* $(x, y) \mapsto (x+1, -y)$ *est une variété appelée* ruban de Möbius.

1.8 Fibrations

Définition 22 *Soient X et Y des fibrations. Une application $f : X \to Y$ est une* fibration (localement triviale) *si, pour tout point de Y il existe un voisinage V, une variété F et un difféomorphisme $\Phi : V \times F \to f^{-1}(V)$ tels the $f \circ \Phi$ coïncide avec la projection sur le premier facteur.*

Exemple 23 *Soit $M = \mathbb{R}^2/\langle (x,y) \mapsto (x+1,-y)\rangle$ le ruban de Möbius. L'application $(x,y) \mapsto x$ mod 1, $M \to \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ est une fibration.*

Exemple 24 *La droite projective complexe $P^1(\mathbb{C})$ est difféomorphe à la sphère unité S^2.*

Fin du cours n^{0}3

Exemple 25 *La surjection canonique $\mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\} \to P^n(\mathbb{C})$ est une fibration. Il en est de même de sa restriction à la sphère unité S^{2n+1}, connue sous le nom de* fibration de Hopf.

1.9 Espace tangent d'une sous-variété de $\mathbb{R}^n$

Définition 26 *Espace tangent en x = espace des vecteurs vitesse en x des courbes contenues dans X et passant par x. Notation T_xX. Application tangente à une application différentiable.*

Proposition 27
1. *Si $X = f(U)$ est l'image d'une immersion, alors $T_{f(x)}X = \mathrm{im} d_x f$.*
2. *Si $X = f^{-1}(y)$ est une fibre d'une submersion, alors $T_xX = \ker d_x f$.*

Remarque 28 *Une sous-variété peut être redressée sur son espace tangent, par un difféomorphisme tangent à l'identité.*

Exemple 29 *Espace tangent à la sphère, à une hypersurface définie par une équation, aux groupes classiques.*

1.10 Intersections de sous-variétés

Définition 30 *Transversalité de sous-espaces vectoriels, de sous-variétés. Codimension.*

Théorème 1 *L'intersection de deux sous-variétés transverses est une sous-variété, et les codimensions s'additionnent.*

Exemple 31 *Intersection du tore de révolution avec une famille de plans parallèles.*

Fin du cours n^{0}4

1.11 Fibré tangent

L'espace tangent est l'endroit où vivent les vecteurs vitesse des courbes.

Définition 32 *T_xX = classes d'équivalence de courbes de même vitesse dans une carte.*
Différentielle d'une application différentiable entre variétés, notée T_xf.

Exemple 33 *Si ℓ est une droite vectorielle de V, alors $T_\ell P(V) = Hom(\ell, V/\ell)$. Si $M \in Gl(V)$, alors M induit une bijection projective f de $P(V)$ et une application linéaire $Hom(\ell, V/\ell) \to Hom(M(\ell), V/M(\ell))$ qui n'est autre que $T_\ell f : T_\ell P(V) \to T_{f(\ell)}P(V)$.*

1.12 Champs de vecteurs

Définition 34 *Champs de vecteurs. Lignes intégrales. Transport par difféomorphisme :* $(f_*\xi)(y) = (T_{f(y)}f)(\xi(f^{-1}(y)))$.

Exemple 35 *Champ de vecteurs sur* $P^n(\mathbb{R})$ *associé à un endomorphisme de* $\mathbb{R}^{n+1}$.

Fin du cours n^{0}5

Théorème 2 *Existence locale, unicité locale des lignes intégrales maximales, théorème des bouts, dépendance par rapport à la condition initiale, équation aux variations.*

Définition 36 *Champs de vecteurs complets, flot, groupes à un paramètre de difféomorphismes. Cinématique.*

Exemple 37 *Champs de vecteurs linéaires et exponentielle de matrices.*

Portraits des champs de vecteurs linéaires dans le plan : cols, noeuds dégénérés et non dégénérés, soleils, foyers, centres.

Exemple 38 *Le flot du champ de vecteur sur* $P^n(\mathbb{R})$ *associé à un endomorphisme* L *de* $\mathbb{R}^{n+1}$ *est le groupe à un paramètre de bijections projectives de matrices* $\exp(tL)$.

Fin du cours n^{0}6

Exercice 39 *Redressement local d'un champ de vecteurs qui ne s'annule pas.*

Exercice 40 *Transitivité du groupe des difféomorphismes à support compact sur une variété connexe.*

1.13 Orientation

Définition 41 *Orientation d'un espace vectoriel. Orientation d'une variété = atlas avec cartes préservant l'orientation. Orientation des espaces tangents.*

Proposition 42 *Orientation d'une variété = orientation localement constante des espaces tangents.*

Proposition 43 *Cas des sous-variétés : orientation normale. Orientation d'une sous-variété = orientation de l'espace ambiant + orientation normale.*

Fin du cours n^{0}7

Proposition 44 *Cas des espaces quotients.*

Exemple 45 *L'espace projectif* $P^n(\mathbb{R})$ *est orientable si et seulement si* n *est impair. Le ruban de Möbius n'est pas orientable.*

Définition 46 *Revêtement des orientations.* Sera traité plus tard.

