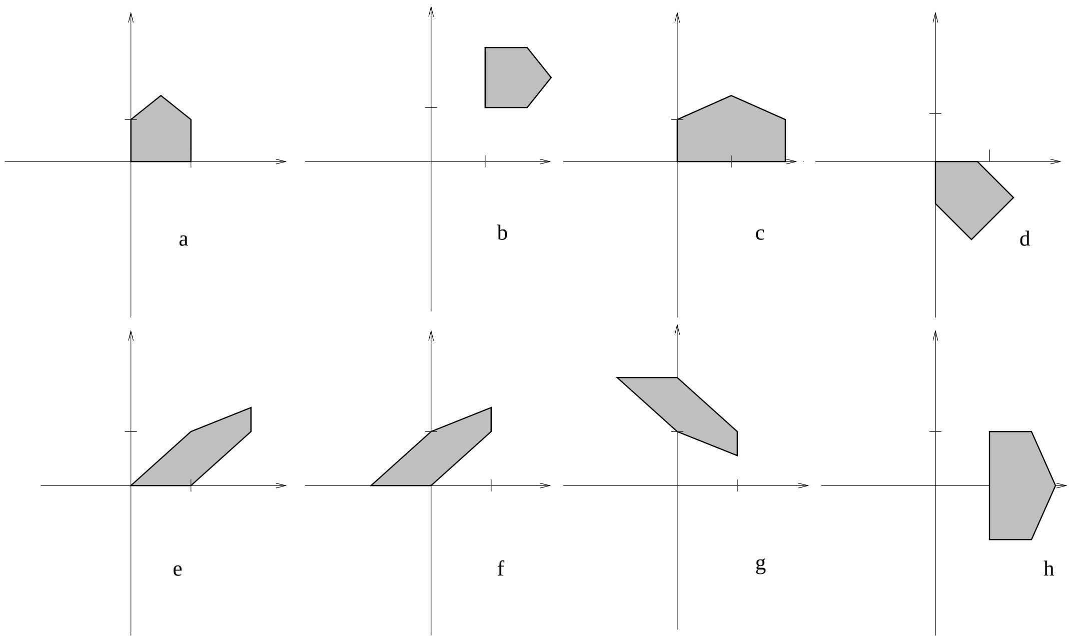
Exercices de géométrie, perspective et aliassage

Exercice 1 *La figure ci-dessous représente une maison et 7 déformations. Pour chacune des 7 déformations du dessin original, écrire la matrice d'une transformation affine qui la réalise. Cette transformation est-elle unique ?*



Solution de l'exercice 1. *Dessins d'enfants.*

La maison possède une symétrie d'axe vertical, dont la matrice est $t_a = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Par conséquent, chaque déformation est réalisée par exactement deux transformations affines T et $T \circ t_a$. On n'en donne qu'une dans chaque cas.

$$t_b = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad t_c = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad t_d = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\sqrt{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad t_e = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$t_f = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad t_g = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad t_h = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 2 *Quelle est la distance d'un point $M = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ à la droite D d'équation $y = ax + b$ dans le plan ?*

Solution de l'exercice 2. *Distance d'un point à une droite.*

Le vecteur $\nu = \begin{pmatrix} -a \\ 1 \end{pmatrix}$ est orthogonal à la droite D. La projection orthogonale H de M sur D est le point de la perpendiculaire, paramétrée par

$$\lambda \mapsto \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -a \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x - a\lambda \\ y + \lambda \end{pmatrix}$$

qui appartient à D. On trouve $\lambda = \frac{ax+b-y}{1+a^2}$, d'où

$$d(M, D) = AH = \frac{|ax + b - y|}{\sqrt{1 + a^2}}.$$

Exercice 3 *Ecrire la matrice* 3×3 *de la symétrie par rapport à la droite* D *d'équation* $y = ax + b$ *dans le plan.*

Solution de l'exercice 3. *Matrice* 3×3 *d'une symétrie par rapport à une droite dans le plan.*

Le symétrique M' de $M = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ par rapport à D est, avec les notations de l'exercice précédent,

$$M' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + 2\lambda \begin{pmatrix} -a \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x - 2a\lambda \\ y + 2\lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{(1-a^2)x+2ay-2ab}{1+a^2} \\ \frac{2ax+(a^2-1)y+2b}{1+a^2} \end{pmatrix}.$$

