Géométrie différentielle

P. Pansu

2 juin 2008

1 Sous-variétés de $\mathbb{R}^n$

1.1 Motivation

Faire du calcul différentiel sur des sous-ensembles de $\mathbb{R}^n$ comme des surfaces, etc... Particulièrement utile pour les groupes classiques (mouvement du solide).

Au tableau, *différentiable* signifie C^k pour un $k \geq 1$, sans préciser lequel.

1.2 Définitions

Définition 1 *Redressement sur un sous-espace vectoriel.*

Exemple 2 *Exemples d'objets singuliers qui ne sont pas des sous-variétés.*

Théorème 1 Théorème des immersions. *Si $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^n$ est une immersion en $x \in \mathbb{R}^d$, alors il existe un voisinage de x dont l'image est une sous-variété de dimension d.*

Preuve Théorème d'inversion locale. ■

Exemple 3 *Paramétrage du tore de révolution.*

Théorème 2 Théorème des submersions. *Si $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n-d}$ est une submersion au-dessus de y, alors $f^{-1}(y)$ est ou bien vide, ou bien une sous-variété de dimension d de $\mathbb{R}^n$.*

Preuve Théorème d'inversion locale. ■

Exemple 4 *Equation du tore de révolution.*

Exemple 5 *Images d'immersions, injectives ou non, qui ne sont pas des sous-variétés.*

Définition 6 *Application différentiable entre sous-variétés. Difféomorphisme.*

Exemple 7 *Restriction à une sous-variété.*

Fin du cours n^{0}1

1.3 Groupes classiques

Proposition 8 *$SL_n(\mathbb{R})$, $SL_n(\mathbb{C})$, $O(n)$, $SO(n)$, $U(n)$ et $SU(n)$ sont des sous-variétés de $GL_n(\mathbb{C})$.*

Définition 9 *Fonctions holomorphes sur les ouverts de $\mathbb{C}^n$. Sous-variétés complexes de $\mathbb{C}^n$.*

Exemple 10 *$SL_n(\mathbb{C})$ est une sous-variété complexe de l'espace des matrices carrées complexes. $U(n)$ et $SU(n)$ n'en sont pas.*

1.4 Espace tangent

Définition 11 *Espace tangent en x = espace des vecteurs vitesse en x des courbes contenues dans X et passant par x. Notation T_xX.*

Proposition 12
1. *Si $X = f(U)$ est l'image d'une immersion, alors $T_{f(x)}X = \mathrm{im} d_x f$.*
2. *Si $X = f^{-1}(y)$ est une fibre d'une submersion, alors $T_xX = \ker d_x f$.*

Remarque 13 *Une sous-variété peut être redressée sur son espace tangent, par un difféomorphisme tangent à l'identité.*

Fin du cours n^{0}2

Exemple 14 *Espace tangent à la sphère, à une hypersurface définie par une équation, aux groupes classiques.*

1.5 Intersections de sous-variétés

Définition 15 *Transversalité de sous-espaces vectoriels, de sous-variétés. Codimension.*

Théorème 3 *L'intersection de deux sous-variétés transverses est une sous-variété, et les codimensions s'additionnent.*

Exemple 16 *Intersection du tore de révolution avec une famille de plans parallèles.*

2 Variétés

Remonte à Lagrange, qui remplaçait les coordonnées cartésiennes par les coordonnées action-angle en mécanique céleste. Importance des exemples obtenus comme espaces quotients.

2.1 Définitions

Définition 17 *Soit X un espace topologique. Un* atlas de classe C^r *pour X est la donnée*
- *d'un recouvrement de X par des ouverts U_i ;*
- *pour tout i, d'un homéomorphisme $\phi_i : U_i \to V_i$ ouvert de $\mathbb{R}^n$,*

tels que, pour tous i et j, $\phi_j \circ \phi_i^{-1} : \phi_i(U_i \cap U_j) \to \phi_j(U_i \cap U_j)$ est un C^r-difféomorphisme.

On appelle les ϕ_i les *cartes* de l'atlas, et les U_i les *domaines de cartes.*

Définition 18 *Deux atlas (U_i, ϕ_i) et (W_α, ψ_α) sont* compatibles *si les applications $\psi_\alpha \circ \phi_i^{-1}$ sont des C^r-difféomorphismes. Une* structure différentielle *sur X est une classe d'atlas compatibles.*

On peut alors prendre l'atlas formé de toutes les cartes compatibles avec un choix de (U_i, ϕ_i). On appelle *variété* un espace topologique muni d'une structure différentielle.

Exemple 19 *Deux structures différentielles différentes sur $\mathbb{R}$, mais difféomorphes.*

Exemple 20 *Atlas à deux cartes pour $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$.*

Fin du cours n^{0}3

2.2 L'espace projectif

Rappel 21 *Elements de perspective, projection centrale, utilisation des coordonnées homogènes.*

Définition 22 *Espace projectif* $P^n(\mathbb{R})$ = *espace des droites vectorielles de* $\mathbb{R}^{n+1}$. *Idem* $P^n(\mathbb{C})$.

Exemple 23 *Atlas à deux cartes pour la droite projective, réelle ou complexe.*

Exemple 24 *Atlas à* $n+1$ *cartes affines pour l'espace projectif, réel ou complexe.*

2.3 Objets différentiables

Définition 25 *Applications différentiables, immersions, submersions, sous-variétés, difféomorphismes.*

Exercice 26 *Vérifier que les applications projectives sont différentiables, que les sous-variétés linéaires sont des sous-variétés.*

Fin du cours n^{0}4

2.4 Grassmanniennes

Définition 27 *Définition, topologie, structure différentielle.*

2.5 Espaces quotients

Définition 28 *Soit* G *un groupe agissant continûment sur un espace topologique* X *localement compact.*

L'action est libre *si le seul élément de* G *qui possède des points fixes est l'élément neutre.*

L'action est proprement discontinue *si, pour tout compact* $K \subset X$, *l'ensemble des* $g \in G$ *tels que* $gK \cap K \neq \emptyset$ *est fini.*

Proposition 29 *Soit* G *un groupe agissant par difféomorphismes d'une variété* X. *On suppose l'action libre et proprement discontinue. Alors l'espace quotient* $G\backslash X$ *est séparé, et il existe une unique structure différentielle sur* $G\backslash X$ *qui fait de la projection* $X \to G\backslash X$ *un difféomorphisme local.*

Exemple 30 $P^n(\mathbb{R})$ *est difféomorphe au quotient de la sphère* S^n *par le sous-groupe* $\{\pm 1\}$ *du groupe orthogonal.*

Définition 31 *Revêtements.*

2.6 Fibré tangent

L'espace tangent est l'endroit où vivent les vecteurs vitesse des courbes.

