

PARTIEL DE TECHNIQUES MATHÉMATIQUES DE L'INFORMATIQUE GRAPHIQUE

8 avril 2004

Documents autorisés

I. *Question de cours*

L'image ci-dessous (il s'agit d'une ligne polygonale) présente un effet de moiré. Expliquer brièvement comment, par une transformation de l'image, on pourrait atténuer cet effet.

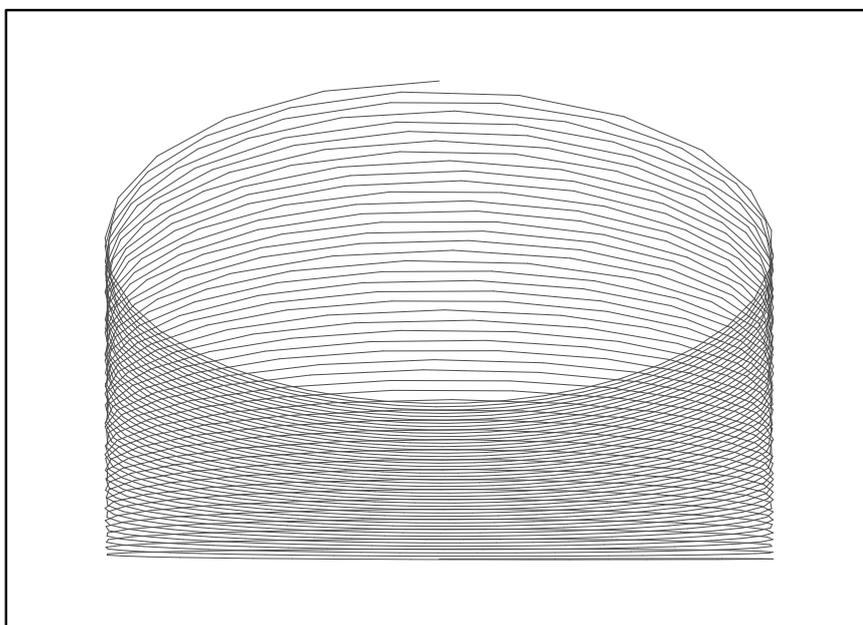


Figure 1

II. *Escalier en colimaçon*

1. Ecrire la matrice  $3 \times 3$  de la rotation vectorielle d'angle  $\theta$  autour de l'axe  $Oz$ . Ecrire la matrice  $4 \times 4$  du *vissage* d'angle  $\theta$ , d'axe  $Oz$ , de hauteur  $h$ , i.e. de la composition de la rotation d'angle  $\theta$  autour de l'axe  $Oz$  et de la translation de  $h$  dans la direction  $Oz$ .
2. Pour construire un escalier en colimaçon, on superpose des pièces identiques à celle représentée sur la figure 2 : c'est la réunion d'une section de cylindre plein d'axe  $Oz$ , de rayon  $r$  et de hauteur  $h$ , et d'un secteur plein de rayon  $R$ , d'angle  $2\theta$  et de hauteur  $h$ . Deux pièces successives se chevauchent à moitié, i.e. leur intersection contient un secteur plan d'angle  $\theta$ . Quel est le déplacement de l'espace qui envoie la  $n$ -ème marche sur la  $n + 1$ -ème ? Quelles sont les symétries de l'escalier complet infini ?