On constate que

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1-a^2}{1+a^2} & \frac{2a}{1+a^2} & \frac{-2ab}{1+a^2} \\ \frac{2a}{1+a^2} & \frac{a^2-1}{1+a^2} & \frac{2b}{1+a^2} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix},$$

ce qui donne la matrice de la symétrie. On vérifie que le bloc 2×2 supérieur est la matrice de la symétrie (linéaire) par rapport à la droite vectorielle d'équation $y = ax$, et que le vecteur $\begin{pmatrix} \frac{-2ab}{1+a^2} \\ \frac{2b}{1+a^2} \end{pmatrix}$ est le symétrique de l'origine par rapport à D.

Exercice 4 *Ecrire la matrice* 4×4 *de la symétrie par rapport au plan passant par* $p_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}$ *et orthogonal au vecteur unitaire* $\vec{v} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$.

Solution de l'exercice 4. *Matrice* 4×4 *d'une symétrie.*

Soit $\vec{u}$ un vecteur de $\mathbf{R}^3$. La projection de $\vec{u}$ sur la droite vectorielle engendrée par $\vec{n}$ est

$$(\vec{u} \cdot \vec{n})\vec{n}$$

donc la projection de $\vec{u}$ sur le plan vectoriel orthogonal à $\vec{n}$ est

$$u - (\vec{u} \cdot \vec{n})\vec{n}.$$

Par conséquent, la symétrie vectorielle par rapport au plan orthogonal à $\vec{n}$ est

$$L(\vec{u}) = u - 2(\vec{u} \cdot \vec{n})\vec{n}.$$

Il vient

$$M_f = \begin{pmatrix} 1 - 2a^2 & -2ab & -2ac \\ -2ab & 1 - 2b^2 & -2bc \\ -2ac & -2bc & 1 - 2c^2 \end{pmatrix}$$

Par définition, $f(p_0) = p_0$ donc $f(O) = p_0 + L(O - p_0)$ d'où

$$M_f = \begin{pmatrix} 1 - 2a^2 & -2ab & -2ac & 2a^2x_0 + 2aby_0 + 2acz_0 \\ -2ab & 1 - 2b^2 & -2bc & 2abx_0 + 2b^2y_0 + 2bcz_0 \\ -2ac & -2bc & 1 - 2c^2 & 2acx_0 + 2bcy_0 + 2c^2z_0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 5 *Ecrire la matrice 4×4 de la rotation d'angle θ et d'axe la droite D passant par* $p_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}$ *et de vecteur directeur unitaire* $\vec{v} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$.

Solution de l'exercice 5. *Matrice 4×4 d'une rotation.*

Tourner un vecteur $\vec{u}$ du plan orthogonal à $\vec{n}$ de 90^0 consiste à remplacer $\vec{u}$ par $\vec{n} \wedge \vec{u}$. Le tourner d'un angle θ à remplacer $\vec{u}$ par

$$\cos\theta \vec{u} + \sin\theta \vec{n} \wedge \vec{u}.$$

Par conséquent, la rotation vectorielle R d'angle θ et d'axe $\vec{n}$ est donnée par

$$\begin{aligned} R(\vec{u}) &= (\vec{u} \cdot \vec{n})\vec{n} + \cos\theta(u - (\vec{u} \cdot \vec{n})\vec{n}) + \sin\theta \vec{n} \wedge (u - (\vec{u} \cdot \vec{n})\vec{n}) \\ &= (1 - \cos\theta)(\vec{u} \cdot \vec{n})\vec{n} + \cos\theta u + \sin\theta \vec{n} \wedge u. \end{aligned}$$

La matrice de R est donc

$$\begin{pmatrix} a^2 + (1-a^2)\cos\theta & ab(1-\cos\theta) - c\sin\theta & ac(1-\cos\theta) + b\sin\theta \\ ab(1-\cos\theta) + c\sin\theta & b^2 + (1-b^2)\cos\theta & bc(1-\cos\theta) - a\sin\theta \\ ac(1-\cos\theta) - b\sin\theta & bc(1-\cos\theta) + a\sin\theta & c^2 + (1-c^2)\cos\theta \end{pmatrix}.$$