Définition 32 T_xX = *classes d'équivalence de courbes de même vitesse dans une carte.*

Différentielle d'une application différentiable entre variétés, notée T_xf.

Exemple 33 *Si* A *est un sous-espace vectoriel de dimension* k *de* V, $T_A\mathcal{G}_k(V) = Hom(A, V/A)$.

Définition 34 *Fibrés vectoriels.*

Exemple 35 *Fibré vectoriel associé à une application de* X *dans la grassmannienne* $\mathcal{G}_k(V)$.

Fin du cours n^{0}5

Définition 36 *Fibrations.*

2.7 Orientation

Définition 37 *Orientation d'un espace vectoriel. Orientation d'une variété, atlas avec cartes préservant l'orientation.*

Proposition 38 *Cas des sous-variétés : orientation normale.*

Proposition 39 *Cas des espaces quotients.*

Exemple 40 *L'espace projectif $P^n(\mathbb{R})$ est orientable si et seulement si n est impair. Orientabilité de la grassmannienne $\mathcal{G}_k(V)$. Les variétés complexes viennent avec une orientation naturelle.*

Définition 41 *Revêtement des orientations.*

Fin du cours n^{0}6

Exemple 42 *Si X est orientable, $X^{or} = X \times \{\pm 1\}$. Si n est pair, le revêtement des orientations de l'espace projectif $P^n(\mathbb{R})$ est la sphère S^n.*

2.8 Champs de vecteurs

Définition 43 *Champs de vecteurs. Lignes intégrales. Transport par difféomorphisme local : $(f^*\xi)(x) = (T_x f)^{-1}(\xi(f(x)))$, et par difféomorphisme : $(f_*\xi)(y) = (T_{f(y)} f)(\xi(f^{-1}(y)))$.*

Exemple 44 *Champ de vecteurs sur $P^n(\mathbb{R})$ associé à un endomorphisme de $\mathbb{R}^{n+1}$.*

Théorème 4 *Existence locale, unicité locale des lignes intégrales maximales, theorème des bouts, dépendance par rapport à la condition initiale, équation aux variations.*

Définition 45 *Champs de vecteurs complets, flot, groupes à un paramètre de difféomorphismes.*

Exemple 46 *Champs de vecteurs linéaires et exponentielle de matrices.*

Portraits des champs de vecteurs linéaires dans le plan : cols, noeuds dégénérés et non dégénérés, soleils, foyers, centres.

Fin du cours n^{0}7

Exemple 47 *Le flot du champ de vecteur sur $P^n(\mathbb{R})$ associé à un endomorphisme L de $\mathbb{R}^{n+1}$ est le groupe à un paramètre de bijections projectives de matrices* $\exp(tL)$.

Exercice 48 *Redressement local d'un champ de vecteurs qui ne s'annule pas.*

Exercice 49 *Transitivité du groupe des difféomorphismes à support compact sur une variété connexe.*

2.9 Topologie différentielle

Cette section ne comporte que des énoncés.

Théorème 5 *Classification des variétés compactes connexes de dimension 1.*

Définition 50 *Somme connexe. Dépendance par rapport aux choix.*

Exemple 51 *Surface orientable $T_g = (T^2)^{\#g}$, $g \in \mathbb{N}$ ($T_0 = S^2$). Surface non orientable $U_g = (P^2(\mathbb{R}))^{\#(g+1)}$, $g \in \mathbb{N}$ ($U_0 = P^2(\mathbb{R})$).*

Théorème 6 *Classification des variétés compactes connexes de dimension 2.*

Fin du cours n^{0}8

2.10 Feuilletages

Définition 52 *Dérivations sur l'algèbre des fonctions de classe C^∞ sur une variété de classe C^∞.*

Proposition 53 *Expression d'une dérivation en coordonnées. Lien entre dérivations et champs de vecteurs. Dérivée de Lie, notation $\mathcal{L}_\xi f$.*

Définition 54 *Crochet de deux champs de vecteurs. Identité de Jacobi. Dérivée de Lie, notation $\mathcal{L}_\xi \eta$. Identité de Jacobi vue comme $\mathcal{L}_\zeta[\xi,\eta] = [\mathcal{L}_\zeta \xi, \eta] + [\xi, \mathcal{L}_\zeta \eta]$.*

Fin du cours n^{0}9

Exercice 55 *Champs de vecteurs de crochets nuls $\Leftrightarrow$ flots commutants. Redressement local simultané de champs de vecteurs.*

Définition 56 *Champs de plans. Feuilletages.*

Exemple 57 *Flot linéaire sur le tore. Champ de plan de contact dans $\mathbb{R}^3$.*

Théorème 7 *Condition suffisante d'existence de sous-variétés intégrales (Frobenius).*

Fin du cours n^{0}10

3 Groupes de Lie

On s'intéresse surtout aux groupes classiques. Mais maintes propriétés dépendent seulement du fait qu'il s'agit de variétés avec des opérations différentiables.

3.1 Définition

Définition 58 *Groupes topologiques, groupes de Lie, sous-groupes de Lie. Translations.*

Exemple 59 *Sous-groupes ouverts, composante neutre. Noyaux d'homomorphismes. Les sous-groupes de Lie sont fermés.*

Attention, l'image d'un homomorphisme n'est pas toujours un sous-groupe de Lie. Exemple : sous-groupe à un paramètre dans un tore.