1.14 Topologie différentielle

Cette section ne comporte que des énoncés.

Théorème 3 *Classification des variétés compactes connexes de dimension 1.*

Définition 47 *Somme connexe. Dépendance par rapport aux choix.*

Exemple 48 *Surface orientable* $T_g = (T^2)^{\#g}$, $g \in \mathbb{N}$ *(*$T_0 = S^2$*). Surface non orientable* $U_g = (P^2(\mathbb{R}))^{\#(g+1)}$, $g \in \mathbb{N}$ *(*$U_0 = P^2(\mathbb{R})$*).*

Théorème 4 *Classification des variétés compactes connexes de dimension 2.*

Fin du cours n^{0}8

1.15 Feuilletages

Motivation : à quelle condition peut on redresser simultanément deux champs de vecteurs sur des champs constants ?

Définition 49 *Dérivations sur l'algèbre des fonctions de classe* C^∞ *sur une variété de classe* C^∞*. Dérivée de Lie, notations* $\mathcal{L}_\xi f$, $\mathcal{L}_\xi \eta$*.*

Lemme 50 *Si* f *est une fonction de classe* C^∞ *définie sur un voisinage* U *de 0 dans* $\mathbb{R}^n$*, alors* $f(x) = f(0) + x \cdot G(x)$ *où* $G : U \to \mathbb{R}^n$ *est de classe* C^∞*.*

Proposition 51 *Expression d'une dérivation en coordonnées. Lien entre dérivations et champs de vecteurs. Notation* $\sum a_i \frac{\partial}{\partial x_i}$ *pour les champs de vecteurs sur des ouverts de* $\mathbb{R}^n$*.*

Définition 52 *Crochet de deux champs de vecteurs. Identité de Jacobi.*

Fin du cours n^{0}9

Proposition 53 *Si* g *est une fonction,* $\mathcal{L}_{g\xi} f = g\mathcal{L}_\xi f$, $[\xi, g\eta] = g[\xi, \eta] + (\mathcal{L}_\xi g)\eta$*. Formule*

$$[\sum_i a_i \frac{\partial}{\partial x_i}, \sum_j b_j \frac{\partial}{\partial x_j}] = \sum_i (a_j \frac{\partial b_i}{\partial x_j} - b_j \frac{\partial a_i}{\partial x_j}) \frac{\partial}{\partial x_i}.$$

Lemme 54 *Si* f *est une fonction de classe* C^∞ *sur* $\mathbb{R} \times X$*, alors* $f(t, x) = f(0, x) + tg(t, x)$ *où* $g : \mathbb{R} \times X \to \mathbb{R}$ *est de classe* C^∞*.*

Proposition 55 *Formule* $\mathcal{L}_\xi \eta = -[\xi, \eta]$*. Identité de Jacobi vue comme* $\mathcal{L}_\zeta[\xi, \eta] = [\mathcal{L}_\zeta \xi, \eta] + [\xi, \mathcal{L}_\zeta \eta]$*.*

Corollaire 56 *Champs de vecteurs de crochets nuls* $\Leftrightarrow$ *flots commutants. Redressement local simultané de champs de vecteurs.*

Définition 57 *Champs de plans. Feuilletages.*

Exemple 58 *Flot linéaire sur le tore. Champ de plan de contact dans* $\mathbb{R}^3$*.*

Fin du cours n^{0}10

Théorème 5 *Condition suffisante d'existence de sous-variétés intégrales (Frobenius).*

2 Groupes de Lie

On s'intéresse surtout aux groupes classiques. Mais maintes propriétés dépendent seulement du fait qu'il s'agit de variétés avec des opérations différentiables.

2.1 Définition

Définition 59 *Groupes topologiques, groupes de Lie, sous-groupes de Lie. Translations.*

Exemple 60 *Sous-groupes ouverts, composante neutre. Noyaux d'homomorphismes. Les sous-groupes de Lie sont fermés.*

Attention, l'image d'un homomorphisme n'est pas toujours un sous-groupe de Lie. Exemple : sous-groupe à un paramètre dans un tore.

Fin du cours n^{0}11

Définition 61 *Action différentiable d'un groupe de Lie sur une variété.*

Proposition 62 *Le stabilisateur d'un point est un sous-groupe de Lie.*

Exemple 63 *Groupes classiques : groupes orthogonaux, unitaires, groupe symplectique.*

Fin du cours n^{0}12

2.2 Algèbres de Lie

Définition 64 *Algèbres de Lie, sous-algèbres, homomorphismes.*

Exemple 65 *Algèbre de Lie des champs vecteurs C^∞ sur une variété. Structure d'algèbre de Lie sur une algèbre associative. $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{R})$. Sous-algèbres classiques de $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{R})$.*

2.3 Algèbre de Lie d'un groupe de Lie

Définition 66 *L'algèbre de Lie de G, c'est les champs de vecteurs invariants à gauche sur G. S'identifie à T_eG, via $v \mapsto \xi_v$.*