Par définition, $f(p_0) = p_0$ donc $f(O) = p_0 + R(O - p_0)$ d'où

$$M_f = \begin{pmatrix} a^2 + (1-a^2)\cos\theta & ab(1-\cos\theta) - c\sin\theta & ac(1-\cos\theta) + b\sin\theta & X \\ ab(1-\cos\theta) + c\sin\theta & b^2 + (1-b^2)\cos\theta & bc(1-\cos\theta) - a\sin\theta & Y \\ ac(1-\cos\theta) - b\sin\theta & bc(1-\cos\theta) + a\sin\theta & c^2 + (1-c^2)\cos\theta & Z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

où

$$X = -(1-a^2)(1-\cos\theta)x_0 - (ab(1-\cos\theta) - c\sin\theta)y_0 - (ac(1-\cos\theta) + b\sin\theta)z_0,$$

$$Y = -(ab(1-\cos\theta) + c\sin\theta)x_0 - (1-b^2)(1-\cos\theta)y_0 - (bc(1-\cos\theta) - a\sin\theta)z_0,$$

$$Z = -(ac(1-\cos\theta) - b\sin\theta)x_0 - (bc(1-\cos\theta) + a\sin\theta)y_0 - (1-c^2)(1-\cos\theta)z_0.$$

Exercice 6 *Soit $f : \mathbf{R}^p \to \mathbf{R}^n$ une application linéaire injective, de matrice L. Soit $g : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^p$ une application linéaire surjective, de matrice E. Vérifier que la matrice du projecteur orthogonal sur l'image de f est $P = L(L^\top L)^{-1}L^\top$ et que la matrice du projecteur orthogonal sur le noyau de g est $Q = I - E^\top(EE^\top)^{-1}E$.*

Solution de l'exercice 6. *Matrice du projecteur orthogonal sur une image ou un noyau.*

Comme f est injective, $L^\top L$ est inversible. En effet, pour tout vecteur colonne non nul $X \in \mathbf{R}^p$,

$$\| f(X) \|^2 = X^\top L^\top L X > 0$$

d'où $L^\top L X \neq 0$, ce qui prouve que $L^\top L$ est injective, et donc inversible. C'est pourquoi P est bien définie. On remarque en particulier que $L^\top$ est surjective, donc que $(L^\top L)^{-1}L^\top$ est surjective. Il en résulte que l'image de $P = L(L^\top L)^{-1}L^\top$ coïncide avec celle de L.

Pour qu'une matrice P soit celle d'un projecteur orthogonal, il faut et il suffit que $P^2 = P$ et que $P^\top = P$. Ici on vérifie immédiatement que

$$P^2 = L(L^\top L)^{-1}L^\top L(L^\top L)^{-1}L^\top = L(L^\top L)^{-1}L^\top = P,$$

$$P^\top = L((L^\top L)^{-1})^\top L^\top = L(L^\top L)^{-1}L^\top = P.$$

On conclut que P est le projecteur orthogonal sur l'image de f.

En général, si $M : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^p$ est linéaire, $\mathrm{im}(M) = \ker(M^\top)$. En effet, si $X \in \ker(M^\top)$ et $Y \in \mathbf{R}^n$, alors $Y^\top E^\top X = 0$, donc, en transposant, $X^\top EY = 0$, donc X est orthogonal à EY. Ceci montre que $\ker(M^\top) \subset \mathrm{im}(M)$. Le noyau de $M^\top$ a pour dimension

$$\dim(\ker(M^\top)) = n - \mathrm{rang}(M^\top) = n - \mathrm{rang}(M) = \dim(\mathrm{im}(M)),$$

d'où l'égalité.

On en déduit, d'une part, que $E^\top$ est injective, et d'autre part que son image est l'orthogonal de $\ker(E)$. D'après la première partie appliquée à $L = E^\top$, le projecteur sur l'image de $E^\top$ est $E^\top(EE^\top)^{-1}E$. Le projecteur sur son orthogonal est donc $I - E^\top(EE^\top)^{-1}E$.

Exercice 7 *On prend une photo depuis le point* $C = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}$, *dans la direction* $\vec{v} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$, *sur un écran situé à distance* d. *On choisit* $\nu = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ *comme vecteur de référence. Calculer les coordonnées* $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ *de l'image* p' *sur l'écran d'un point* $p = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ *de l'espace.*

Solution de l'exercice 7. *La projection perspective.*

On travaille d'abord dans le repère du monde, supposé orthonormé.