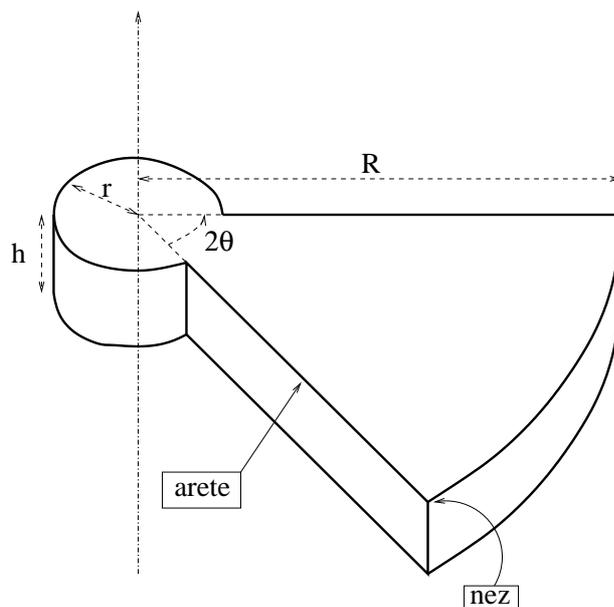


Figure 1

3. On installe une balustrade sur l'escalier, modélisée par une courbe qui monte et tourne à vitesse constante. Elle est fixée à chaque marche de l'escalier par un poteau vertical de longueur  $H$ , qui prend appui au nez de la marche (voir figure 2). On suppose que le nez de la première marche a pour coordonnées  $(R, 0, h)$ . Donner une paramétrisation à vitesse constante de la balustrade.
4. On prend une photo de l'escalier depuis le point  $C$  de coordonnées  $(D, 0, 0)$ , dans la direction  $Ox$ , vers les  $x$  négatifs, sur un écran situé à distance  $d$  de  $C$ . On utilise les coordonnées  $y' = y$  et  $z' = z$  dans l'écran. On suppose que  $R + d < D$ . Paramétrer l'image de la balustrade.
5. Sur la photo, que vaut la hauteur du poteau soutenant la balustrade fixé à la  $n$ -ème marche ?
6. On suppose que  $\theta = \pi/2N$  où  $N$  est un entier positif. Comparer les longueurs des images des arêtes des marches numéros  $4nN$  et  $(4n + 1)N$  lorsque  $n$  est grand.
7. En rassemblant les observations accumulées dans les questions précédentes, faire un dessin approximatif de l'image de la balustrade. On prendra  $N = 6$ ,  $d = 1$ ,  $D = 2R = 4H = 32h$ , et on supposera que l'escalier dessert quelques dizaines d'étages.

### III. Cube en perspective

On complètera les figures ci-dessous comme demandé et on rendra l'énoncé avec la copie. Ecrire les commentaires sur la copie.

1. La figure 3 représente une vue en perspective d'un cube  $K$ . Dessiner sur cette même figure la vue en perspective du cube  $K_1$  obtenu en translatant  $K$  de sorte que son sommet  $A$  arrive au point de projection  $A_1$  situé à la même distance de l'écran que  $A$ . Expliquer la méthode employée.

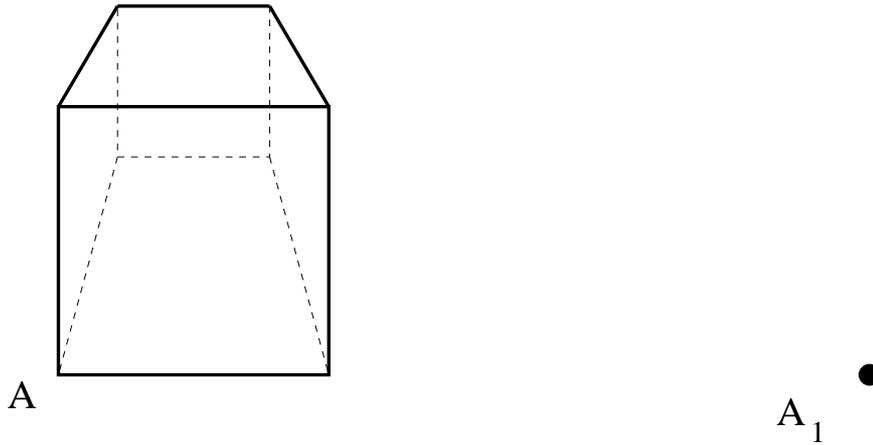


Figure 3

2. On fait tourner  $K$  autour de son axe de symétrie vertical d'un angle  $\theta$ , de telle sorte que les points de fuite des côtés  $A'B'$  et  $A'D'$  deviennent  $F(\theta)$  et  $F'(\theta)$ . La figure 4 représente la vue en perspective de  $K$ , ainsi que des cercles inscrits dans les faces horizontales de  $K$ . On a placé les points  $F(\theta)$  et  $F'(\theta)$  pour  $\theta = \pi/6$ . Dessiner sur la même figure la vue en perspective  $K_2$  de  $K$  après rotation de  $\pi/6$ . Expliquer la méthode employée. La figure possède-t'elle une symétrie ?