Exemple 67 *Champs de vecteurs invariants sur $U(1)$, sur $Gl_n(\mathbb{R})$.*

Définition 68 *Action adjointe de G sur T_eG, $Ad : G \to GL(T_eG)$. Sa différentielle $ad : T_eG \to End(T_eG)$.*

Proposition 69 *Pour tous v, w, $z \in \mathfrak{g}$, $[v, w] = ad_v(w)$, $ad_z[v, w] = [ad_z v, w] + [v, ad_z w]$.*

Preuve Le flot d'un champ de vecteurs invariant à gauche $\xi_v \in \mathfrak{g}$, c'est un groupe à un paramètre de translations à droite par des éléments $\phi(t)$, $t \in \mathbb{R}$. ■

Fin du cours n^{0}13

Proposition 70 *Si $f : G \to G'$ est homomorphisme de groupes de Lie, alors $T_e f : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}'$ est un homomorphisme d'algèbres de Lie. H sous-groupe de Lie de $G \Rightarrow \mathfrak{h}$ sous-algèbre de Lie de $\mathfrak{g}$.*

Exemple 71 *Algèbres de Lie des groupes orthogonaux $O(n)$, $O(p, q)$, $SO(p, q)$, des groupes unitaires $U(n)$, $U(p, q)$, $SU(p, q)$, du groupe symplectique $Sp_n(\mathbb{R})$.*

2.4 Exponentielle

Définition 72 *On pose* $\exp(v) = \phi(1) \in G$*, où* $t \mapsto \phi(t)$ *est le sous-groupe à un paramètre de* G *tel que* $R_{\phi(t)}$ *est le flot de* ξ_v*.*

Proposition 73 *Si* $[v, w] = 0$*,* $\exp(v + w) = \exp(v)\exp(w)$*.*

Proposition 74 *Naturalité sous les homomorphismes de groupes de Lie. Exemples : Ad, déterminant.*

2.5 Sous-groupes de Lie immergés

Théorème 6 *Soit* G *un groupe de Lie d'algèbre de Lie* $\mathfrak{g}$*. Soit* $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ *une sous-algèbre de Lie. Alors il existe un groupe de Lie* H *et un homomorphisme de groupes de Lie injectif* $i : H \to G$ *tel que* $T_e i : T_e H \to \mathfrak{h}$ *soit un isomorphisme d'algèbres de Lie. La paire* (H, i) *est unique à unique isomorphisme près. On l'appelle* sous-groupe de Lie immergé *d'algèbre de Lie* $\mathfrak{h}$*.*

Preuve Frobenius. $\mathfrak{h}$ engendre un champ de plans invariant à gauche sur G. Il est tangent à un feuilletage. La feuille passant par l'élément neutre est un sous-groupe de G. Pour la topologie des feuilles, c'est un groupe de Lie. ■

Fin du cours n^{0}14

Théorème 7 (E. Cartan)*. Tout sous-groupe fermé d'un groupe de Lie est un sous-groupe de Lie.*

Preuve $\mathfrak{h} = \{v \in \mathfrak{g}\,;\, \forall t,\, \exp(tv) \in H\}$ est un sous-espace vectoriel, car

$$\exp(v + w) = \lim_{n\to\infty} (\exp(v/n)\exp(w/n))^n.$$

C'est une sous-algèbre de Lie, car $e^{ad_v} = Ad_{\exp(v)}$ préserve $\mathfrak{h}$. Soit H' le sous-groupe immergé correspondant. Alors $H' \subset H$, car $\exp(\mathfrak{h}) \subset H$ et H', qui est connexe, est engendré par $\exp(\mathfrak{h})$. H coïncide avec H' au voisinage de e (sinon, les composantes transverses à H' des éléments de $H \setminus H'$, une fois normalisées, convergeraient vers des éléments de $\mathfrak{h}$ transverses à $\mathfrak{h}$), donc c'est une sous-variété au voisinage de e, donc partout. ■

Théorème 8 *Soient* G *et* G' *des groupes de Lie,* G *connexe. Soit* $h : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}'$ *un homomorphisme d'algèbres de Lie. Alors il existe un revêtement* $p : \hat{G} \to G$ *de groupes de Lie et un homomorphisme* $f : \hat{G} \to G'$ *tel que* $T_e f = h \circ T_e p$*.*

Preuve $\mathfrak{k} = \{(v, h(v)) \,|\, v \in \mathfrak{g}\}$ est une sous-algèbre de Lie de $\mathfrak{g} \times \mathfrak{g}'$. Soit (K, i) le sous-groupe immergé correspondant de $G \times G'$. Alors $p = pr_1 \circ i : K \to G$ est un revêtement et $f = pr_1 \circ i : K \to G'$ l'homomorphisme cherché. ■

Exemple 75 *L'isomorphisme évident entre les algèbres de Lie de* $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ *et* $\mathbb{R}$ *ne s'intègre pas en un homomorphisme de groupes. Mais il existe au niveau du revêtement* $\mathbb{R}$*.*

Fin du cours n^{0}15

2.6 Groupes de Lie et revêtements

Lemme 76 *G, G' groupes de Lie connexes.* $p : G \to G'$ *est un revêtement* $\Leftrightarrow$ G' *est le quotient de* G *par un sous-groupe discret de son centre.*

Définition 77 *G est simplement connexe si G est connexe et tout revêtement* $\hat{G} \to G$ *est trivial.*

Proposition 78 *G est simplement connexe si G est connexe et tout lacet dans G est homotope à 0.* (Admis).