Un point $M = \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}$ est dans Π si et seulement si $\vec{O'M} \cdot \vec{v} = 0$, i.e. si $a(X - x_0 - da) + b(Y - y_0 - db) + c(Z - z_0 - dc) = 0$, autrement dit, $a(X - x_0) + b(Y - y_0) + c(Z - z_0) = d$.

On paramètre la droite Cp par

$$t \mapsto c(t) = (1-t)C + tp = \begin{pmatrix} (1-t)x_0 + tx \\ (1-t)y_0 + ty \\ (1-t)z_0 + tz \end{pmatrix}.$$

Le point $c(t)$ est dans Π si et seulement si

$$t = \frac{d}{a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0)}.$$

Par conséquent, les coordonnées de la projection p' dans le repère du monde sont

$$\begin{pmatrix} x_0 + \frac{d(x-x_0)}{a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)} \\ y_0 + \frac{d(y-y_0)}{a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)} \\ z_0 + \frac{d(z-z_0)}{a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)} \end{pmatrix}.$$

On calcule les composantes des vecteurs du repère de l'image.

$$\vec{v} \wedge \vec{\nu} = \begin{pmatrix} -c \\ 0 \\ a \end{pmatrix},$$

d'où

$$\vec{e'_1} = \begin{pmatrix} -\frac{c}{\sqrt{a^2+c^2}} \\ 0 \\ \frac{a}{\sqrt{a^2+c^2}} \end{pmatrix}$$

et

$$\vec{e'_2} = \frac{\vec{v} \wedge \vec{e'_1}}{|\vec{v} \wedge \vec{e'_1}|} = \begin{pmatrix} \frac{ab}{\sqrt{a^2+c^2}} \\ -\sqrt{a^2+c^2} \\ \frac{bc}{\sqrt{a^2+c^2}} \end{pmatrix}$$

Les coordonnées de p' dans le repère de l'image s'obtiennent par

$$x' = \vec{O'p'} \cdot \vec{e'_1} = \frac{-cd(x-x_0) + ad(z-z_0)}{\sqrt{a^2+c^2}(a(x-x_0) + b(y-y_0) + c(z-z_0))},$$

$$y' = \vec{O'p'} \cdot \vec{e'_2} = \frac{abd(x-x_0) - d(a^2+c^2)(y-y_0) + bcd(z-z_0)}{\sqrt{a^2+c^2}(a(x-x_0) + b(y-y_0) + c(z-z_0))}.$$

Exercice 8 *Soit* Π_1 *le plan passant par* $O'_1 = O$ *et de vecteurs directeurs* $\vec{u_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ *et* $\vec{v_1} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Soit Π_2 *le plan passant par* $O'_2 = O$ *et de vecteurs directeurs* $\vec{u_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ *et* $\vec{v_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. *Soit* $C = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$. *Calculer la matrice* 3×3 *qui représente la vue en perspective de* Π_1 *sur* Π_2 *depuis* C. *Vérifier qu'elle est inversible.*

Solution de l'exercice 8. *Vue en perspective d'un plan.*

Soit $p_1 \in \Pi_1$, de coordonnées (x_1, y_1) dans le repère $(O_1, \vec{u_1}, \vec{v_1})$. Alors $p_1 = O + x_1\vec{v_1} + y_1\vec{v_1}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ x_1 \end{pmatrix}$ dans le repère du monde. De même, un point $p_2 \in \Pi_2$, de coordonnées (x_2, y_2) dans le repère $(O_2, \vec{u_2}, \vec{v_2})$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ -x_2 \end{pmatrix}$ dans le repère du monde. L'équation de Π_2 est $X + Z = 0$. Un point courant

$$(1-t)C + tp_1 = \begin{pmatrix} tx_1 \\ ty_1 \\ tx_1 + 2 - 2t \end{pmatrix}$$

sur la droite Cp_1 est dans Π_2 si et seulement si $2tx_1 + 2 - 2t = 0$, d'où $t = 1/1 - x_1$ et les coordonnées de $p_2) = f(p_1)$ sont

$$x_2 = \frac{x_1}{1-x_1} \quad \text{et} \quad y_2 = \frac{y_1}{1-x_1}.$$

On constate que $\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ 1 \end{pmatrix}$ est proportionnel à $\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ 1-x_1 \end{pmatrix}$ qui est l'image de $\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ 1 \end{pmatrix}$ par la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. On conclut que f est projective. Sa matrice a pour déterminant 1 donc elle est inversible.