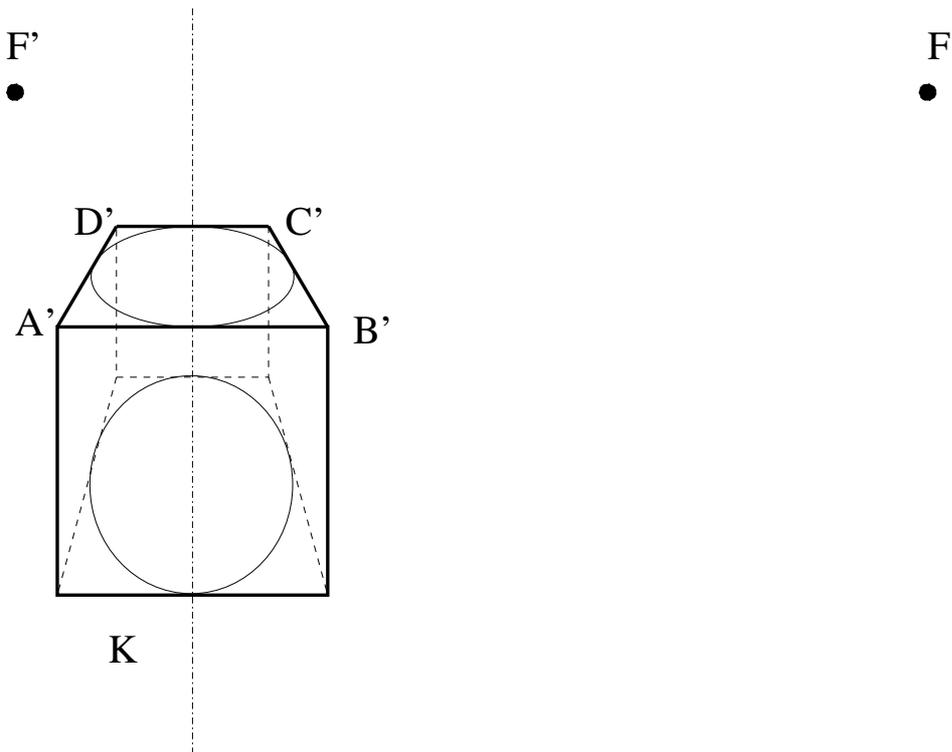


Figure 4

3. Cas particulier  $\theta = \pi/4$ . Trouver les points de fuite  $F(\pi/4)$  et  $F'(\pi/4)$  et tracer sur la figure 5 la vue en perspective  $K_3$  de  $K$  après rotation de  $\pi/4$ . Expliquer la méthode employée.

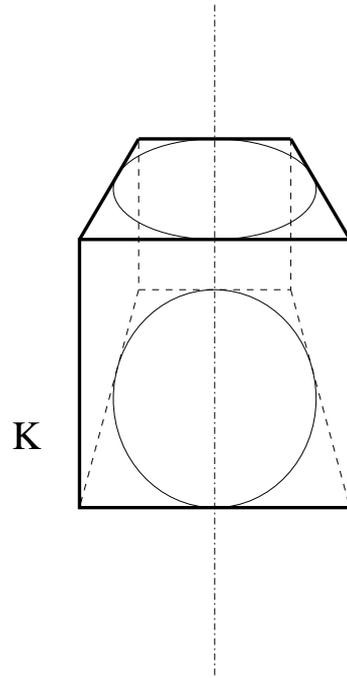


Figure 5

CORRIGÉ DU PARTIEL DE TECHNIQUES MATHÉMATIQUES DE L'INFORMATIQUE GRAPHIQUE  
 8 avril 2004

I. *Moiré*

Le moiré est un exemple d'aliassage. L'image présente des discontinuités (la densité de gris ne prend que deux valeurs, 0 et 1), l'échantillonnage (rastérisation de segments de droites) fait apparaître des motifs qui attirent inutilement le regard. Pour atténuer cet effet indésirable (quoique esthétique), on peut régulariser l'image avant discrétisation. Cela consiste à remplacer la valeur initiale de la densité de gris  $f(x, y)$ , discontinue, par des moyennes pondérées des valeurs de  $f$  sur les pixels voisins de  $(x, y)$ . Le cours donne une justification théorique du choix des ordres de grandeur (prendre les premiers ou les premiers et les seconds voisins) et du choix des poids (valeurs du noyau du filtre passe-bas).