Proposition 79 *Existence et unicité, à unique isomorphisme près, du revêtement universel d'un groupe de Lie connexe. Pour tout revêtement connexe $p : \hat{G} \to G$, il existe un revêtement $q : \tilde{G} \to \hat{G}$ tel que $q \circ p$ est le revêtement universel.* (Admis).

Exemple 80 *Le revêtement universel de $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ est $\mathbb{R}$. Classification des revêtements de $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$.*

2.7 Groupes de Lie simplement connexes et algèbres de Lie

Théorème 9 *Si G et G' sont des groupes de Lie, et si G est simplement connexe, tout homomorphisme d'algèbres de Lie $\mathfrak{f} : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}'$ s'intègre en un unique homomorphisme de groupes de Lie $f : G \to G'$.*

Théorème 10 (I. G. Ado, 1935). *Toute algèbre de Lie réelle de dimension finie est isomorphe à une sous-algèbre d'une algèbre de matrices $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{R})$.* Admis.

Corollaire 81 *Dictionnaire entre groupes de Lie simplement connexes (et leurs homomorphismes) et algèbres de Lie de dimension finie (et leurs homomorphismes).*

2.8 Actions différentiables de groupes de Lie

Définition 82 *Action différentiable, transitive. Stabilisateur, orbite, espace des orbites.*

Théorème 11 *Quotient d'un groupe de Lie G par un sous-groupe de Lie H : G/H est une variété séparée, $G \to G/H$ une fibration G-équivariante de fibre H. $T_{eH}G/H = (T_eG)/T_eH$. Les fonctions C^∞ de G/H dans une variété X sont les fonctions C^∞ H-invariantes sur G.*

Fin du cours n^{0}16

Preuve $\pi : G \to G/H$ est ouverte. H fermé $\Rightarrow G/H$ est séparé. T_eH engendre un feuilletage dont les feuilles sont les orbites de H_0 = composante neutre de H. Les transversales donnent des cartes de l'espace quotient et des trivialisations locales de la fibration π. ■

Corollaire 83 *Si un groupe de Lie G agit différentiablement et transitivement sur une variété X, alors X est difféomorphe à G/H où H est le stabilisateur d'un point.*

Exemple 84 *La sphère $S^n = O(n+1)/O(n) = SO(n+1)/SO(n)$. L'espace projectif $P^n(\mathbb{R}) = O(n+1)/O(1) \times O(n) = SO(n+1)/O(n) = PGL_n(\mathbb{R}) \ltimes \mathbb{R}^n$. Interprétation géométrique (géométrie non euclidienne elliptique, géométrie projective).*

Exemple 85 *$O(1,n)/O(1) \times O(n)$ est l'espace de la géométrie non euclidienne hyperbolique. $Sl_2(\mathbb{R})$ est un revêtement double de la composante neutre de $O(1,2)$. Equivalence de la géométrie projective 1-dimensionnelle et de la géométrie hyperbolique 2-dimensionnelle.*

3 Formes différentielles

3.1 Motivation

Il s'agit de rendre rigoureux un formalisme mnémotechnique.

1. Substitution des formes différentielles de degré 1 aux champs de vecteurs, pour le calcul des circulations par changement de variables.

2. Dans la formule de Green-Riemann apparaît $d\alpha$, expression qui se calcule avec les règles $d(f\,dx) = df\,dx$, $dx\,dx = 0$, $dx\,dy = -dy\,dx$.
3. Dans la formule de changement de variable dans les intégrales multiples apparaît le déterminant de la différentielle. Or le déterminant est relié à l'action des endomorphismes sur les n-formes différentielles alternées.

Cela suggère d'utiliser les formes multilinéaires alternées, comme généralisation des formes différentielles de degré 1.

3.2 Algèbre extérieure

Définition 86 *Formes alternées sur un espace vectoriel E, notation $\Lambda^{\cdot} E^*$, transport par applications linéaires, notation $\Lambda^{\cdot} L$. Si L est un endomorphisme, $\Lambda^n L = \det(L)$.*

Fin du cours n^{0}17

Produit tensoriel, produit extérieur de formes alternées. Formule

$$(a \wedge b)(v_1, \ldots, v_{p+q}) = \sum_{\text{permut. partiellem. croissantes } \sigma} (-1)^\sigma a(v_{\sigma(1)}, \ldots, v_{\sigma(p)}) b(v_{\sigma(p+1)}, \ldots, v_{\sigma(p+q)}).$$

Proposition 87 *Associativité, commutativité graduée, naturalité sous les applications linéaires.*

Proposition 88 *Base de l'algèbre extérieure. Déterminant dans une base comme produit extérieur.*