Exercice 9 *Soit* r *un réel. On considère le cône quadratique* C *d'équation* $\{r^2x^2 + (1+r^2)y^2 - z^2 = 0\,;\, z < 0\}$. *Il est colorié en noir et blanc par la fonction* $\kappa(-z)$, *où* $\kappa(t) = 1$ *si la partie entière* $[t]$ *est impaire,* $\kappa(t) = 0$ *sinon. On en prend une vue à distance infinie. Quelle axe de visée, quel repère orthonormé du plan orthogonal choisir pour que l'image obtenue soit la figure 1 du chapitre sur l'aliassage ?*

Solution de l'exercice 9. *Vue d'un cône rayé.*

Sur la photo, les demi-cercles qui délimitent le blanc et le noir sont tous tangents en $(x', y') = (0, 0)$. C'est le signe que l'axe de visée est entièrement contenu dans le cône. On choisit comme axe de visée la droite d'équation $\{z = rx\}$, avec comme vecteur directeur $\vec{u} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{1+r^2}} \\ 0 \\ -\frac{r}{\sqrt{1+r^2}} \end{pmatrix}$. On choisit comme origine $O' = (0, 0, 0)$ et comme base du plan Π les vecteurs

$$e'_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad e'_2 = \vec{u} \wedge e'_1 = \begin{pmatrix} \frac{r}{\sqrt{1+r^2}} \\ 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{1+r^2}} \end{pmatrix}.$$

Etant donnés $\lambda \in \mathbf{R}$ et $P' = O' + x'e'_1 + y'e'_2 \in \Pi$, le point $P = P' + \lambda\vec{u} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{1+r^2}}(rx' - \lambda) \\ r \\ \frac{1}{\sqrt{1+r^2}}(-x' - \lambda r) \end{pmatrix}$ appartient à C si et seulement si

$$\frac{1}{1+r^2}(-x' - \lambda r)^2 - \frac{r^2}{1+r^2}(rx' - \lambda)^2 - (1+r^2)y'^2 = 0.$$

Cela donne

$$\lambda = \frac{(r^2-1)x'^2 + (1+r^2)y'^2}{2rx'}.$$

La troisième coordonnée du point P du cône qui se projette sur P' vaut alors

$$z = -\sqrt{1+r^2}\frac{x'^2 + y'^2}{2x'}.$$

L'éclairement à affecter au point P' de l'image est donc $\kappa(-z) = \kappa(\sqrt{1+r^2}\frac{x'^2+y'^2}{2x'})$. Les contours séparant les zones blanches et noires sont les demi-cercles définis par les équations de la forme $\sqrt{1+r^2}\frac{x'^2+y'^2}{2x'} = n$ où n est un entier. Ce sont des cercles tangents en O' à l'axe $O'y'$, de rayons entiers, conformément à ce que l'on voit sur la photo.

Exercice 10 *Vérifier que, vue en perspective, une droite reste en général une droite. Quelles sont les exceptions ? Montrer que, vues en perspectives, les droites parallèles à une droite D sont en général concourantes en un point appelé* point de fuite *de D. Quelles sont les exceptions ? Où se trouvent les points de fuites des droites contenues dans un même plan ?*

Solution de l'exercice 10. *Vue en perspective de droites.*

Si D est une droite qui ne passe pas par la caméra C, sa vue en perspective est l'intersection du plan contenant D et C avec l'écran Π. C'est donc une droite. Si D passe par C, elle est vue comme un point. Si D passe par C et est parallèle à Π, elle n'est pas vue du tout.

Si D et D' sont des droites parallèles ne passant pas par C et non parallèles à Π, les plans Q et Q' qu'elles déterminent avec C se coupent suivant une troisième droite D'' parallèle à D et à D', qui passe par C. Comme D'' n'est pas parallèle à Π, la vue en perspective de D'' est un point p par lequel passent les vues en perspective de D et D'. Vues en perspective, toutes les droites parallèles à D passent donc par p. Si D est parallèle à Π, D'' ne coupe pas Π, donc les vues en perspective de D et D' sont parallèles.

