# Géométrie et perspective

Pierre Pansu

February 14, 2004

## 1 Géométrie affine

On met des flèches sur les vecteurs, pour bien distinguer les points des vecteurs.

### 1.1 Points et vecteurs

Dans $\mathbf{R}^n$ rapporté au repère $(O, \vec{e_1}, \ldots, \vec{e_n})$, un point $p$ est représenté par la colonne de ses coordonnées

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

qui sont les composantes du vecteur $\vec{Op}$. Si $p$ et $q$ sont des points, $\vec{v}$ un vecteur de composantes $V$, $a$ un réel, on note $q - p = \vec{pq}$, $r = p + v$ le point tel que $\vec{pr} = \vec{v}$, $ap + (1-a)q$ le barycentre de $(p, a)$ et $(q, (1-a))$. La notation est justifiée par les calculs en coordonnées : si $X$ (resp. $Y$, resp. $V$) est la colonne des coordonnées de $p$ (resp. $q$, resp. des composantes de $\vec{v}$) dans un repère, alors la colonne des coordonnées de $\vec{pq}$ est $Y - X$, celle de $r$ est $X + V$, celle de $ap + (1-a)q$ est $aX + (1-a)Y$.

Autrement dit, la différence de deux points est un vecteur, le barycentre de deux points est un point, on peut ajouter un vecteur et un point. Attention, on n'ajoute pas deux points.

### 1.2 Notation matricielle des applications affines

**Définition 1.1** *Une application $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ est* affine *s'il existe une application linéaire $L : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ telle que pour tous points $p$, $q$ de $\mathbf{R}^n$,*

$$f(q) = f(p) + L(\vec{pq}).$$

*L'endomorphisme $L$ s'appelle l'*application linéaire tangente *à $f$.*

*Soit $(O, \vec{e_1}, \ldots, \vec{e_n})$ un repère de $\mathbf{R}^n$. La* matrice *de $f$ dans ce repère est*

$$M_f = \begin{pmatrix} M_L & \vec{Of(O)} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

*où $M_L$ désigne la matrice de $L$ dans la base $(\vec{e_1}, \ldots, \vec{e_n})$.*

**Exemple 1.2** *Soit $f$ la translation de vecteur $\vec{v} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ dans $\mathbf{R}^3$. Alors*

$$M_f = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & a \\ 0 & 1 & 0 & b \\ 0 & 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

En effet, pour tous $p$, $q \in \mathbf{R}^3$, $f(q) - f(p) = q - p$, donc $f$ est affine d'application linéaire tangente l'identité. De plus, $f(O) = O + \vec{v}$.

**Exemple 1.3** *Soit $f$ l'homothétie de rapport $\lambda$ et de centre $p_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}$ dans $\mathbf{R}^3$. Alors*

$$M_f = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 & (1-\lambda)x_0 \\ 0 & \lambda & 0 & (1-\lambda)y_0 \\ 0 & 0 & \lambda & (1-\lambda)z_0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

En effet, pour tous $p$, $q \in \mathbf{R}^3$, $f(q) - f(p) = \lambda(q - p)$, donc $f$ est affine d'application linéaire tangente $\lambda id$. De plus, $f(p_0) = p_0$, d'où $f(O) = p_0 + \lambda(O - p_0)$.

**Proposition 1.4** *Soit $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ une application affine, $p$ un point de $\mathbf{R}^3$ de coordonnées $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, $p' = f(p)$ de coordonnées $\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$. Alors*

$$M_f \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{pmatrix}.$$

*Par conséquent, si $f$ et $g$ sont des applications affines, alors*

$$M_{f \circ g} = M_f M_g.$$

L'écriture matricielle des applications affines est évidemment commode pour manipuler informatiquement des points et des transformations. Elle est aussi commode pour démontrer des propriétés.

**Exemple 1.5** *On rappelle qu'un* déplacement *de l'espace affine euclidien est une isométrie affine dont la partie linéaire est de déterminant* 1. *Un déplacement du plan qui n'est pas une translation possède un unique point fixe, c'est une rotation autour de ce point.*

En effet, soit $f$ un déplacement du plan. Un point fixe $A = (x, y)$ correspond à un vecteur propre de $M_f$ pour la valeur propre 1 qui est de la forme $\begin{pmatrix} A \\ 1 \end{pmatrix}$. Comme $M_f$ est triangulaire par blocs, 1 est toujours valeur propre de $M_f$. Si 1 n'est pas valeur propre de la partie linéaire, l'espace propre correspondant est de dimension 1, les vecteurs propres ont leur troisième composante non nulle, donc il en existe un (et un seul) dont la troisième composante vaut 1. Une isométrie linéaire plane de déterminant 1 est une rotation. Elle admet 1 comme valeur propre si et seulement si elle est égale à l'identité. Dans ce cas, $f$ est une translation. On conclut que si $f$ n'est pas une translation, elle possède un unique point fixe.

**Proposition 1.6** *Soient $(O, e_1, \ldots, e_n)$ et $(O', e'_1, \ldots, e'_n)$ deux repères affines de $\mathbf{R}^n$. Soit $f$ une transformation affine de matrices $M$ et $M'$ dans ces repères. Notons $V$ la colonne des coordonnées du point $O'$ dans le repère $(O, e_1, \ldots, e_n)$. Posons*

$$P_a = \begin{pmatrix} P & V \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