Définition 89 *Produit intérieur. Formule $\iota_v(a \wedge b) = \iota_v(a) \wedge b + (-1)^{\deg(a)} a \wedge \iota_v(b)$.*

3.3 Formes différentielles

Définition 90 *Cas des ouverts de $\mathbb{R}^n$. Ecriture $\omega = \sum_{I \in \mathcal{I}_n} \omega_I\, dx_I$. Exemple : différentielle d'une fonction. Transport par applications différentiables. Formule $d(f \circ \phi) = \phi^* df$.*

Exemple 91 *Si $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$, $f = (f_1, \ldots, f_p)$, alors la formule $f^*(\sum_{J \in \mathcal{I}_p} \omega_J\, dy_J) = \sum_{J \in \mathcal{I}_p} \omega_J \circ f\, df_J$ s'applique mécaniquement (coordonnées polaires). Cas des formes de degré maximum.*

Définition 92 *Cas général des variétés. Fibré des formes alternées $\Lambda^{\cdot} T^* X$. Ses sections sont les formes différentielles. C'est une algèbre graduée associative, commutative. Transport par applications différentiables.*

Fin du cours n^{0}18

3.4 Différentielle extérieure

Théorème 12 *Il existe un unique prolongement d de la différentielle des fonctions à toutes les formes différentielles, qui satisfasse*
- $d(a \wedge b) = da \wedge b + (-1)^{\deg(a)} a \wedge db$.
- $d \circ d = 0$.

Il est de plus naturel sous les applications suffisamment différentiables.

Preuve Unicité facile. Existence résulte de la formule

$$(d\omega)_x(v_1, \ldots, v_{p+1}) = \sum_{i=1}^{p+1} (-1)^{i+1} T_x\omega(v_i)(v_1, \ldots, \widehat{v_i}, \ldots, v_{p+1}).$$

En effet, cette expression satisfait $d(f\,dx_I) = df \wedge dx_I$. Puis vient le produit, puis $d \circ d$, puis le transport. ■

Exemple 93 *Le calcul est mécanique, à partir des axiomes.*

3.5 Dérivée de Lie

Théorème 13 *Il existe un unique prolongement $\mathcal{L}_\xi$ de la dérivée de Lie des fonctions le long des champs de vecteurs à toutes les formes différentielles, qui satisfasse*

- $\mathcal{L}_\xi(a \wedge b) = \mathcal{L}_\xi a \wedge b + a \wedge \mathcal{L}_\xi b$.
- $\mathcal{L}_\xi \circ d = d \circ \mathcal{L}_\xi$.

Il satisfait de plus

- *Naturalité sous les difféomorphismes :* $\mathcal{L}_\xi \phi^* \omega = \phi^*(\mathcal{L}_{\phi_* \xi} \omega)$.
- *Formule de Cartan :* $\mathcal{L}_\xi = d \circ \iota_\xi + \iota_\xi \circ d$.
- $\mathcal{L}_\xi \omega = \frac{d}{dt} \phi_t^* \omega_{|t=0}$, *où* ϕ_t *est le flot local de* ξ.
- $\mathcal{L}_{[\xi,\eta]} = [\mathcal{L}_\xi, \mathcal{L}_\eta]$.

Preuve Existence résulte de la formule de Cartan. ■

3.6 Intégration

Définition 94 *Cas des ouverts de $\mathbb{R}^n$. Une n-forme différentielle sur un ouvert U de $\mathbb{R}^n$ s'écrit $\omega = u\, dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n$. Si B est un borélien de U, on pose*

$$\int_B \omega = \int_B u\, dx_1 \ldots dx_n.$$

Proposition 95 *Formule de changement de variable. Soit $\phi : U \to V$ un difféomorphisme, soit B est un borélien de U, soit ω une n-forme différentielle sur V. Alors*

$$\int_{\phi(B)} \omega = \text{signe}(T\phi) \int_B \phi^* \omega.$$

Noter que l'intégration n'est pas invariante par changement de coordonnées, seulement par changement de coordonnées *préservant l'orientation.*

Définition 96 *Cas des variétés orientées. Soit X une variété orientée. Soit ω une n-forme différentielle sur X à support compact. Soient $\phi_i : U_i \to V_i \subset \mathbb{R}^n$ des cartes orientées. Soient $B_i \subset U_i$ des boréliens qui partitionnent X. On pose*

$$\int_X \omega = \sum_i \int_{\phi_i(B_i)} (\phi_i^{-1})^* \omega.$$

Le résultat ne dépend pas des choix.