Si D est contenue dans un plan Π' non parallèle à Π, la droite parallèle à D passant par C est contenue dans le plan Π'' parallèle à Π' passant par C, donc le point de fuite p de D est contenu dans la droite intersection de Π'' et de Π. Les points de fuites des droites de Π' sont donc tous alignés.

Exercice 11 *Soit D_+ une demi-droite, S un segment de droite. Qu'est ce qu'ils donnent, vus en perspective ? Attention, il y a de multiples cas de figure.*

Solution de l'exercice 11. *Vue en perspective d'une demi-droite ou d'un segment de droite.*

Soit D la droite qui porte S ou D_+.

Si D est parallèle à Π, la projection sur Π est affine, donc envoie une demi-droite (resp. un segment) porté par D sur une demi-droite (resp. un segment).

Supposons que D n'est pas parallèle à Π et ne passe pas par C. Alors elle coupe Π en un point G, et la partie visible de D (l'intersection de D avec le demi-espace délimité par Π qui est devant la caméra) est une demi-droite Δ issue de G. La droite D possède aussi un point de fuite F, l'intersection de Π avec la droite passant par C parallèle à D.

Un segment S de D est ou bien entièrement invisible (s'il ne rencontre pas Δ), ou bien se projette en un seul point (si D passe par C ou si S part de G dans la direction opposée à Δ), ou bien un segment d'origine G (si S contient G) ou bien un segment dont les extrémités sont les projections des extrémités de S.

Une demi-droite D_+ de D est ou bien entièrement invisible (si elle ne rencontre pas Δ), ou bien se projette en un seul point (si D passe par C ou si D_+ part de G dans la direction opposée à Δ), ou bien un segment d'origine G (si D_+ contient Δ) ou bien un intervalle $[G, F[$ (si D_+ contient la demi-droite opposée à Δ), ou bien un intervalle $[pr(A), F[$ où A est l'extrémité de D_+ (si D_+ est disjointe de Δ).

Exercice 12 *A quoi ressemble une sphère vue en perspective ?*

Solution de l'exercice 12. *Vue en perspective d'une sphère.*

La réunion des droites passant par C et coupant la sphère S est un cône de révolution K dont l'axe passe par C et le centre C' de S. Si Π est orthogonal à l'axe (i.e. si le centre est sur l'axe de visée), $K \cap \Pi$ est un disque. Sinon, c'est une ellipse dont le grand axe est dans le plan contenant l'axe de visée et le centre de S. On va montrer que l'ellipse est d'autant plus allongée que S est loin de l'axe de visée, cette distance étant rapportée à la distance de S à la caméra.

La figure est symétrique par rapport au plan Π' contenant la droite de visée et le centre C' de S. On peut donc choisir le repère du monde de sorte que l'origine soit en $O = C$, que la droite de visée soit Oz, que l'équation de Π soit $\{z = 1\}$ et que l'équation du plan Π' soit $\{y = 0\}$. Soient $(x_0, 0, z_0)$ les coordonnées de C', et R le rayon de la sphère S. L'équation de S s'écrit

$$(x - x_0)^2 + y^2 + (z - z_0)^2 - R^2 = 0.$$

Soit $P' = (x', y', 1)$ un point de Π. Pour t réel, le point point $M = O + t\vec{OP}$ appartient à S si et seulement si

$$(x'^2 + 1 + y'^2)t^2 + (-2x_0x' - 2z_0)t + x_0^2 + z_0^2 - R^2 = 0.$$

La droite OP est tangente à S si et seulement si cette équation du second degré possède une racine double, i.e. si et seulement si son discriminant

$$(R^2 - z_0^2)x'^2 + 2z_0x_0x' + (R^2 - x_0^2 - z_0^2)y'^2 + R^2 - x_0^2$$

s'annule. Posons $X = x' + \dfrac{x_0z_0}{R^2 - z_0^2}$, $Y = y'$. On obtient l'équation normalisée de l'ellipse $\dfrac{1}{a^2}X^2 + \dfrac{1}{b^2}Y^2 - 1 = 0$, avec

$$a^2 = \frac{R^2(x_0^2 + z_0^2 - R^2)}{(z_0^2 - R^2)^2} \quad \text{et} \quad b^2 = \frac{R^2}{z_0^2 - R^2}.$$

Le rapport

$$\frac{a^2}{b^2} = \frac{x_0^2 + z_0^2 - R^2}{z_0^2 - R^2}$$

est toujours plus grand que 1. Autrement dit, l'ellipse s'étale le long de l'axe Ox', i.e. le long du plan Π'.