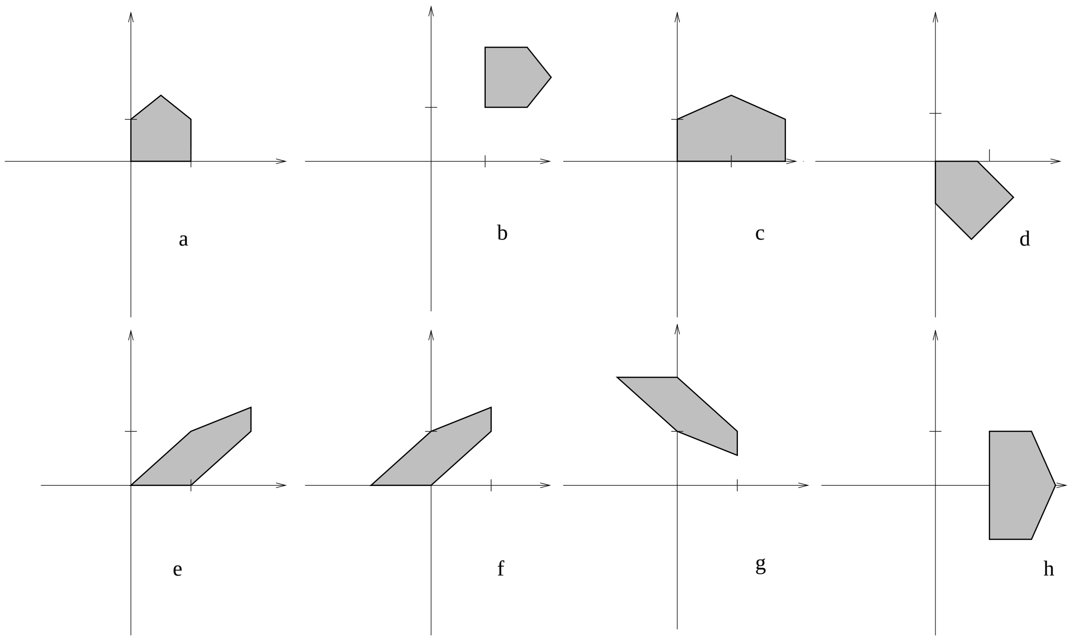
*où $P$ est la matrice de passage de la base $(e_1, \ldots, e_n)$ dans la base $(e'_1, \ldots, e'_n)$, i.e. les colonnes de $P$ sont les composantes des vecteurs $e'_j$ dans la base $(e_1, \ldots, e_n)$. Alors*

$$M' = P_a^{-1} M P.$$

**Preuve.** On montre que si $A$ est un point dont les coordonnées dans les repères sont $X$ et $X'$ respectivement, alors

$$\begin{pmatrix} X \\ 1 \end{pmatrix} = P_a \begin{pmatrix} X' \\ 1 \end{pmatrix}. \blacksquare$$

**Exercice 1** *La figure ci-dessous représente une maison et 7 déformations. Pour chacune des 7 déformations du dessin original, écrire la matrice d'une transformation affine qui la réalise. Cette transformation est-elle unique ?*




**Solution de l'exercice 1.** *Dessins d'enfants.*

La maison possède une symétrie d'axe vertical, dont la matrice est $t_a = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Par conséquent, chaque déformation est réalisée par exactement deux transformations affines $T$ et $T \circ t_a$. On n'en donne qu'une dans chaque cas.

$$t_b = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad t_c = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad t_d = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\sqrt{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad t_e = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$t_f = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad t_g = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad t_h = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

**Exercice 2** *Quelle est la distance d'un point $M = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ à la droite $D$ d'équation $y = ax + b$ dans le plan ?*

**Solution de l'exercice 2.** *Distance d'un point à une droite.*

Le vecteur $\nu = \begin{pmatrix} -a \\ 1 \end{pmatrix}$ est orthogonal à la droite $D$. La projection orthogonale $H$ de $M$ sur $D$ est le point de la perpendiculaire, paramétrée par

$$\lambda \mapsto \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -a \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x - a\lambda \\ y + \lambda \end{pmatrix}$$

qui appartient à $D$. On trouve $\lambda=\frac{ax+b-y}{1+a^2}$, d'où

$$d(M,D)=AH=\frac{|ax+b-y|}{\sqrt{1+a^2}}.$$

**Exercice 3** *Ecrire la matrice $3\times 3$ de la symétrie par rapport à la droite $D$ d'équation $y=ax+b$ dans le plan.*

**Solution de l'exercice 3.** *Matrice $3\times 3$ d'une symétrie par rapport à une droite dans le plan.*

Le symétrique $M'$ de $M=\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ par rapport à $D$ est, avec les notations de l'exercice précédent,

$$M'=\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}+2\lambda\begin{pmatrix}-a\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x-2a\lambda\\y+2\lambda\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{(1-a^2)x+2ay-2ab}{1+a^2}\\\frac{2ax+(a^2-1)y+2b}{1+a^2}\end{pmatrix}.$$

On constate que

$$\begin{pmatrix}x'\\y'\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1-a^2}{1+a^2}&\frac{2a}{1+a^2}&\frac{-2ab}{1+a^2}\\\frac{2a}{1+a^2}&\frac{a^2-1}{1+a^2}&\frac{2b}{1+a^2}\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\1\end{pmatrix},$$

ce qui donne la matrice de la symétrie. On vérifie que le bloc $2\times 2$ supérieur est la matrice de la symétrie (linéaire) par rapport à la droite vectorielle d'équation $y=ax$, et que le vecteur $\begin{pmatrix}\frac{-2ab}{1+a^2}\\\frac{2b}{1+a^2}\end{pmatrix}$ est le symétrique de l'origine par rapport à $D$.