Plus généralement, on définit l'intégration le long d'une courbe une d'une nappe paramétrée. Si X est une variété orientée de dimension d, si $f : X \to Y$ est lisse, si ω est une d-forme différentielle sur Y, on note abusivement

$$\int_{f(X)} \omega = \int_X f^* \omega.$$

3.7 La formule de Stokes

Définition 97 *Soit X une variété orientée. Un sous-ensemble $N \subset X$ est un* domaine à bord lisse *si, au voisinage de chaque point du bord de N, il existe une carte de X qui envoie N sur un demi-espace fermé. Noter que le bord ∂N est une sous-variété orientée (par la normale sortante).*

Théorème 14 *Soit X une variété orientée. Soit $N \subset X$ un domaine à bord lisse. Soit ω une $n-1$-forme différentielle sur X à support compact. Alors*

$$\int_{\partial N} \omega = \int_N d\omega.$$

En particulier, si X est compacte orientée, pour toute $n-1$-forme différentielle ω sur X

$$\int_X d\omega = 0.$$

Preuve Partition de l'unité $\Rightarrow$ il suffit de le faire pour une forme à support compact dans le demi-espace $\{x_1 \leq 0\}$ de $\mathbb{R}^n$. La normale sortante est e_1. $(e_2, \ldots, e_n)$ est une base directe de TN.

$$\omega = \sum_{i=1}^{n} \omega_i dx_1 \wedge \cdots \wedge \widehat{dx_i} \wedge \cdots \wedge dx_n \quad \Rightarrow \quad d\omega = (\sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} \frac{\partial \omega_i}{\partial x_i})\, dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n,$$

$$\begin{aligned}
\int_{\partial N} \omega &= \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \omega_1\, dx_2 \ldots dx_n = \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \int_{-\infty}^{0} \frac{\partial \omega_1}{\partial x_1}\, dx_1\, dx_2 \ldots dx_n \\
&= \int_N d\omega - \sum_{i=2}^{n} (-1)^{i+1} \int_{\mathbb{R}^{n-2}} \int_{-\infty}^{0} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial \omega_i}{\partial x_i} dx_i\, dx_1 \ldots \widehat{dx_i} \ldots dx_n \\
&= \int_N d\omega.
\end{aligned}$$

■

Fin du cours n^{0}19

3.8 Analyse vectorielle

On se place dans $E = \mathbb{R}^3$ euclidien orienté. On note det le déterminant dans une base orthonormée directe (parfois appelé *produit mixte*). On dispose alors de trois isomorphismes

1. $E \mapsto E^*$, $v \mapsto \alpha_v : w \mapsto v \cdot w$.
2. $E \mapsto \Lambda^2 E^*$, $v \mapsto \omega_v = \iota_v \det$.
3. $\mathbb{R} \mapsto \Lambda^3 E^*$, $\lambda \mapsto \lambda \det$.

Les 1-formes différentielles s'identifient à des champs de vecteurs, les 2-formes différentielles s'identifient à des champs de vecteurs (les physiciens parlent de *pseudo-vecteurs*) et les 3-formes différentielles s'identifient à des fonctions.

Proposition 98 *A travers ces isomorphismes,*

1. *la circulation d'un champ de vecteurs ξ le long d'une courbe γ est égale à $\int_\gamma \alpha_\xi$,*
2. *le flux d'un champ de vecteurs ξ à travers une surface S est égal à $\int_S \omega_\xi$,*
3. *l'intégrale d'une fonction u sur un domaine N est égale à $\int_N u \det$.*

d définit trois opérateurs différentiels du premier ordre,

1. *le gradient des fonctions ∇,*
2. *le rotationnel des champs de vecteurs $\nabla\wedge$,*
3. *la divergence des champs de vecteurs $\nabla\cdot$.*

L'identité $d \circ d = 0$ se traduit par $\nabla \wedge \nabla = 0$, $\nabla \cdot \nabla\wedge = 0$. Le produit extérieur est relié au produit vectoriel par la formule $\omega_{(v\wedge w)} = \alpha_v \wedge \alpha_w$. La formule de Stokes se traduit par

1. *variation de u entre les extrémités de γ = circulation de ∇u le long de γ,*
2. *circulation de ξ le long de ∂S = flux de $\nabla \wedge \xi$ à travers S,*
3. *flux de ξ à travers ∂N = intégrale de $\nabla \cdot \xi$ sur N.*

4 Cohomologie de de Rham

4.1 Motivation

Définition 99 *Formes exactes, formes fermées.*

Dans $\mathbb{R}^n$, une forme fermée est automatiquement exacte. Si, dans une variété, ce n'est pas vrai, on a détecté un phénomène global.

Définition 100 *Cohomologie = formes fermées/formes exactes. Structure d'algèbre. Naturalité sous les applications différentiables.*

Exemple 101 $H^0(X) = \mathbb{R}^{\pi_0(X)}$. *$f : X \to Y$ constante $\Rightarrow f^*$ est injectif sur H^0, nul sur les H^i, $i > 0$.*

Exemple 102 $H^0(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$. $H^i(\mathbb{R}) = 0$, $i > 0$.