Définition 60 *Action différentiable d'un groupe de Lie sur une variété.*

Proposition 61 *Le stabilisateur d'un point est un sous-groupe de Lie.*

Exemple 62 *Groupes classiques : groupes orthogonaux, unitaires, groupe symplectique.*

3.2 Algèbres de Lie

Définition 63 *Algèbres de Lie, sous-algèbres, homomorphismes.*

Exemple 64 *Algèbre de Lie des champs vecteurs C^∞ sur une variété. Structure d'algèbre de Lie sur une algèbre associative. $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{R})$. Sous-algèbres classiques de $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{R})$.*

3.3 Algèbre de Lie d'un groupe de Lie

Définition 65 *L'algèbre de Lie de G, c'est les champs de vecteurs invariants à gauche sur G. S'identifie à T_eG, via $v \mapsto \xi_v$.*

Fin du cours $n^0 11$

Exemple 66 *Champs de vecteurs invariants sur $U(1)$, sur $Gl_n(\mathbb{R})$.*

Définition 67 *Action adjointe de G sur T_eG, $Ad : G \to GL(T_eG)$. Sa différentielle $ad : T_eG \to End(T_eG)$.*

Proposition 68 *Pour tous v, w, $z \in \mathfrak{g}$, $[v, w] = ad_v(w)$, $ad_z[v, w] = [ad_z v, w] + [v, ad_z w]$.*

Preuve Le flot d'un champ de vecteurs invariant à gauche $\xi_v \in \mathfrak{g}$, c'est un groupe à un paramètre de translations à droite par des éléments $\phi(t)$, $t \in \mathbb{R}$. ■

Proposition 69 *Si $f : G \to G'$ est homomorphisme de groupes de Lie, alors $T_e f : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}'$ est un homomorphisme d'algèbres de Lie. H sous-groupe de Lie de $G \Rightarrow \mathfrak{h}$ sous-algèbre de Lie de $\mathfrak{g}$.*

Exemple 70 *Algèbres de Lie des groupes orthogonaux $O(n)$, $O(p, q)$, $SO(p, q)$, des groupes unitaires $U(n)$, $U(p, q)$, $SU(p, q)$, du groupe symplectique $Sp_n(\mathbb{R})$.*

3.4 Exponentielle

Définition 71 *On pose* $\exp(v) = \phi(1) \in G$, *où $t \mapsto \phi(t)$ est le sous-groupe à un paramètre de G tel que $R_{\phi(t)}$ est le flot de ξ_v.*

Fin du cours $n^0 12$

Proposition 72 *Si $[v, w] = 0$,* $\exp(v + w) = \exp(v)\exp(w)$.

Proposition 73 *Naturalité sous les homomorphismes de groupes de Lie. Exemples : Ad, déterminant.*

3.5 Sous-groupes de Lie immergés

Théorème 8 *Soit G un groupe de Lie d'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$. Soit $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ une sous-algèbre de Lie. Alors il existe un groupe de Lie H et un homomorphisme de groupes de Lie injectif $i : H \to G$ tel que $T_e i : T_e H \to \mathfrak{h}$ soit un isomorphisme d'algèbres de Lie. La paire (H, i) est unique à unique isomorphisme près. On l'appelle* sous-groupe de Lie immergé *d'algèbre de Lie $\mathfrak{h}$.*

Preuve Frobenius. $\mathfrak{h}$ engendre un champ de plans invariant à gauche sur G. Il est tangent à un feuilletage. La feuille passant par l'élément neutre est un sous-groupe de G. Pour la topologie des feuilles, c'est un groupe de Lie. ■

Fin du cours $n^0 13$

Théorème 9 (E. Cartan). *Tout sous-groupe fermé d'un groupe de Lie est un sous-groupe de Lie.*

Preuve $\mathfrak{h} = \{v \in \mathfrak{g}\,;\, \forall t,\, \exp(tv) \in H\}$ est un sous-espace vectoriel, car

$$\exp(v+w) = \lim_{n\to\infty} (\exp(v/n)\exp(w/n))^{1/n}.$$

C'est une sous-algèbre de Lie, car $e^{ad_v} = Ad_{\exp(v)}$ préserve $\mathfrak{h}$. Soit H' le sous-groupe immergé correspondant. Alors $H' \subset H$, car $\exp(\mathfrak{h}) \subset H$ et H', qui est connexe, est engendré par $\exp(\mathfrak{h})$. H coïncide avec H' au voisinage de e (sinon, les composantes transverses à H' des éléments de $H \setminus H'$, une fois normalisées, convergeraient vers des éléments de $\mathfrak{h}$ transverses à $\mathfrak{h}$), donc c'est une sous-variété au voisinage de e, donc partout. ■

3.6 Groupes de Lie et revêtements

Proposition 74 *La composante neutre G_0 est un sous-groupe ouvert et distingué. Le groupe quotient G/G_0 est discret.*

Exemple 75 *$SL_n(\mathbb{R})$, $SO(n)$, $GL_n(\mathbb{C})$, $SL_n(\mathbb{C})$, $U(n)$, $SU(n)$, $U(p,q)$, $SU(p,q)$, $Sp_n(\mathbb{R})$ sont connexes, $GL_n(\mathbb{R})$, $O(n)$, $O(p,q)$, $SO(p,q)$ ne le sont pas.*

Définition 76 *Espaces simplement connexes, contractiles.*

Exemple 77 *Convexe $\Rightarrow$ contractile $\Rightarrow$ simplement connexe.*

Fin du cours n^{0}14

Définition 78 *Rétraction par déformation.*

Proposition 79 *Si Y est un rétracte par déformation de X, Y est simplement connexe si et seulement si X l'est.*