**Exercice 4** *Ecrire la matrice $4\times 4$ de la symétrie par rapport au plan passant par $p_0=\begin{pmatrix}x_0\\y_0\\z_0\end{pmatrix}$ et orthogonal au vecteur unitaire $\vec{v}=\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$.*

**Solution de l'exercice 4.** *Matrice $4\times 4$ d'une symétrie.*

Soit $\vec{u}$ un vecteur de $\mathbf{R}^3$. La projection de $\vec{u}$ sur la droite vectorielle engendrée par $\vec{n}$ est

$$(\vec{u}\cdot\vec{n})\vec{n}$$

donc la projection de $\vec{u}$ sur le plan vectoriel orthogonal à $\vec{n}$ est

$$u-(\vec{u}\cdot\vec{n})\vec{n}.$$

Par conséquent, la symétrie vectorielle par rapport au plan orthogonal à $\vec{n}$ est

$$L(\vec{u})=u-2(\vec{u}\cdot\vec{n})\vec{n}.$$

Il vient

$$M_f=\begin{pmatrix}1-2a^2&-2ab&-2ac\\-2ab&1-2b^2&-2bc\\-2ac&-2bc&1-2c^2\end{pmatrix}$$

Par définition, $f(p_0)=p_0$ donc $f(O)=p_0+L(O-p_0)$ d'où

$$M_f=\begin{pmatrix}1-2a^2&-2ab&-2ac&2a^2x_0+2aby_0+2acz_0\\-2ab&1-2b^2&-2bc&2abx_0+2b^2y_0+2bcz_0\\-2ac&-2bc&1-2c^2&2acx_0+2bcy_0+2c^2z_0\\0&0&0&1\end{pmatrix}.$$

**Exercice 5** *Ecrire la matrice $4 \times 4$ de la rotation d'angle $\theta$ et d'axe la droite $D$ passant par $p_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}$ et de vecteur directeur unitaire $\vec{v} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$.*

**Solution de l'exercice 5.** *Matrice $4 \times 4$ d'une rotation.*

Tourner un vecteur $\vec{u}$ du plan orthogonal à $\vec{n}$ de $90^0$ consiste à remplacer $\vec{u}$ par $\vec{n} \wedge \vec{u}$. Le tourner d'un angle $\theta$ à remplacer $\vec{u}$ par

$$\cos\theta\vec{u} + \sin\theta\vec{n} \wedge \vec{u}.$$

Par conséquent, la rotation vectorielle $R$ d'angle $\theta$ et d'axe $\vec{n}$ est donnée par

$$\begin{aligned} R(\vec{u}) &= (\vec{u}\cdot\vec{n})\vec{n} + \cos\theta(u - (\vec{u}\cdot\vec{n})\vec{n}) + \sin\theta\vec{n} \wedge (u - (\vec{u}\cdot\vec{n})\vec{n}) \\ &= (1-\cos\theta)(\vec{u}\cdot\vec{n})\vec{n} + \cos\theta u + \sin\theta\vec{n} \wedge u. \end{aligned}$$

La matrice de $R$ est donc

$$\begin{pmatrix} a^2 + (1-a^2)\cos\theta & ab(1-\cos\theta) - c\sin\theta & ac(1-\cos\theta) + b\sin\theta \\ ab(1-\cos\theta) + c\sin\theta & b^2 + (1-b^2)\cos\theta & bc(1-\cos\theta) - a\sin\theta \\ ac(1-\cos\theta) - b\sin\theta & bc(1-\cos\theta) + a\sin\theta & c^2 + (1-c^2)\cos\theta \end{pmatrix}.$$

Par définition, $f(p_0) = p_0$ donc $f(O) = p_0 + R(O - p_0)$ d'où

$$M_f = \begin{pmatrix} a^2 + (1-a^2)\cos\theta & ab(1-\cos\theta) - c\sin\theta & ac(1-\cos\theta) + b\sin\theta & X \\ ab(1-\cos\theta) + c\sin\theta & b^2 + (1-b^2)\cos\theta & bc(1-\cos\theta) - a\sin\theta & Y \\ ac(1-\cos\theta) - b\sin\theta & bc(1-\cos\theta) + a\sin\theta & c^2 + (1-c^2)\cos\theta & Z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

où

$$X = -(1-a^2)(1-\cos\theta)x_0 - (ab(1-\cos\theta) - c\sin\theta)y_0 - (ac(1-\cos\theta) + b\sin\theta)z_0,$$

$$Y = -(ab(1-\cos\theta) + c\sin\theta)x_0 - (1-b^2)(1-\cos\theta)y_0 - (bc(1-\cos\theta) - a\sin\theta)z_0,$$

$$Z = -(ac(1-\cos\theta) - b\sin\theta)x_0 - (bc(1-\cos\theta) + a\sin\theta)y_0 - (1-c^2)(1-\cos\theta)z_0.$$

**Exercice 6** *Soit $f : \mathbf{R}^p \to \mathbf{R}^n$ une application linéaire injective, de matrice $L$. Soit $g : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^p$ une application linéaire surjective, de matrice $E$. Vérifier que la matrice du projecteur orthogonal sur l'image de $f$ est $P = L(L^\top L)^{-1}L^\top$ et que la matrice du projecteur orthogonal sur le noyau de $g$ est $Q = I - E^\top(EE^\top)^{-1}E$.*

**Solution de l'exercice 6.** *Matrice du projecteur orthogonal sur une image ou un noyau.*

Comme $f$ est injective, $L^\top L$ est inversible. En effet, pour tout vecteur colonne non nul $X \in \mathbf{R}^p$,

$$\| f(X) \|^2 = X^\top L^\top LX > 0$$

d'où $L^\top LX \neq 0$, ce qui prouve que $L^\top L$ est injective, et donc inversible. C'est pourquoi $P$ est bien définie. On remarque en particulier que $L^\top$ est surjective, donc que $(L^\top L)^{-1}L^\top$ est surjective. Il en résulte que l'image de $P = L(L^\top L)^{-1}L^\top$ coïncide avec celle de $L$.

Pour qu'une matrice $P$ soit celle d'un projecteur orthogonal, il faut et il suffit que $P^2 = P$ et que $P^\top = P$. Ici on vérifie immédiatement que

$$P^2 = L(L^\top L)^{-1}L^\top L(L^\top L)^{-1}L^\top = L(L^\top L)^{-1}L^\top = P,$$

$$P^\top = L((L^\top L)^{-1})^\top L^\top = L(L^\top L)^{-1}L^\top = P.$$

On conclut que $P$ est le projecteur orthogonal sur l'image de $f$.