4.2 Produits

Proposition 103 *Soit X une variété. L'application $i_t : X \to X \times \{t\} \to X \times \mathbb{R}$ induit un homomorphisme en cohomologie qui ne dépend pas de t.*

Preuve On note $\xi = \frac{\partial}{\partial t}$, $\phi_s(x,t) = (x, t+s)$ et on pose

$$K\omega = \int_0^1 (\phi_s^* \iota_\xi \omega)\, ds.$$

Alors $dK + Kd = \phi_1^* - \phi_0^*$. Lien avec la formule de Cartan pour la dérivée de Lie. ■

Fin du cours n^{0}20

4.3 Invariance par homotopie

Rappel 104 *Soient X, Y des espaces topologiques. Deux applications continues f_0, $f_1 : X \to Y$ sont homotopes si ce sont les restrictions à $X \times \{0\}$ et $X \times \{1\}$ d'une application continue $f : X \times [0,1] \to Y$.*

Théorème 15 *Soient, X, Y des variétés. Soient f_0, $f_1 : X \to Y$ des applications différentiables homotopes. Alors f_0 et f_1 définissent le même homomorphisme en cohomologie.*

Preuve 1. Cas où f_0 et f_1 sont différentiablement homotopes, i.e. il existe une homotopie différentiable $f : X \times \mathbb{R} \to Y$. Alors $f_t = f \circ i_t$, d'où $f_0^* = i_0^* \circ f^* = i_1^* \circ f^* = f_1^*$.

2. Lemme : *Deux applications différentiables suffisamment proches sont différentiablement homotopes.* ■

La preuve du lemme donne aussi que toute application continue entre variétés est proche d'une application différentiable. D'où la

Définition 105 *f^* pour f continue.*

Rappel 106 *Equivalence d'homotopie entre espaces topologiques. Rétractions par déformation. Espaces contractiles.*

Corollaire 107 *Une équivalence d'homotopie induit un isomorphisme (d'algèbres) en cohomologie. En particulier, une rétraction par déformation induit un isomorphisme en cohomologie.*

Exemple 108 *X contractile $\Rightarrow H^\cdot(X) = H^0(X) = \mathbb{R}$. En particulier (Lemme de Poincaré), toute forme différentielle fermée sur un ouvert étoilé de $\mathbb{R}^n$ est exacte (sauf en degré 0).*

Exemple 109 *L'espace total d'un fibré vectoriel a même cohomologie que la base. $\mathbb{C}^*$ et le ruban de Möbius ont même cohomologie que S^1. $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ que S^{n-1}.*

4.4 Suite exacte de Mayer-Vietoris

Définition 110 *Une suite d'espaces vectoriels et d'applications linéaires* $\cdots \to E_i \xrightarrow{f_i} E_{i+1} \to \cdots$ *est* exacte *si pour tout* i, $\ker(f_{i+1}) = \mathrm{im}(f_i)$.

Théorème 16 *Soit* $X = U \cup V$ *une variété, réunion de deux ouverts. Alors il existe une suite exacte longue*

$$\cdots \to H^{k-1}(U \cap V) \xrightarrow{\delta} H^k(X) \to H^k(U) \times H^k(V) \to H^k(U \cap V) \xrightarrow{\delta} H^{k+1}(X) \to \cdots,$$

où les flèches sont $(i^*_{U\subset X}, i^*_{V\subset X}) : H^k(X) \to H^k(U) \times H^k(V)$ *et* $i^*_{U\cap V\subset U} - i^*_{U\cap V\subset V} : H^k(U) \times H^k(V) \to H^k(U \cap V)$.

De plus, cette suite est fonctorielle : si $f : X \to X'$ *est continue,* $X' = U' \cup V'$ *et* $f(U) \subset U'$, $f(V) \subset V'$, *alors* f *induit un diagramme commutatif.*

Preuve 1. La suite $0 \to \Omega^k(X) \to \Omega^k(U) \times \Omega^k(V) \to \Omega^k(U \cap V) \to 0$ est exacte.

2. Le reste (construction de δ, indépendance des choix, exactitude) en résulte mécaniquement. ■

Corollaire 111 *Si* X *est une variété compacte,* $H^{\cdot}(X)$ *est de dimension finie.*

Preuve On a besoin d'un recouvrement ouvert de X tel que toutes les intersections soient contractiles. ■

4.5 Caractéristique d'Euler

Définition 112 *Si* $\dim(H^{\cdot}(X)) < +\infty$, *on pose* $\chi(X) = \sum_{i=0}^{n}(-1)^k \dim(H^k(X))$.

Lemme 113 *Soit* $0 \to E_0 \to \cdots \to E_k \to 0$ *une suite exacte d'espaces vectoriels. Alors*

$$\sum_{i=0}^{k}(-1)^i \dim(E_i) = 0.$$

Proposition 114 X *recouverte par deux ouverts* U *et* $V \Rightarrow \chi(X) = \chi(U) + \chi(V) - \chi(U \cap V)$.

Exemple 115 $\chi(S^n) = 1 + (-1)^n$. $\chi(\textit{tore troué}) = -1$, $\chi(T_g) = 2 - 2g$.

Corollaire 116 *Les surfaces compactes orientables* T_g *sont deux à deux non homéomorphes.*

Fin du cours n^{0}21

4.6 Cohomologie des sphères

Proposition 117

$$\dim(H^p(S^n)) = \begin{cases} 2 & si\ 0 = p = n, \\ 1 & si\ 0 = p < n, \\ 0 & si\ 0 < p < n, \\ 1 & si\ 0 < p = n, \\ 0 & si\ p > n. \end{cases}$$

En particulier, si $n \geq 1$, *l'intégration des* n*-formes différentielles définit un isomorphisme* $H^n(S^n) \to \mathbb{R}$.