Proposition 80 *$X = U \cup V$ où U et V sont des ouverts simplement connexes, $U \cap V$ connexe par arcs $\Rightarrow$ X est simplement connexe.*

Exemple 81 *Simple connexité des sphères, des espaces projectifs complexes.*

Théorème 10 *Relèvement d'une application $f : Y \to X$ à $\tilde{f} : Y \to E$ quand $p : E \to X$ est un revêtement et Y est simplement connexe et localement connexe par arcs.*

Fin du cours n^{0}15

Théorème 11 *Si X est une variété, X possède un revêtement simplement connexe, unique à isomorphisme près. On l'appelle le* revêtement universel *$\tilde{X}$ de X. X est le quotient de $\tilde{X}$ par une action différentiable, proprement discontinue et libre, celle du groupe des automorphismes du revêtement.*

Exemple 82 *Revêtement universel du cercle, du tore, de l'espace projectif réel.*

Proposition 83 *Les groupes quotients par des sous-groupes distingués discrets sont des groupes de Lie.*

Exemple 84 *$PSL_n(\mathbb{R})$.*

Proposition 85 *Existence et unicité, à unique isomorphisme près, du revêtement universel d'un groupe de Lie. Le noyau de $p : \tilde{G} \to G$ est discret, central. Relèvement unique des homomorphismes provenant de groupes de Lie simplement connexes. Les automorphismes du revêtement $p : \tilde{G} \to G$ sont exactement les translations par les éléments du noyau.*

Exemple 86 *Le revêtement universel $\tilde{G}$ de $G = PSL_2(\mathbb{R})$ a un centre Γ cyclique, et $G = \tilde{G}/\Gamma$. En revanche, $SL_2(\mathbb{R}) = \tilde{G}/2\Gamma$.*

3.7 Groupes de Lie simplement connexes et algèbres de Lie

Théorème 12 *Si G et G' sont des groupes de Lie, et si G est simplement connexes, tout homomorphisme d'algèbres de Lie $\mathfrak{f} : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}'$ s'intègre en un unique homomorphisme de groupes de Lie $f : G \to G'$.*

Preuve Le graphe de $\mathfrak{f}$ est une sous-algèbre de Lie de $\mathfrak{g} \times \mathfrak{g}'$. Soit M le sous-groupe de Lie immergé de $G \times G'$ correspondant. La "restriction" à M de la projection sur G est un homomorphisme de groupes de Lie qui est un difféomorphisme local, donc c'est un revêtement, donc c'est un isomorphisme, car G est simplement connexe. Donc M est le graphe d'une homomorphisme, et c'est le seul. ∎

Théorème 13 (I. G. Ado, 1935). *Toute algèbre de Lie réelle de dimension finie est isomorphe à une sous-algèbre d'une algèbre de matrices $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{R})$.* Admis.

Corollaire 87 *Dictionnaire entre groupes de Lie simplement connexes (et leurs homomorphismes) et algèbres de Lie de dimension finie (et leurs homomorphismes).*

Fin du cours n^{0}16

3.8 Actions différentiables de groupes de Lie

Définition 88 *Action différentiable, transitive. Stabilisateur, orbite, espace des orbites.*

Théorème 14 *Quotient d'un groupe de Lie G par un sous-groupe de Lie H : G/H est une variété séparée, $G \to G/H$ une fibration G-équivariante de fibre H. $T_{eH}G/H = (T_eG)/T_eH$. Les fonctions C^∞ de G/H dans une variété X sont les fonctions C^∞ H-invariantes sur G.*

Preuve $\pi : G \to G/H$ est ouverte. H fermé $\Rightarrow$ G/H est séparé. T_eH engendre un feuilletage dont les feuilles sont les orbites de H_0 = composante neutre de H. Les transversales donnent des cartes de l'espace quotient et des trivialisations locales de la fibration π. ∎

Corollaire 89 *Si un groupe de Lie G agit différentiablement et transtivement sur une variété X, alors X est difféomorphe à G/H où H est le stabilisateur d'un point.*

Exemple 90 *La sphère $S^n = O(n+1)/O(n) = SO(n+1)/SO(n)$. L'espace projectif $P^n(\mathbb{R}) = O(n+1)/O(1) \times O(n) = SO(n+1)/O(n)$.*

Exemple 91 *La grassmannienne $\mathcal{G}_k(\mathbb{R}^n) = GL_n(\mathbb{R})/H = O(n)/O(k) \times O(n-k)$ où $H = \{\begin{pmatrix} A & B \\ 0 & D \end{pmatrix}\}$ est le stabilisateur de $\mathbb{R}^k \subset \mathbb{R}^n$ dans $GL_n(\mathbb{R})$.*

L'espace $\mathcal{P}^{p,q}$ des p-plans positifs de $\mathbb{R}^{p,q} = \mathbb{R}^{p+q}$ muni de la forme quadratique de matrice $I_{p,q} = \begin{pmatrix} I_p & \\ 0 & -I_q \end{pmatrix}$ est $O(p,q)/O(p) \times O(q)$.

Corollaire 92 *$O(p,q)$ a exactement 4 composantes connexes.*

Preuve $\mathcal{P}^{p,q}$ s'identifie à l'espace des matrices $q \times p$ A telles que $\| A \| < 1$, c'est convexe, donc connexe. ∎

Fin du cours n^{0}17

Exemple 93 *Le demi-plan supérieur $\mathcal{H} = \{z \in \mathbb{C} \,|\, \Im m(z) > 0\}$. Le groupe $SL_2(\mathbb{R})$ agit transitivement par homographies, $(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, z) \mapsto \frac{az+b}{cz+d}$. $\mathcal{H} = SL_2(\mathbb{R})/SO(2) = PSL_2(\mathbb{R})/PO(2)$.*

4 Formes différentielles

4.1 Motivation

Il s'agit de rendre rigoureux un formalisme mnémotechnique.