En général, si $M : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^p$ est linéaire, $\mathrm{im}(M) = \ker(M^\top)$. En effet, si $X \in \ker(M^\top)$ et $Y \in \mathbf{R}^n$, alors $Y^\top E^\top X = 0$, donc, en transposant, $X^\top EY = 0$, donc $X$ est orthogonal à $EY$. Ceci montre que $\ker(M^\top) \subset \mathrm{im}(M)$. Le noyau de $M^\top$ a pour dimension

$$\dim(\ker(M^\top)) = n - \mathrm{rang}(M^\top) = n - \mathrm{rang}(M) = \dim(\mathrm{im}(M)),$$

d'où l'égalité.

On en déduit, d'une part, que $E^\top$ est injective, et d'autre part que son image est l'orthogonal de $\ker(E)$. D'après la première partie appliquée à $L = E^\top$, le projecteur sur l'image de $E^\top$ est $E^\top(EE^\top)^{-1}E$. Le projecteur sur son orthogonal est donc $I - E^\top(EE^\top)^{-1}E$.

# 2 Perspective

## 2.1 Vues

Une *vue* d'une scène 3D est déterminée par les données suivantes.

- La position de la caméra : un point $C$ de coordonnées $\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}$.
- Une direction de visée : un vecteur unitaire $\vec{v}$ de composantes $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$.
- Un *écran*, i.e. un plan $\Pi$ perpendiculaire à la direction de visée : il est déterminé par sa distance à $C$, un réel positif $d$.
- Un repère orthonormé $(O', \vec{e'_1}, \vec{e'_2})$ du plan $\Pi$.

Voici un moyen systématique de construire le repère $(O', e'_1, e'_2)$. Il suffit de choisir une fois pour toute un vecteur unitaire $\vec{\nu}$ non colinéaire à $\vec{v}$. On prend pour $O'$ la projection orthogonale de $C$ sur $\Pi$, soit $O' = C + d\vec{v}$. On prend

$$\vec{e'_1} = \frac{\vec{v} \wedge \vec{\nu}}{|\vec{v} \wedge \vec{\nu}|}$$

et

$$\vec{e'_2} = \vec{v} \wedge \vec{e'_1}.$$

Une *vue* de la scène est une application $W : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^2$, qui aux coordonnées d'un point dans le *repère du monde* $(O, \vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$ associe les coordonnées de sa projection sur l'écran $\Pi$, dans le *repère de l'image* $(O', \vec{e'_1}, \vec{e'_2})$.

**Définition 2.1** *La* vue en perspective *depuis $C$ sur l'écran* $\Pi$ *consiste à projeter un point $p$ sur $p'$, point d'intersection de la droite $Cp$ avec* $\Pi$.

**Remarque 2.2** *La projection n'est pas définie si $p$ est dans le plan passant par $C$ et parallèle à $\Pi$. C'est normal : on n'arrive pas à voir dans les directions situées à $90^0$ de sa direction de vision.*

**Définition 2.3** Prise de vue à distance infinie. *Soit $D$ une droite, appelée* axe de visée, *et* $\Pi$ *un plan orthogonal à $D$. La prise de vue à distance infinie dans la direction $D$ consiste à projeter orthogonalement sur* $\Pi$.

C'est ce qu'on obtient à la limite, lorsque, $\Pi$ et $O'$ étant fixés, $C$ tend vers l'infini le long de la droite $D = (O', \vec{u})$.

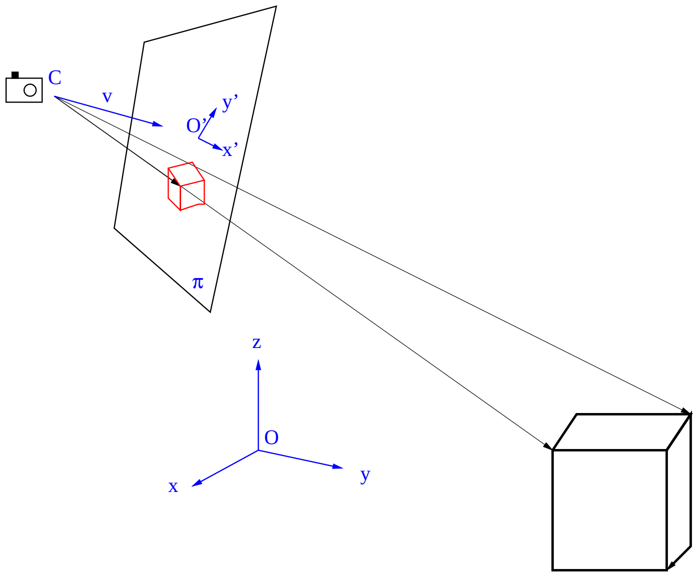



Figure 1: Vue en perspective

**Proposition 2.4** *On choisit* $\nu = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. *Les coordonnées de* $p'$ *sont données, en fonction des coordonnées* $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ *de* $p$*, par les formules*

$$x' = \frac{-cd(x-x_0)+ad(z-z_0)}{\sqrt{a^2+c^2}(a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0))},$$

$$y' = \frac{abd(x-x_0)-d(a^2+c^2)(y-y_0)+bcd(z-z_0)}{\sqrt{a^2+c^2}(a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0))}.$$

**Preuve.** Voir exercice 7. ∎

**Exercice 7** *On prend une photo depuis le point* $C = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}$, *dans la direction* $\vec{v} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$, *sur un écran situé à distance* $d$. *On choisit* $\nu = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ *comme vecteur de référence. Calculer les coordonnées* $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ *de l'image* $p'$ *sur l'écran d'un point* $p = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ *de l'espace.*

**Solution de l'exercice 7.** *La projection perspective.*

On travaille d'abord dans le repère du monde, supposé orthonormé.

Un point $P = \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}$ est dans $\Pi$ si et seulement si $\vec{O'P} \cdot \vec{v} = 0$, i.e. si $a(X-x_0-da)+b(Y-y_0-db)+c(Z-z_0-dc)=0$, autrement dit, $a(X-x_0)+b(Y-y_0)+c(Z-z_0)=d$.