Corollaire 118 *Il n'existe pas de rétraction* $B^n \to S^{n-1}$.

Corollaire 119 (Brouwer). *Toute application continue* $B^n \to B^n$ *possède un point fixe.*

4.7 Cohomologie des tores

Non traité en 2009

4.8 Dualité de Poincaré

Définition 120 *Cohomologie de de Rham à supports compacts.*

Proposition 121 (Suite exacte de Mayer-Vietoris à supports compacts). *Si $X = U \cup V$,*

$$\cdots \to H_c^{k-1}(X) \xrightarrow{\delta} H_c^k(U \cap V) \to H_c^k(U) \times H_c^k(V) \to H_c^k(X) \xrightarrow{\delta} H^{k+1}(U \cap V) \to \cdots,$$

Lemme 122

$$\dim(H_c^p(R^n)) = \begin{cases} 1 & si\ 0 = p = n, \\ 0 & si\ 0 < p \neq n, \\ 1 & si\ 0 < p = n. \end{cases}$$

En particulier, l'intégration des n-formes donne un isomorphisme $H_c^n(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}$.

Preuve Soit $k \geq 1$, soit ω une k-forme fermée à support compact sur $\mathbb{R}^n$. Si $k = n$, on suppose que $\int_{\mathbb{R}^n} \omega = 0$. Alors ω se prolonge à S^n en une forme exacte, $\omega = d\alpha$. Si $k = 1$, on peut supposer que α est nulle au voisinage de ∞. Sinon, comme $d\alpha = 0$ au voisinage de ∞, il existe β tel que $\alpha = d\beta$ au voisinage de ∞. Soit γ définie sur S^n telle que $\gamma = \beta$ au voisinage de ∞. Alors $\omega = d(\alpha - d\gamma)$, et $\alpha - d\gamma$ est à support compact sur $\mathbb{R}^n$. ■

Fin du cours n^{0}22

Théorème 17 (Dualité de Poincaré). *Soit X une variété compacte orientable, de dimension $n \geq 1$. Alors*

$$H^k(X) \to (H^{n-k}(X))^*, \quad [\alpha] \mapsto ([\beta] \mapsto \int_X \alpha \wedge \beta)$$

est un isomorphisme d'espaces vectoriels.

Preuve On montre mieux, que si X est une variété qui admet un recouvrement ouvert *fini* dont toutes les intersections sont contractiles, alors

$$H^k(X) \to (H_c^{n-k}(X))^*, \quad [\alpha] \mapsto ([\beta] \mapsto \int_X \alpha \wedge \beta)$$

est un isomorphisme. A partir du cas de $\mathbb{R}^n$, par récurrence sur le nombre d'ouverts. Mayer-Vietoris et lemme des 5. ■

Corollaire 123 *Si X est connexe, l'intégration des n-formes donne un isomorphisme $H^n(X) \to \mathbb{R}$.*

Proposition 124 *Si X est une variété compacte non orientable, $H^n(X) = 0$.*

Preuve Soit $p : X^{or} \to X$ le revêtement des orientations et $a : X \to X$ son automorphisme. Par la formule de changement de variable, $a^* = -id_{H^n(X)}$. D'ou $p^* = (p \circ a)^* = a^* \circ p^* = -p^*$, i.e. $p^* = 0$. Si ω est une n-forme sur X, $p^*\omega = d\alpha$, soit $\beta = \frac{1}{2}(\alpha + p^*\alpha)$. Alors $a^*\beta = \beta$, donc $\beta = p^*\gamma$, et $d\gamma = \alpha$. ■

4.9 Théorie du degré

Définition 125 *X, Y variétés compactes connexes orientées de même dimension $n \geq 1$. Si $f : X \to Y$, sur H^n, $\int_X f^* \cdot = \deg(f) \int_Y \cdot$.*

Proposition 126
- *Deux applications homotopes ont même degré.*
- $\deg(g \circ f) = \deg(f)\deg(g)$.
- deg *dépend des orientations choisies sur X et Y.*
- *f constante $\Rightarrow \deg(f) = 0$.*
- *f difféomorphisme $\Rightarrow \deg(f) = \pm 1$, et $\deg(f) = 1 \Leftrightarrow f$ préserve l'orientation.*
- *Etant données $f_i : X_i \to Y_i$, on peut construire $f_1 \# f_2 : X_1 \# X_2 \to Y_1 \# Y_2$ de sorte que $\deg(f_1 \# f_2) = \deg(f_1) + \deg(f_2)$.*

Théorème 18 *Soient X, Y variétés compactes connexes orientées de même dimension $n \geq 1$. Soit $f : X \to Y$ une application différentiable. Si $y \in Y$ est une valeur régulière de f, alors*

$$\deg(f) = \sum_{x \in f^{-1}(y)} \text{signe}(f, x),$$

où $\text{signe}(f, x) = 1$ *si $T_x f$ préserve l'orientation, $= -1$ sinon.*

Preuve Formule de changement de variable. ■

Fin du cours n^{0}23