II. *Escalier en colimaçon*

1. La matrice  $3 \times 3$  de la rotation vectorielle d'angle  $\theta$  autour de l'axe  $Oz$  est  $\begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) & 0 \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ .

La matrice  $4 \times 4$  du vissage d'angle  $\theta$ , d'axe  $Oz$ , de hauteur  $h$ , est  $\begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) & 0 & 0 \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & h \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ .

2. Le déplacement de l'espace qui envoie la  $n$ -ème marche sur la  $n + 1$ -ème est un vissage  $v$ , composition d'une rotation d'angle  $\theta$  et d'une translation de hauteur  $h$ , précisément celui dont on a écrit la matrice à la question précédente.

Par construction, l'escalier complet infini est invariant par le vissage  $v$  donc par tous ses itérés  $v^n$ ,  $n \in \mathbf{Z}$ . La pièce élémentaire (figure 1) possède deux symétries par rapport à des plans horizontal et vertical). Seul leur produit, une rotation  $\rho$  d'angle  $\pi$  autour d'un axe horizontal, conserve l'escalier. Le groupe de symétrie de l'escalier est le groupe engendré par  $v$  et  $\rho$ . Le sous-groupe engendré par  $v$  est d'indice 2 dans ce groupe.

3. La balustrade tourne à vitesse angulaire constante autour de  $Oz$ , à distance  $R$  de l'axe, donc sa projection sur le plan horizontal possède une paramétrisation de la forme  $t \mapsto (x(t), y(t))$  avec  $x(t) = R \cos(at + b)$ ,  $y(t) = R \sin(at + b)$ . Elle monte à vitesse constante, donc  $z(t) = ct + d$ . Ici,  $a$ ,  $b$ ,  $c$  et  $d$  sont des constantes à déterminer.

Choisissons la paramétrisation de sorte que lorsque  $t$  décrit l'intervalle  $[0, 1]$ , le point  $(x(t), y(t), z(t))$  décrive la portion de balustrade entre les deux premiers poteaux. En  $t = 0$ , on est au bout du poteau fixé au nez de la première marche, i.e. en  $(R, 0, h + H)$ , donc  $b = 0$  et  $d = h + H$ . Lorsqu'on passe d'une marche à la suivante, on tourne de  $\theta$  et on monte de  $h$ , donc  $a = \theta$  et  $c = h$ . Il vient

$$t \mapsto \begin{pmatrix} R \cos(\theta t) \\ R \sin(\theta t) \\ ht + h + H \end{pmatrix}.$$

4. Le plan de l'écran a pour équation  $\{x = D - d\}$ . Soit  $M = (x, y, z)$  un point de l'espace. Sa

projection  $M' = (x', y', z')$  est le point de l'écran tel qu'il existe  $\lambda \in \mathbf{R}$  tel que  $C\vec{M}' = \lambda C\vec{M}$ , i.e.

$$\begin{cases} x' - D &= \lambda(x - D) \\ y' &= \lambda y \\ z' &= \lambda z \end{cases}.$$

$M'$  est sur l'écran si et seulement si  $x' - D = -d$ . Il vient  $\lambda = \frac{-d}{x-D}$ , d'où  $y' = \frac{-yd}{x-D}$ ,  $z' = \frac{-zd}{x-D}$ .  
Lorsque  $M = (x(t), y(t), z(t))$  décrit la balustrade,

$$M' = \begin{pmatrix} D - d \\ \frac{-dR \sin(\theta t)}{R \cos(\theta t) - D} \\ \frac{ht + h + H}{R \cos(\theta t) - D} \end{pmatrix}.$$

5. Chaque poteau est parallèle à l'écran. Par conséquent, la longueur  $L$  de sa projection est donnée par le théorème de Thalès, voir figure 6 (cette figure est une projection orthogonale sur le plan  $\{y = 0\}$ ). Elle ne dépend que de la coordonnée  $x(n) = R \cos(n\theta)$  du pied du poteau, d'où  $\frac{L}{H} = \frac{D-d-x(n)}{d}$ , et

$$L = \frac{D - d - R \cos(n\theta)}{d} H.$$

Cette suite oscille entre  $H(D - d - R)/d$  et  $H(D - d + R)/d$ .