1. Substitution des formes différentielles de degré 1 aux champs de vecteurs, pour le calcul des circulations par changement de variables.
2. Dans la formule de Green-Riemann apparaît $d\alpha$, expression qui se calcule avec les règles $d(f\,dx) = df\,dx$, $dx\,dx = 0$, $dx\,dy = -dy\,dx$.
3. Dans la formule de changement de variable dans les intégrales multiples apparaît le déterminant de la différentielle. Or le déterminant est relié à l'action des endomorphismes sur les n-formes différentielles alternées.

Cela suggère d'utiliser les formes multilinéaires alternées, comme généralisation des formes différentielles de degré 1.

4.2 Algèbre extérieure

Définition 94 *Formes alternées sur un espace vectoriel E, notation $\Lambda^{\cdot} E^*$, transport par applications linéaires, notation $\Lambda^{\cdot} L$. Si L est un endomorphisme, $\Lambda^n L = \det(L)$. Produit tensoriel, produit extérieur de formes alternées. Formule*

$$(a \wedge b)(v_1, \ldots, v_{p+q}) = \sum_{\textit{permut. partiellem. croissantes } \sigma} (-1)^{\sigma} a(v_{\sigma(1)}, \ldots, v_{\sigma(p)}) b(v_{\sigma(p+1)}, \ldots, v_{\sigma(p+q)}).$$

Proposition 95 *Associativité, commutativité graduée, naturalité sous les applications linéaires.*

Proposition 96 *Base de l'algèbre extérieure. Déterminant dans une base comme produit extérieur.*

Définition 97 *Produit intérieur. Formule $\iota_v(a \wedge b) = \iota_v(a) \wedge b + (-1)^{\deg(a)} a \wedge \iota_v(b)$.*

Fin du cours n^{0}18

4.3 Formes différentielles

Définition 98 *Cas des ouverts de $\mathbb{R}^n$. Ecriture $\omega = \sum_{I \in \mathcal{I}_n} \omega_I \, dx_I$. Exemple : différentielle d'une fonction. Transport par applications différentiables.*

Exemple 99 *Si $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$, $f = (f_1, \ldots, f_p)$, alors la formule $f^*(\sum_{J \in \mathcal{I}_p} \omega_J \, dy_J) = \sum_{J \in \mathcal{I}_p} \omega_J \circ f \, df_J$ s'applique mécaniquement (coordonnées polaires). Cas des formes de degré maximum.*

Définition 100 *Cas général des variétés. Fibré des formes alternées $\Lambda^{\cdot} T^* X$. Ses sections sont les formes différentielles. C'est une algèbre graduée associative, commutative. Transport par applications différentiables.*

4.4 Différentielle extérieure

Théorème 15 *Il existe un unique prolongement d de la différentielle des fonctions à toutes les formes différentielles, qui satisfasse*

- $d(a \wedge b) = da \wedge b + (-1)^{\deg(a)} a \wedge db$.
- $d \circ d = 0$.

Il est de plus naturel sous les applications suffisamment différentiables.

Preuve Unicité facile. Existence résulte de la formule

$$(d\omega)_x(v_1,\dots,v_{p+1})=\sum_{i=1}^{p+1}(-1)^{p+1}T_x\omega(v_i)(v_1,\dots,\widehat{v_i},\dots,v_{p+1}).$$

En effet, cette expression satisfait $d(f\,dx_I)=df\wedge dx_I$. Puis vient le produit, puis $d\circ d$, puis le transport. ∎

Exemple 101 *Le calcul est mécanique, à partir des axiomes.*

4.5 Dérivée de Lie

Théorème 16 *Il existe un unique prolongement $\mathcal{L}_\xi$ de la dérivée de Lie des fonctions le long des champs de vecteurs à toutes les formes différentielles, qui satisfasse*

- $\mathcal{L}_\xi(a\wedge b)=\mathcal{L}_\xi a\wedge b+a\wedge\mathcal{L}_\xi b$.
- $\mathcal{L}_\xi\circ d=d\circ\mathcal{L}_\xi$.

Il satisfait de plus

- *Naturalité sous les difféomorphismes locaux :* $\mathcal{L}_{\phi^*\xi}\phi^*\omega=\phi^*(\mathcal{L}_\xi\omega)$.
- *Formule de Cartan :* $\mathcal{L}_\xi=d\circ\iota_\xi+\iota_\xi\circ d$.
- $\mathcal{L}_\xi\omega=\frac{d}{dt}\phi_t^*\omega_{|t=0}$, *où* ϕ_t *est le flot local de* ξ.
- $\mathcal{L}_{[\xi,\eta]}=[\mathcal{L}_\xi,\mathcal{L}_\eta]$.

Fin du cours n^{0}19

Preuve Existence résulte de la formule de Cartan. ∎

4.6 Intégration

Définition 102 *Cas des ouverts de $\mathbb{R}^n$. Une n-forme différentielle sur un ouvert U de $\mathbb{R}^n$ s'écrit $\omega=u\,dx_1\wedge\cdots\wedge dx_n$. Si B est un borélien de U, on pose*

$$\int_B\omega=\int_B u\,dx_1\,\dots\,dx_n.$$

Proposition 103 *Formule de changement de variable. Soit $\phi:U\to V$ un difféomorphisme, soit B est un borélien de U, soit ω une n-forme différentielle sur V. Alors*

$$\int_{\phi(B)}\omega=\mathrm{signe}(T\phi)\int_B\phi^*\omega.$$

Noter que l'intégration n'est pas invariante par changement de coordonnées, seulement par changement de coordonnées *préservant l'orientation.*

Définition 104 *Cas des variétés orientées. Soit X une variété orientée. Soit ω une n-forme différentielle sur X à support compact. Soient $\phi_i:U_i\to V_i\subset\mathbb{R}^n$ des cartes orientées. Soient $B_i\subset U_i$ des boréliens qui partitionnent X. On pose*

$$\int_X\omega=\sum_i\int_{\phi_i(B_i)}(\phi_i^{-1})^*\omega.$$

Le résultat ne dépend pas des choix.