On paramètre la droite $Cp$ par

$$t \mapsto c(t) = (1-t)C + tp = \begin{pmatrix} (1-t)x_0 + tx \\ (1-t)y_0 + ty \\ (1-t)z_0 + tz \end{pmatrix}.$$

Le point $c(t)$ est dans $\Pi$ si et seulement si

$$t = \frac{d}{a(x-x_0) + b(y-y_0) + c(z-z_0)}.$$

Par conséquent, les coordonnées de la projection $p'$ dans le repère du monde sont

$$\begin{pmatrix} x_0 + \frac{d(x-x_0)}{a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)} \\ y_0 + \frac{d(y-y_0)}{a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)} \\ z_0 + \frac{d(z-z_0)}{a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)} \end{pmatrix}.$$

On calcule les composantes des vecteurs du repère de l'image.

$$\frac{\vec{v} \wedge \vec{\nu}}{=} \begin{pmatrix} -c \\ 0 \\ a \end{pmatrix},$$

d'où

$$\vec{e'_1} = \begin{pmatrix} -\frac{c}{\sqrt{a^2+c^2}} \\ 0 \\ \frac{a}{\sqrt{a^2+c^2}} \end{pmatrix}$$

et

$$\vec{e'_2} = \frac{\vec{v} \wedge \vec{e'_1}}{=} \begin{pmatrix} \frac{ab}{\sqrt{a^2+c^2}} \\ -\sqrt{a^2+c^2} \\ \frac{bc}{\sqrt{a^2+c^2}} \end{pmatrix}$$

Les coordonnées de $p'$ dans le repère de l'image s'obtiennent par

$$x' = \overrightarrow{O'p'} \cdot \vec{e'_1} = \frac{-cd(x-x_0) + ad(z-z_0)}{\sqrt{a^2+c^2}(a(x-x_0) + b(y-y_0) + c(z-z_0))},$$

$$y' = \overrightarrow{O'p'} \cdot \vec{e'_2} = \frac{abd(x-x_0) - d(a^2+c^2)(y-y_0) + bcd(z-z_0)}{\sqrt{a^2+c^2}(a(x-x_0) + b(y-y_0) + c(z-z_0))}.$$

**Remarque.** Lorsque $C$, $d$ et $v$ varient, la méthode ci-dessus ne fournit pas tous les angles de prise de vue de la scène possibles. Pour les avoir tous, il faut encore faire tourner la caméra autour de la direction de visée, i.e. remplacer $(\vec{e'_1}, \vec{e'_2})$ par

$$(\cos\psi \vec{e'_1} + \sin\psi \vec{e'_2}, -\sin\psi \vec{e'_1} + \cos\psi \vec{e'_2})$$

pour $\psi \in [0, 2\pi]$.

## 2.2 Coordonnées homogènes

On constate (proposition 2.4), que la vue en perspective s'exprime par des fractions rationnelles

$$x' = \frac{-cd(x-x_0) + ad(z-z_0)}{\sqrt{a^2+c^2}(a(x-x_0) + b(y-y_0) + c(z-z_0))},$$

$$y' = \frac{abd(x-x_0) - d(a^2+c^2)(y-y_0) + bcd(z-z_0)}{\sqrt{a^2+c^2}(a(x-x_0) + b(y-y_0) + c(z-z_0))}.$$

Complétons le repère de l'image en un repère orthonormé de $\mathbf{R}^3$ en posant $\vec{e'_3} = \vec{v}$. La troisième coordonnée de $p'$ est évidemment $z' = 0$.

On ramène ces expressions rationnelles à des expressions linéaires en adoptant la convention suivante : Un point $p$ de $\mathbf{R}^3$ peut être représenté, non seulement par $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix}$, mais par n'importe quel vecteur de $\mathbf{R}^4$ qui lui est proportionnel. En particulier, un point $p'$ du plan $\Pi$ peut être représenté par n'importe quel vecteur de $\mathbf{R}^3$ proportionnel à $\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Avec cette convention, on peut choisir pour représentant de la vue en perspective $p'$ d'un point $p$ le vecteur

$$\begin{pmatrix} -cd(x-x_0) + ad(z-z_0) \\ abd(x-x_0) - d(a^2+c^2)(y-y_0) + bcd(z-z_0) \\ 0 \\ \sqrt{a^2+c^2}(a(x-x_0) + b(y-y_0) + c(z-z_0)) \end{pmatrix}.$$

Ce vecteur est l'image du vecteur $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix}$ par l'endomorphisme de $\mathbf{R}^4$ de matrice

$$\begin{pmatrix} -cd & 0 & ad & cdx_0 - adz_0 \\ abd & -d(a^2+c^2) & bcd & -abdx_0) + d(a^2+c^2)y_0 - bcdz_0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ a\sqrt{a^2+c^2} & b\sqrt{a^2+c^2} & c\sqrt{a^2+c^2} & \sqrt{a^2+c^2}(-ax_0 - by_0 - cz_0) \end{pmatrix}$$

C'est quand même plus sympathique (et commode à implémenter informatiquement) de passer par une matrice pour représenter la vue en perspective.

**Définition 2.5** *Soit* $p = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ *un point de* $\mathbf{R}^3$*. On appelle* coordonnées homogènes *de* $p$ *tout quadruplet* $(u, v, w, t)$ *proportionnel à* $(x, y, z, 1)$*. On* note $p = [x; y; z; t]$.

*Une application* $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ *(éventuellement définie seulement en dehors d'un hyperplan affine) est dite* projective *s'il existe une application linéaire* $L : \mathbf{R}^4 \to \mathbf{R}^4$ *telle que, pour tout* $p = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^3$*, d'image* $f(p) = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$,

$$L \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix} \quad \textit{est proportionnel à} \quad \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{pmatrix}$$

*Autrement dit, en coordonnées homogènes,* $f$ *est donnée par une matrice* $4 \times 4$.