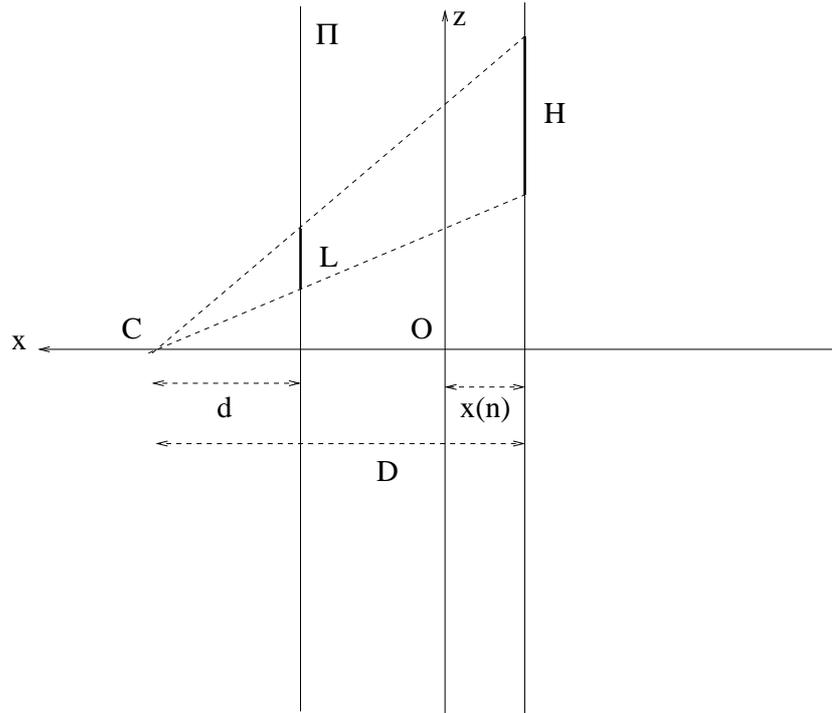


Figure 6

6. L'arête de la  $k$ -ème marche est le segment  $[P(k)Q(k)]$  où  $P(k) = (r \cos(k\theta), r \sin(k\theta), hk + h)$  et  $Q(k) = (R \cos(k\theta), R \sin(k\theta), hk + h)$ . Sa projection est le segment  $[P'(k)Q'(k)]$  où  $P'(k) = (\frac{-dr \sin(k\theta)}{r \cos(k\theta) - D}, \frac{-dh(k+1)}{r \cos(k\theta) - D})$  et  $Q'(k) = (\frac{-dR \sin(k\theta)}{R \cos(k\theta) - D}, \frac{-dh(k+1)}{R \cos(k\theta) - D})$ .

Lorsque  $\theta = \pi/2N$  et  $k = 4nN$ , il vient  $P'(4nN) = (0, \frac{dh(4nN+1)}{D-r})$ ,  $Q'(4nN) = (0, \frac{dh(4nN+1)}{D-R})$ , donc la longueur de la projection de l'arête est  $dh(4nN + 1)(\frac{1}{D-R} - \frac{1}{D-r})$ .

Lorsque  $k = 4nN + 1$ ,  $P'(4nN + 1) = (\frac{dr}{D}, \frac{dh(4nN+2)}{D})$ ,  $Q'(4nN + 1) = (\frac{dR}{D}, \frac{dh(4nN+2)}{D})$ , donc la longueur de la projection de l'arête est  $\frac{d(R-r)}{D}$ . Cette projection d'arête, dont la longueur ne dépend pas de  $n$ , est beaucoup plus courte que l'autre, dont la longueur tend vers l'infini avec  $N$ .