Plus généralement, on définit l'intégration le long d'une courbe une d'une nappe paramétrée. Si X est une variété orientée de dimension d, si $f:X\to Y$ est lisse, si ω est une d-forme différentielle sur Y, on note abusivement

$$\int_{f(X)}\omega=\int_X f^*\omega.$$

4.7 La formule de Stokes

Définition 105 *Soit X une variété orientée. Un sous-ensemble $N \subset X$ est un* domaine à bord lisse *si, au voisinage de chaque point du bord de N, il existe une carte de X qui envoie N sur un demi-espace fermé. Noter que le bord ∂N est une sous-variété orientée (par la normale sortante).*

Théorème 17 *Soit X une variété orientée. Soit $N \subset X$ un domaine à bord lisse. Soit ω une $n-1$-forme différentielle sur X à support compact. Alors*

$$\int_{\partial N} \omega = \int_N d\omega.$$

En particulier, si X est compacte orientée, pour toute $n-1$-forme différentielle ω sur X

$$\int_X d\omega = 0.$$

Preuve Partition de l'unité $\Rightarrow$ il suffit de le faire pour une forme à support compact dans le demi-espace $\{x_1 \leq 0\}$ de $\mathbb{R}^n$. La normale sortante est e_1. $(e_2, \ldots, e_n)$ est une base directe de TN.

$$\omega = \sum_{i=1}^{n} \omega_i dx_1 \wedge \cdots \wedge \widehat{dx_i} \wedge \cdots \wedge dx_n \quad \Rightarrow \quad d\omega = (\sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} \frac{\partial \omega_i}{\partial x_i})\, dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n,$$

$$\begin{aligned}
\int_{\partial N} \omega &= \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \omega_1\, dx_2 \ldots dx_n = \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \int_{-\infty}^{0} \frac{\partial \omega_1}{\partial x_1}\, dx_1\, dx_2 \ldots dx_n \\
&= \int_N d\omega - \sum_{i=2}^{n} (-1)^{i+1} \int_{\mathbb{R}^{n-2}} \int_{-\infty}^{0} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial \omega_i}{\partial x_i} dx_i\, dx_1 \ldots \widehat{dx_i} \ldots dx_n \\
&= \int_N d\omega.
\end{aligned}$$

■

4.8 Analyse vectorielle

On se place dans $E = \mathbb{R}^3$ euclidien orienté. On note det le déterminant dans une base orthonormée directe (parfois appelé *produit mixte*). On dispose alors de trois isomorphismes

1. $E \mapsto E^*$, $v \mapsto \alpha_v : w \mapsto v \cdot w$.
2. $E \mapsto \Lambda^2 E^*$, $v \mapsto \omega_v = \iota_v \det$.
3. $\mathbb{R} \mapsto \Lambda^3 E^*$, $\lambda \mapsto \lambda \det$.

Les 1-formes différentielles s'identifient à des champs de vecteurs, les 2-formes différentielles s'identifient à des champs de vecteurs (les physiciens parlent de *pseudo-vecteurs*) et les 3-formes différentielles s'identifient à des fonctions.

Proposition 106 *A travers ces isomorphismes,*

1. *la circulation d'un champ de vecteurs ξ le long d'une courbe γ est égale à $\int_\gamma \alpha_\xi$,*
2. *le flux d'un champ de vecteurs ξ à travers une surface S est égal à $\int_S \omega_\xi$,*
3. *l'intégrale d'une fonction u sur un domaine N est égale à $\int_N u \det$.*

d définit trois opérateurs différentiels du premier ordre,

1. *le gradient des fonctions ∇,*
2. *le rotationnel des champs de vecteurs $\nabla\wedge$,*
3. *la divergence des champs de vecteurs $\nabla\cdot$.*

L'identité $d \circ d = 0$ se traduit par $\nabla \wedge \nabla = 0$, $\nabla \cdot \nabla \wedge = 0$. Le produit extérieur est relié au produit vectoriel par la formule $\omega_{(v \wedge w)} = \alpha_v \wedge \alpha_w$. La formule de Stokes se traduit par

1. *variation de u entre les extrémités de γ = circulation de ∇u le long de γ,*
2. *circulation de ξ le long de ∂S = flux de $\nabla \wedge \xi$ à travers S,*
3. *flux de ξ à travers ∂N = intégrale de $\nabla \cdot \xi$ sur N.*

5 Cohomologie de de Rham

5.1 Motivation

Définition 107 *Formes exactes, formes fermées.*

Dans $\mathbb{R}^n$, une forme fermée est automatiquement exacte. Si, dans une variété, ce n'est pas vrai, on a détecté un phénomène global.

Définition 108 *Cohomologie = formes fermées/formes exactes. Structure d'algèbre. Naturalité sous les applications différentiables.*

Exemple 109 $H^0(X) = \mathbb{R}^{\pi_0(X)}$. *$f : X \to Y$ constante $\Rightarrow$ f^* est injective sur H^0, nul sur les H^i, $i > 0$.*

Exemple 110 $H^0(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$. $H^i(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$, $i > 0$.

Fin du cours n^{0}20

5.2 Produits

Proposition 111 *Soit X une variété. L'application $i_t : X \to X \times \{t\} \to X \times \mathbb{R}$ induit un homomorphisme en cohomologie qui ne dépend pas de t.*

Preuve On note $\xi = \frac{\partial}{\partial t}$, $\phi_s(x,t) = (x, t+s)$ et on pose

$$K\omega = \int_0^1 (\phi_s^* \iota_\xi \omega)\, ds.$$

Alors $dK + Kd = \phi_1^* - \phi_0^*$. Lien avec la formule de Cartan pour la dérivée de Lie. ■

5.3 Invariance par homotopie

Rappel 112 *Soient X, Y des espaces topologiques. Deux applications continues f_0, $f_1 : X \to Y$ sont homotopes si ce sont les restrictions à $X \times \{0\}$ et $X \times \{1\}$ d'une application continue $f : X \times [0,1] \to Y$.*

Théorème 18 *Soient, X, Y des variétés. Soient f_0, $f_1 : X \to Y$ des applications différentiables homotopes. Alors f_0 et f_1 définissent le même homomorphisme en cohomologie.*

Preuve 1. Cas où f_0 et f_1 sont différentiablement homotopes, i.e. il existe une homotopie différentiable $f : X \times \mathbb{R} \to Y$. Alors $f_t = f \circ i_t$, d'où $f_0^* = i_0^* \circ f^* = i_1^* \circ f^* = f_1^*$.