**Remarque.** La définition précédente s'étend à toutes les dimensions.

**Exemple 2.6** *Toute application affine est en particulier projective.*

**Exemple 2.7** *La vue en perspective est une application projective, définie en dehors de l'hyperplan parallèle à l'écran passant par la caméra, non surjective (son image est contenue dans l'écran).*

**Exemple 2.8** *Soient* $\Pi_1$ *et* $\Pi_2$ *deux plans affines dans* $\mathbf{R}^3$*,* $C$ *un point qui n'est pas dans* $\Pi_2$*. Considérons la restriction* $f$ *à* $\Pi_1$ *de la vue en perspective sur* $\Pi_2$*. Après choix de coordonnées cartésiennes sur* $\Pi_2$ *et* $\Pi_1$*, cette application devient une application projective de* $\mathbf{R}^2$ *dans* $\mathbf{R}^2$*.*

Elle est définie en dehors d'une droite $D_1$, l'intersection de $\Pi_1$ avec le plan parallèle à $\Pi_2$ passant par $C$. Son image est le complémentaire d'une droite $D_2$, l'intersection de $\Pi_2$ avec le plan passant par $C$ parallèle à $\Pi_1$. Si $C$ n'est pas sur $\Pi_1$, $f$ est une bijection de $\Pi_1 \setminus D_1$ sur $\Pi_2 \setminus D_2$. Dans ce cas, la bijection réciproque est la vue en perspective de $\Pi_2$ sur l'écran $\Pi_1$ depuis $C$. $f$ est affine si et seulement si $\Pi_1$ et $\Pi_2$ sont parallèles.

**Exercice 8** *Soit* $\Pi_1$ *le plan passant par* $O'_1 = O$ *et de vecteurs directeurs* $\vec{u_1} = \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$ *et* $\vec{v_1} = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$*. Soit* $\Pi_2$ *le plan passant par* $O'_2 = O$ *et de vecteurs directeurs* $\vec{u_2} = \begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$ *et* $\vec{v_2} = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$*. Soit* $C = \begin{pmatrix}0\\0\\2\end{pmatrix}$*. Calculer la matrice* $3 \times 3$ *qui représente la vue en perspective de* $\Pi_1$ *sur* $\Pi_2$ *depuis* $C$*. Vérifier qu'elle est inversible.*

**Solution de l'exercice 8.** *Vue en perspective d'un plan.*

Soit $p_1 \in \Pi_1$, de coordonnées $(x_1, y_1)$ dans le repère $(O_1, \vec{u_1}, \vec{v_1})$. Alors $p_1 = O + x_1\vec{v_1} + y_1\vec{v_1}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix}x_1\\y_1\\x_1\end{pmatrix}$ dans le repère du monde. De même, un point $p_2 \in \Pi_2$, de coordonnées $(x_2, y_2)$ dans le repère $(O_2, \vec{u_2}, \vec{v_2})$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix}x_2\\y_2\\-x_2\end{pmatrix}$ dans le repère du monde. L'équation de $\Pi_2$ est $X + Z = 0$. Un point courant

$$(1-t)C + tp_1 = \begin{pmatrix}tx_1\\ty_1\\tx_1 + 2 - 2t\end{pmatrix}$$

sur la droite $Cp_1$ est dans $\Pi_2$ si et seulement si $2tx_1 + 2 - 2t = 0$, d'où $t = 1/1 - x_1$ et les coordonnées de $p_2) = f(p_1)$ sont

$$x_2 = \frac{x_1}{1 - x_1} \quad \text{et} \quad y_2 = \frac{y_1}{1 - x_1}.$$

On constate que $\begin{pmatrix}x_2\\y_2\\1\end{pmatrix}$ est proportionnel à $\begin{pmatrix}x_1\\y_1\\1 - x_1\end{pmatrix}$ qui est l'image de $\begin{pmatrix}x_1\\y_1\\1\end{pmatrix}$ par la matrice $\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\\-1 & 0 & 1\end{pmatrix}$. On conclut que $f$ est projective. Sa matrice a pour déterminant 1 donc elle est inversible.

## 2.3 Transformations projectives

Une *transformation projective* de $\mathbf{R}^n$, c'est une application projective dont la matrice est inversible. On montre aisément que deux matrices inversibles de taille $n+1$ définissent la même transformation de $\mathbf{R}^n$ si et seulement si elles sont proportionnelles. D'autre part, si $L$ et $L'$ sont des matrices associées à des transformations $f$ et $f'$, l'application projective associée à $LL'$ est $f \circ f'$. Par conséquent, les transformations projectives de $\mathbf{R}^n$ forment un groupe isomorphe à $Gl(n+1,\mathbf{R})/\sim$ où $L \sim L'$ s'il existe un réel non nul $\lambda$ tel que $L' = \lambda L$. Ce groupe quotient, *noté* $PGl(n+1,\mathbf{R})$, a pour dimension $(n+1)^2 - 1$. Par exemple, si $n = 3$, une transformation projective dépend de 15 paramètres, alors qu'une transformation affine dépend de seulement 12 paramètres.