7. La figure 7 montre la photo de la balustrade d'un escalier en colimaçon de 24 étages. Pour rendre la figure intelligible, on a dû augmenter considérablement l'échelle dans la direction horizontale. Cela traduit le fait que les arêtes parallèles à la direction de visée ont des projections beaucoup plus longues que les arêtes qui lui sont orthogonales. L'éloignement presque constant de deux spires consécutives confirme le fait que les longueurs des poteaux varient dans un facteur 2 seulement.

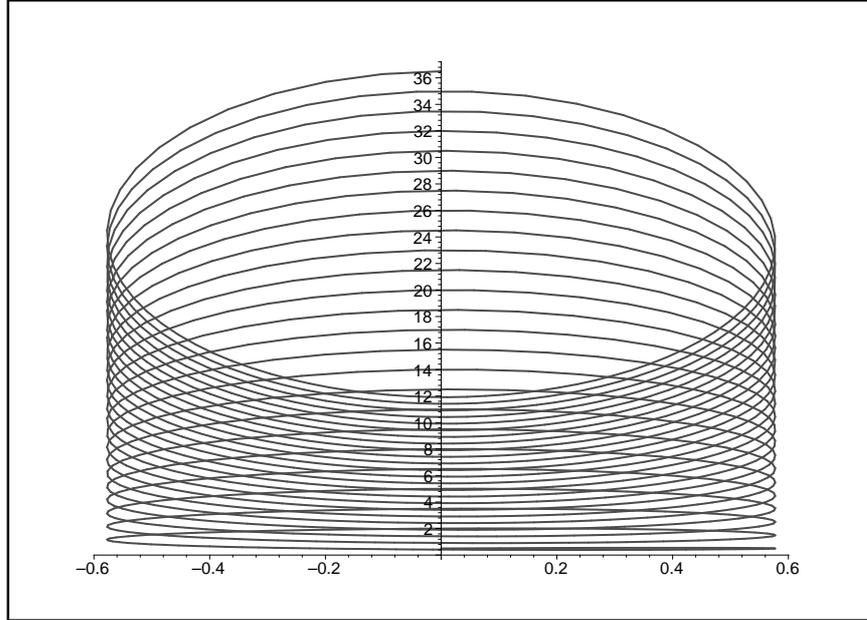


Figure 7

### III. Cube en perspective

1. La translation envoie chaque droite sur une droite qui lui est parallèle. Par conséquent, les arêtes verticales du cube restent verticales, les arêtes horizontales et parallèles à l'écran restent horizontales et parallèles à l'écran. Comme les faces avant et arrière du cube sont translatées chacune dans un plan parallèle à l'écran, en projection, les angles et dimensions ne changent pas. Par conséquent, en projection, elles subissent une simple translation. Soit  $G$  le point de fuite des arêtes de profondeur (i.e. orthogonales à la face avant). Ces arêtes sont envoyées dans des droites qui ont aussi  $G$  pour point de fuite.

Pour construire la projection de  $K_1$ , on translate la projection de la face avant de sorte que son sommet  $A$  arrive en  $A_1$ . De  $A_1$  et du sommet opposé du carré obtenu, on trace une droite passant par  $G$ . On translate la projection de la face arrière de  $K$  de sorte que deux de ses sommets se trouvent sur les 2 droites tracées. Cela donne les 8 sommets de la projection de  $K_1$ .