2. Lemme : *Deux applications différentiables suffisamment proches sont différentiablement homotopes.* ■

Définition 113 *f^* pour f continue.*

Corollaire 114 *Une équivalence d'homotopie induit un isomorphisme (d'algèbres) en cohomologie. En particulier, une rétraction par déformation induit un isomorphisme en cohomologie.*

Exemple 115 *X contractile $\Rightarrow$ $H^{\cdot}(X) = H^0(X) = \mathbb{R}$. En particulier (Lemme de Poincaré), toute forme différentielle fermée sur un ouvert étoilé de $\mathbb{R}^n$ est exacte (sauf en degré 0).*

Exemple 116 *L'espace total d'un fibré vectoriel a même cohomologie que la base. $\mathbb{C}^*$ et le ruban de Möbius ont même cohomologie que S^1. $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ que S^{n-1}.*

5.4 Suite exacte de Mayer-Vietoris

Définition 117 *Une suite d'espaces vectoriels et d'applications linéaires* $\cdots \to E_i \xrightarrow{f_i} E_{i+1} \to \cdots$ *est* exacte *si pour tout* i, $\ker(f_{i+1}) = \mathrm{im}(f_i)$.

Théorème 19 *Soit* $X = U \cup V$ *une variété, réunion de deux ouverts. Alors il existe une suite exacte longue*

$$\cdots \to H^{k-1}(U \cap V) \xrightarrow{\delta} H^k(X) \to H^k(U) \times H^k(V) \to H^k(U \cap V) \xrightarrow{\delta} H^{k+1}(X) \to \cdots,$$

où les flèches sont $(i_U^*, i_V^*) : H^k(X) \to H^k(U) \times H^k(V)$ *et* $i_U^* - i_V^* : H^k(U) \times H^k(V) \to H^k(U \cap V)$.

De plus, cette suite est fonctorielle : si $f : X \to X'$ *est continue,* $X' = U' \cup V'$ *et* $f(U) \subset U'$, $f(V) \subset V'$, *alors* f *induit un diagramme commutatif.*

Fin du cours n^{0}21

Preuve 1. La suite $0 \to \Omega^k(X) \to \Omega^k(U) \times \Omega^k(V) \to \Omega^k(U \cap V) \to 0$ est exacte.

2. Le reste (construction de δ, indépendance des choix, exactitude) en résulte mécaniquement. ■

Corollaire 118 *Si* X *est une variété compacte,* $H^{\cdot}(X)$ *est de dimension finie.*

Preuve On a besoin d'un recouvrement ouvert de X tel que toutes les intersections soient contractiles. ■

5.5 Caractéristique d'Euler

Définition 119 *Si* $\dim(H^{\cdot}(X)) < +\infty$, *on pose* $\chi(X) = \sum_{i=0}^{n} (-1)^k \dim(H^k(X))$.

Lemme 120 *Soit* $0 \to E_0 \to \cdots \to E_k \to 0$ *une suite exacte d'espaces vectoriels. Alors*

$$\sum_{i=0}^{k} (-1)^i \dim(E_i) = 0.$$

Proposition 121 X *recouverte par deux ouverts* U *et* $V \Rightarrow \chi(X) = \chi(U) + \chi(V) - \chi(U \cap V)$.

Exemple 122 $\chi(S^n) = 1 + (-1)^n$. $\chi($*tore troué*$) = -1$, $\chi(T_g) = 2 - 2g$.

Corollaire 123 *Les surfaces compactes orientables* T_g *sont deux à deux non homéomorphes.*

5.6 Cohomologie des sphères

Proposition 124

$$\dim(H^p(S^n)) = \begin{cases} 2 & si\ 0 = p = n, \\ 1 & si\ 0 = p < n, \\ 0 & si\ 0 < p < n, \\ 1 & si\ 0 < p = n, \\ 0 & si\ p > n. \end{cases}$$

En particulier, si $n \geq 1$, *l'intégration des* n*-formes différentielles définit un isomorphisme* $H^n(S^n) \to \mathbb{R}$.

Corollaire 125 *Il n'existe pas de rétraction* $B^n \to S^{n-1}$.

Corollaire 126 (Brouwer). *Toute application continue* $B^n \to B^n$ *possède un point fixe.*

Fin du cours n^{0}22

5.7 Cohomologie des tores

Rappel 127 *Transformation de Fourier sur $\mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$. Cas des formes différentielles.*

Proposition 128 *$[\omega] \mapsto \hat{\omega}_0$, $H^{\cdot}(\mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n) \to \Lambda^{\cdot}(\mathbb{R}^n)^*$ est un isomorphisme d'algèbres.*

Preuve 1. En Fourier, $\omega(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} e^{2i\pi\langle k,x\rangle}\hat{\omega}_k$ où les $\hat{\omega}_k$ sont des formes différentielles à coefficients constants. Alors

$$d\omega = 2i\pi \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} e^{2i\pi\langle k,x\rangle}\check{k} \wedge \hat{\omega}_k,$$

où $\check{k} = \sum_{i=1}^n k_i dx_i$.
2. Si $k \neq 0$, $\ker(\check{k} \wedge \cdot) = \mathrm{im}(\check{k} \wedge \cdot)$. ■

5.8 Dualité de Poincaré

Définition 129 *Cohomologie de de Rham à supports compacts.*

Proposition 130 (Suite exacte de Mayer-Vietoris à supports compacts). *Si $X = U \cup V$,*

$$\cdots \to H_c^{k-1}(X) \xrightarrow{\delta} H_c^k(U \cap V) \to H_c^k(U) \times H_c^k(V) \to H_c^k(X) \xrightarrow{\delta} H^{k+1}(U \cap V) \to \cdots,$$

Lemme 131

$$\dim(H_c^p(R^n)) = \begin{cases} 1 & si\ 0 = p = n, \\ 0 & si\ 0 < p \neq n, \\ 1 & si\ 0 < p = n. \end{cases}$$

En particulier, l'intégration des n-formes donne un isomorphisme $H_c^n(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}$.