## 2.4 Vues en perspective d'objets

**Exercice 9** *Soit $r$ un réel. On considère le cône quadratique $C$ d'équation $\{r^2x^2+(1+r^2)y^2-z^2 = 0\,;\, z < 0\}$. Il est colorié en noir et blanc par la fonction $\kappa(-z)$, où $\kappa(t) = 1$ si la partie entière $[t]$ est impaire, $\kappa(t) = 0$ sinon. On en prend une vue à distance infinie. Quelle axe de visée, quel repère orthonormé du plan orthogonal choisir pour que l'image obtenue soit la figure 1 du chapitre sur l'aliassage ?*

**Solution de l'exercice 9.** *Vue d'un cône rayé.*

Sur la photo, les demi-cercles qui délimitent le blanc et le noir sont tous tangents en $(x', y') = (0, 0)$. C'est le signe que l'axe de visée est entièrement contenu dans le cône. On choisit comme axe de visée la droite d'équation $\{z = rx\}$, avec comme vecteur directeur $\vec{u} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{1+r^2}} \\ 0 \\ -\frac{r}{\sqrt{1+r^2}} \end{pmatrix}$. On choisit comme origine $O' = (0, 0, 0)$ et comme base du plan $\Pi$ les vecteurs

$$e'_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad e'_2 = \vec{u} \wedge e'_1 = \begin{pmatrix} \frac{r}{\sqrt{1+r^2}} \\ 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{1+r^2}} \end{pmatrix}.$$

Etant donnés $\lambda \in \mathbf{R}$ et $P' = O' + x'e'_1 + y'e'_2 \in \Pi$, le point $P = P' + \lambda\vec{u} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{1+r^2}}(rx' - \lambda) \\ r \\ \frac{1}{\sqrt{1+r^2}}(-x' - \lambda r) \end{pmatrix}$

appartient à $C$ si et seulement si

$$\frac{1}{1+r^2}(-x' - \lambda r)^2 - \frac{r^2}{1+r^2}(rx' - \lambda)^2 - (1+r^2)y'^2 = 0.$$

Cela donne

$$\lambda = \frac{(r^2-1)x'^2 + (1+r^2)y'^2}{2rx'}.$$

La troisième coordonnée du point $P$ du cône qui se projette sur $P'$ vaut alors

$$z = -\sqrt{1+r^2}\frac{x'^2 + y'^2}{2x'}.$$

L'éclairement à affecter au point $P'$ de l'image est donc $\kappa(-z) = \kappa(\sqrt{1+r^2}\frac{x'^2+y'^2}{2x'})$. Les contours séparant les zones blanches et noires sont les demi-cercles définis par les équations de la forme $\sqrt{1+r^2}\frac{x'^2+y'^2}{2x'} = n$ où $n$ est un entier. Ce sont des cercles tangents en $O'$ à l'axe $O'y'$, de rayons entiers, conformément à ce que l'on voit sur la photo.

**Exercice 10** *Vérifier que, vue en perspective, une droite reste en général une droite. Quelles sont les exceptions ? Montrer que, vues en perspectives, les droites parallèles à une droite $D$ sont en général concourantes en un point appelé* point de fuite *de $D$. Quelles sont les exceptions ? Où se trouvent les points de fuites des droites contenues dans un même plan ?*

**Solution de l'exercice 10.** *Vue en perspective de droites.*

Si $D$ est une droite qui ne passe pas par la caméra $C$, sa vue en perspective est l'intersection du plan contenant $D$ et $C$ avec l'écran $\Pi$. C'est donc une droite. Si $D$ passe par $C$, elle est vue comme un point. Si $D$ passe par $C$ et est parallèle à $\Pi$, elle n'est pas vue du tout.

Si $D$ et $D'$ sont des droites parallèles ne passant pas par $C$ et non parallèles à $\Pi$, les plans $Q$ et $Q'$ qu'elles déterminent avec $C$ se coupent suivant une troisième droite $D''$ parallèle à $D$ et à $D'$, qui passe par $C$. Comme $D''$ n'est pas parallèle à $\Pi$, la vue en perspective de $D''$ est un point $p$ par lequel passent les vues en perspective de $D$ et $D'$. Vues en perspective, toutes les droites parallèles à $D$ passent donc par $p$. Si $D$ est parallèle à $\Pi$, $D''$ ne coupe pas $\Pi$, donc les vues en perspective de $D$ et $D'$ sont parallèles.

Si $D$ est contenue dans un plan $\Pi'$ non parallèle à $\Pi$, la droite parallèle à $D$ passant par $C$ est contenue dans le plan $\Pi''$ parallèle à $\Pi'$ passant par $C$, donc le point de fuite $p$ de $D$ est contenu dans la droite intersection de $\Pi''$ et de $\Pi$. Les points de fuites des droites de $\Pi'$ sont donc tous alignés. ■

**Remarque 2.9** *Dans une ville, les immeubles sont souvent des parallélépipèdes aux arêtes parallèles à trois directions fixées. Vues en perspective, ces trois familles d'arêtes sont portées par des droites concourantes en trois points. Si la direction de visée est horizontale, les arêtes verticales restent parallèles, et il ne reste plus que deux points de concours nettement visibles sur l'image : on parle de* perspective à deux points de fuite.

**Exercice 11** *Soit $D_+$ une demi-droite, $S$ un segment de droite. Qu'est ce qu'ils donnent, vus en perspective ? Attention, il y a de multiples cas de figure.*

**Solution de l'exercice 11.** *Vue en perspective d'une demi-droite ou d'un segment de droite.*

Soit $D$ la droite. Si $D$ est parallèle à $\Pi$, la projection sur $\Pi$ est affine, donc envoie une demi-droite (resp. un segment) porté par $D$ sur une demi-droite (resp. un segment).

Supposons que $D$ n'est pas parallèle à $\Pi$. Vue en perspective, c'est une droite, mais un point qui tend à l'infini sur $D$ tend en perspective vers le point de fuite de $D$. D'autre part, il y a un point de $D$ invisible en perspective, c'est le point d'intersection $q$ de $D$ avec le plan parallèle à $\Pi$ passant par $C$. Quand on s'approche de $q$ sur $D$, on part à l'infini en perspective. L'image d'un segment de $D$ qui ne contient pas $q$ est donc un segment. L'image d'un segment de $D$ d'extrémité $q$ est une demi-droite. L'image d'un segment qui admet $q$ comme point intérieur est la réunion de deux demi-droites. L'image d'une demi-droite qui ne contient pas $q$ est un segment d'extrémité le point de fuite. L'image d'une demi-droite d'origine $q$ est une demi-droite d'origine le point de fuite. L'image d'une demi-droite dont l'intérieur contient $q$ est la réunion de deux demi-droites dont l'une a pour extrémité le point de fuite. ■