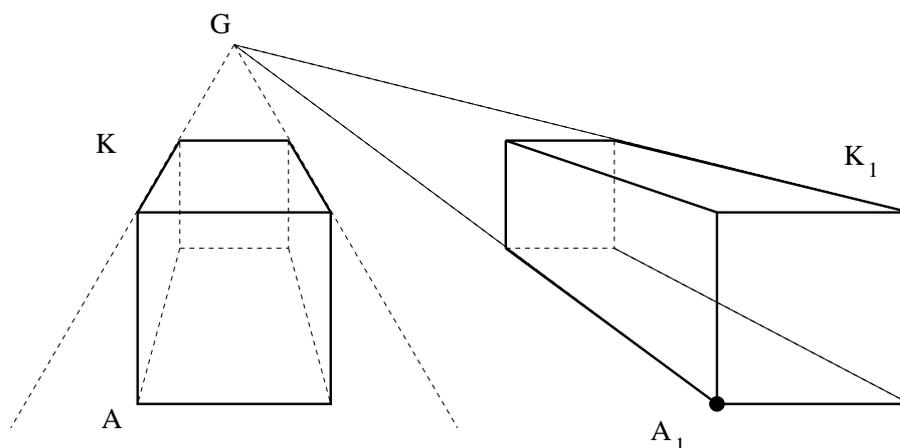


Figure 3 complétée

**2.** Les cercles inscrits dans les faces horizontales de  $K$  sont invariants par la rotation. Par conséquent, ils restent inscrits dans les faces horizontales du cube tourné. Les ellipses, qui sont les projections de ces cercles, sont donc tangentes aux arêtes horizontales du cube tourné. Ces arêtes sont sur des droites qui contiennent les points de fuites  $F(\theta)$  et  $F'(\theta)$  donnés. Pour construire ces droites, il suffit de construire les tangentes aux ellipses issues de  $F$  et  $F'$ . Pour chaque ellipse, on trouve 4 droites dont les points d'intersection 2 à 2 sont les sommets de la projection de  $K_2$ .

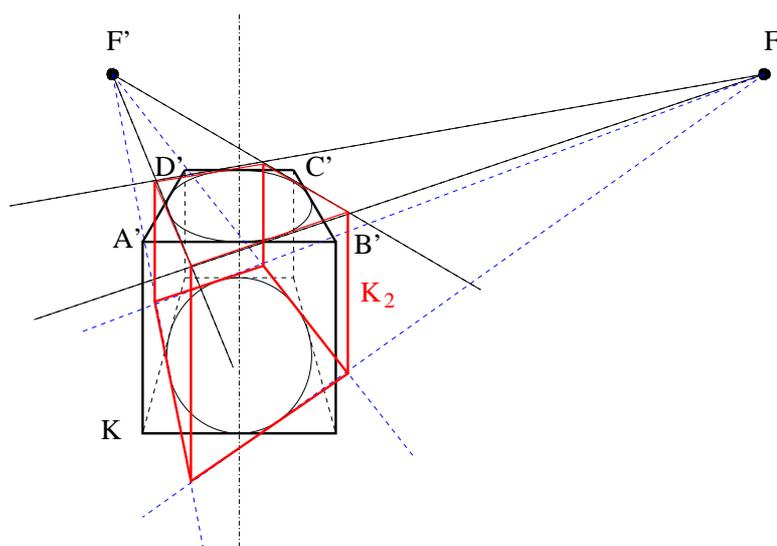


Figure 4 complétée

**3.** Pour trouver le point de fuite de la famille des droites horizontales qui font un angle  $\theta = \pi/4$  avec la direction de visée, il suffit de connaître la projection de l'une de ces droites. Les diagonales des faces horizontales de  $K$  conviennent. Les points d'intersection des projections des diagonales avec l'horizon (lieu des points de fuite des droites horizontales, c'est la droite horizontale passant par  $G$ ) sont les points de fuite cherchés. La construction se termine comme en 2.

Le cube  $K_3$  est symétrique par rapport au plan vertical  $\Pi'$  qui contient la droite de visée. La projection transforme cette symétrie en une symétrie par rapport à la droite  $\Pi \cap \Pi'$  de l'écran.

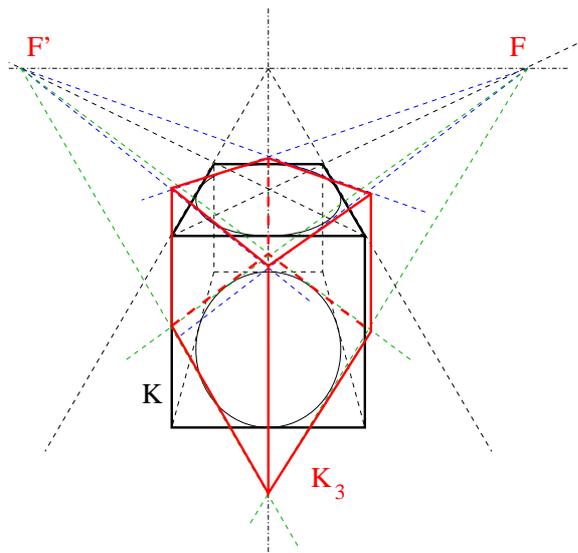


Figure 5 complétée