Preuve Soit $k \geq 1$, soit ω une k-forme fermée à support compact sur $\mathbb{R}^n$. Si $k = n$, on suppose que $\int_{\mathbb{R}^n} \omega = 0$. Alors ω se prolonge à S^n en une forme exacte, $\omega = d\alpha$. Si $k = 1$, on peut supposer que α est nulle au voisinage de ∞. Sinon, comme $d\alpha = 0$ au voisinage de ∞, il existe β tel que $\alpha = d\beta$ au voisinage de ∞. Soit γ définie sur S^n telle que $\gamma = \beta$ au voisinage de ∞. Alors $\omega = d(\alpha - d\gamma)$, et $\alpha - d\gamma$ est à support compact sur $\mathbb{R}^n$. ■

Théorème 20 (Dualité de Poincaré). *Soit X une variété compacte orientable, de dimension $n \geq 1$. Alors*

$$H^k(X) \to (H^{n-k}(X))^*, \quad [\alpha] \mapsto ([\beta] \mapsto \int_X \alpha \wedge \beta)$$

est un isomorphisme d'espaces vectoriels.

Fin du cours $n^0 23$

Preuve On montre mieux, que si X est une variété qui admet un recouvrement ouvert *fini* dont toutes les intersections sont contractiles, alors

$$H^k(X) \to (H_c^{n-k}(X))^*, \quad [\alpha] \mapsto ([\beta] \mapsto \int_X \alpha \wedge \beta)$$

est un isomorphisme. A partir du cas de $\mathbb{R}^n$, par récurrence sur le nombre d'ouverts. Mayer-Vietoris et lemme des 5. ■

Corollaire 132 *Si X est connexe, l'intégration des n-formes donne un isomorphisme $H^n(X) \to \mathbb{R}$.*

Proposition 133 *Si X est une variété compacte non orientable, $H^n(X) = 0$.*

Preuve Soit $p : X^{or} \to X$ le revêtement des orientations et $a : X \to X$ son automorphisme. Par la formule de changement de variable, $a^* = -id_{H^n(X)}$. D'ou $p^* = (p \circ a)^* = a^* \circ p^* = -p^*$, i.e. $p^* = 0$. Si ω est une n-forme sur X, $p^*\omega = d\alpha$, soit $\beta = \frac{1}{2}(\alpha + p^*\alpha)$. Alors $a^*\beta = \beta$, donc $\beta = p^*\gamma$, et $d\gamma = \alpha$. ■

5.9 Théorie du degré

Définition 134 *X, Y variétés compactes connexes orientées de même dimension $n \geq 1$. Si $f : X \to Y$, sur H^n, $\int_X f^* \cdot = \deg(f) \int_Y \cdot$.*

Proposition 135
- deg *dépend des orientations choisies sur X et Y.*
- *f constante $\Rightarrow \deg(f) = 0$.*
- *f difféomorphisme $\Rightarrow \deg(f) = \pm 1$, et $\deg(f) = 1 \Leftrightarrow f$ préserve l'orientation.*
- *Etant données $f_i : X_i \to Y_i$, on peut construire $f_1 \# f_2 : X_1 \# X_2 \to Y_1 \# Y_2$ de sorte que $\deg(f_1 \# f_2) = \deg(f_1) + \deg(f_2)$.*
- *Deux applications homotopes ont même degré.*
- $\deg(g \circ f) = \deg(f) \deg(g)$.

Théorème 21 *Soient X, Y variétés compactes connexes orientées de même dimension $n \geq 1$. Soit $f : X \to Y$ une application différentiable. Si $y \in Y$ est une valeur régulière de f, alors*

$$\deg(f) = \sum_{x \in f^{-1}(y)} \mathrm{signe}(f, x),$$

où $\mathrm{signe}(f, x) = 1$ si $T_x f$ préserve l'orientation, $= -1$ sinon.

Preuve Formule de changement de variable. ■

Théorème 22 (Sard). *Si f est de classe C^∞, l'ensemble des valeurs non régulières de f est de mesure nulle.*

Corollaire 136
- *Le degré prend des valeurs entières.*
- *Si f est un revêtement à d feuillets, $\deg(f) = \pm d$.*
- *Si $\deg(f) \neq 0$, f est surjective.*
- *Si $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ est continue et vaut l'identité hors d'un compact, alors f est surjective.*

Exemple 137 *Applications du cercle dans lui-même : degré et relèvement. Indice des lacets dans le plan. Interprétation en termes d'intersection avec une demi-droite.*

Définition 138 *Soit X une variété compacte connexe orientée de dimension $n-1$. Soit $f : X \to \mathbb{R}^n$ une application continue ne passant par le point p. Alors le degré de l'application $x \mapsto (f(x) - p)/|f(x) - p|$, $X \to S^{n-1}$, s'appelle l'*indice *de f par rapport à p.*

Proposition 139 *Soit X une variété orientée de dimension n et N un domaine compact à bord lisse et connexe de X. Soit $f : X \to \mathbb{R}^n$ une application différentiable. Soit $p \in \mathbb{R}^n$ une valeur régulière de f. On suppose que $y \notin f(\partial N)$. Alors l'indice de $f_{|\partial N}$ est égal à $\sum_{x \in N \cap f^{-1}(p)} \mathrm{signe}(f, x)$.*

Fin du cours $n^0 24$