**Remarque 2.10** *On a décrit une vue comme la projection sur l'écran de tout l'espace. En réalité, une vue ne montre que ce qui se trouve devant l'écran. La vue en perspective réelle d'une droite est donc la projection d'une demi-droite ne coupant pas le plan parallèle à l'écran passant par la caméra : on voit un segment dont les extrémités sont le point de fuite et l'itersection de la droite avec l'écran.*

**Exercice 12** *A quoi ressemble une sphère vue en perspective ?*

**Solution de l'exercice 12.** *Vue en perspective d'une sphère.*

La réunion des droites passant par $C$ et coupant la sphère $S$ est un cône de révolution $K$ dont l'axe passe par $C$ et me centre de $S$. Si $\Pi$ est orthogonal à l'axe (i.e. si le centre est sur l'axe de visée), $K \cap \Pi$ est un disque. Sinon, c'est une ellipse dont le grand axe est dans le plan contenant l'axe de visée et le centre de $S$. L'ellipse est d'autant plus allongée que $S$ est loin de l'axe de visée, cette distance étant rapportée à la distance de $S$ à la caméra. ■

**Remarque.** Lorsqu'on programme une vue en perspective d'une scène, attention aux unités de longueur. La caméra doit être placée loin de la scène, sinon les distorsions (sphères qui deviennent des ellipses) seront trop visibles.

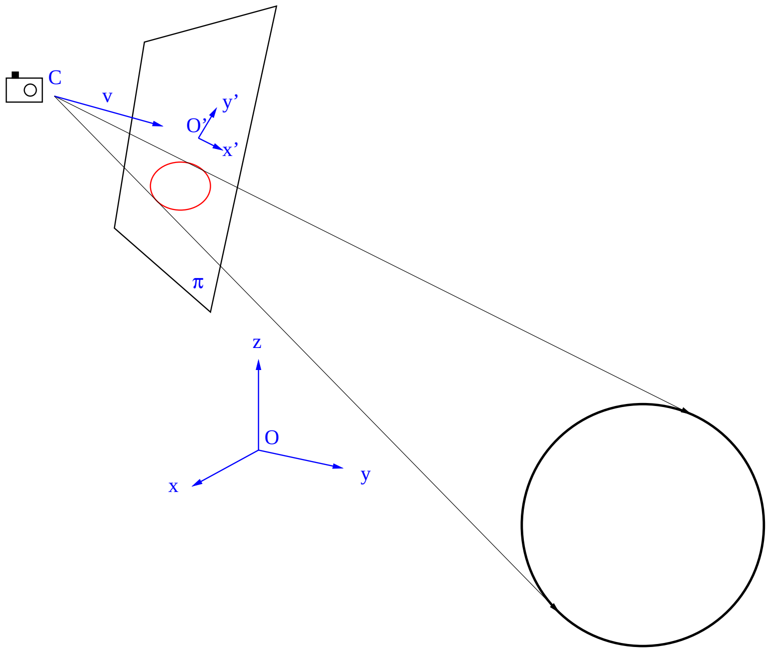



Figure 2: Vue en perspective d'une sphère

**Exercice 13** *On photographie (caméra à distance finie, direction de visée horizontale) un paysage comportant les ruines d'un temple grec. La scène est jonchée de tronçons de colonnes, certaines debout, d'autres couchées. Chaque colonne est, en première approximation, un cylindre à base circulaire coupé par des plans orthogonaux à son axe.*

**a.** *Vue en perspective, une section de colonne verticale est représentée par une ellipse. Il y a t'il des cas où on peut aisément déterminer la direction de son grand axe ? L'excentricité de cette ellipse dépend-elle de la hauteur de la colonne ?*

**b.** *On considère une rangée de colonnes de même hauteur, alignées le long de la droite de visée. Les sections des colonnes, vues en perspective, sont-elles homothétiques ?*

**c.** *Qu'en est-il si les colonnes sont alignées le long d'une droite parallèle à mais distincte de la droite de visée ? Les ellipses sont elles asymptotiquement homothétiques ?*

**d.** *Est-il possible qu'une colonne couchée soit représentée par un cercle ?*

**Solution de l'exercice 13.** *Vue d'un temple grec.*

**a.** Lorsque l'axe d'une colonne verticale coupe la droite de visée, l'ensemble de la figure (colonne, axe de visée, écran) est symétrique par rapport à un plan vertical, donc la vue de la section est symétrique par rapport à une droite verticale. L'ellipse étant aplatie dans la direction $O'y'$, le grand axe est $O'x'$. L'ellipse est réduite à un segment si le plan de la section passe par la caméra. Par conséquent, l'excentricité de cette ellipse dépend de la hauteur de la colonne.

**b.** Non. Chaque section de colonne est inscrite dans un carré dont deux cotés sont parallèles à la direction de visée. Sa vue en perspective, est inscrite dans un trapèze, projection du carré. Si les différentes ellipses étaient homothétiques, les diagonales de ces trapèzes formeraient deux familles de droites parallèles. Or ces diagonales sont des projections de diagonales de carrés qui sont parallèles dans un plan horizontal. Les projections sont donc concourantes (elles ont le même point de fuite). Par conséquent, les projections de sections de colonnes alignées ne sont pas homothétiques. Elles le sont toutefois asymptotiquement.

**c.** Si les colonnes sont alignées le long d'une droite parallèle à mais distincte de la droite de visée, les projections des sections ne sont pas plus homothétiques, mais elles restent asymptotiquement homothétiques : l'excentricité converge.

**d.** Une colonne dont l'axe est la droite de visée se projette sur un cercle. On pourrait penser que d'autres colonnes partagent cette propriété, car se déplacer vers le haut aplatit l'ellipse dans la direction $O'y'$, alors que faire tourner l'axe autour d'un axe vertical aplatit l'ellipse dans l'autre sens. Le calcul montre qu'il n'en est rien.