Exercice 13 *On photographie (caméra à distance finie, direction de visée horizontale) un paysage comportant les ruines d'un temple grec. La scène est jonchée de tronçons de colonnes, certaines debout, d'autres couchées. Chaque colonne est, en première approximation, un cylindre à base circulaire coupé par des plans orthogonaux à son axe.*

a. *Vue en perspective, une section de colonne verticale est représentée par une ellipse. Il y a t'il des cas où on peut aisément déterminer la direction de son grand axe ? L'excentricité de cette ellipse dépend-elle de la hauteur de la colonne ?*

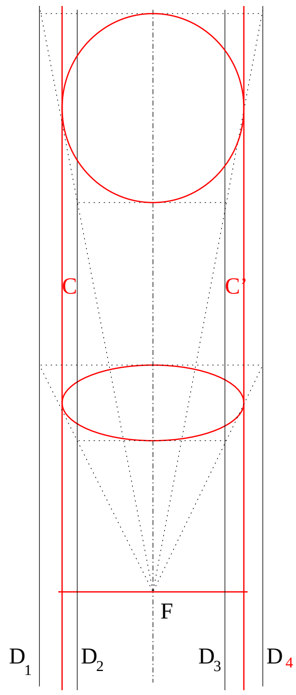
b. *On considère une rangée de colonnes de même hauteur, alignées le long de la droite de visée. Les sections des colonnes, vues en perspective, sont-elles homothétiques ?*

c. *Qu'en est-il si les colonnes sont alignées le long d'une droite parallèle à mais distincte de la droite de visée ? Les ellipses sont elles asymptotiquement homothétiques ?*

d. *Est-il possible qu'une colonne couchée soit représentée par un cercle ?*

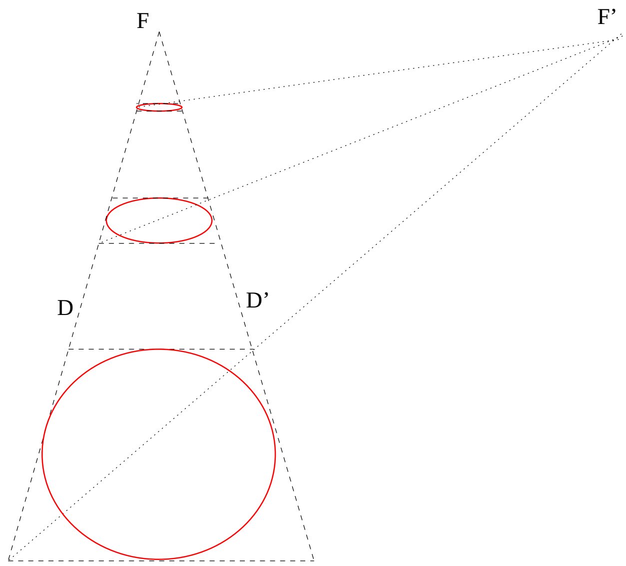
Solution de l'exercice 13. *Vue d'un temple grec.*

a. Lorsque l'axe d'une colonne verticale coupe la droite de visée, l'ensemble de la figure (colonne, axe de visée, écran) est symétrique par rapport à un plan vertical, donc la vue de la section est symétrique par rapport à une droite verticale. L'ellipse est réduite à un segment si le plan de la section passe par la caméra. Par conséquent, l'excentricité de cette ellipse dépend de la hauteur de la colonne. La largeur de l'ellipse (dans la direction horizontale) est constante. La hauteur (dans la direction verticale) tend vers l'infini lorsque la hauteur de la colonne tend vers l'infini. En effet, la colonne est inscrite dans un parallélépidède à base carrée, dont les faces verticales sont parallèles (resp. orthogonales) à la droite de visée. Vu en perspective, les arêtes verticales du parallélépipède donnent 4 droites D_1, D_2, D_3 et D_4. La projection du cylindre est une bande délimités par deux droites verticales C et C', traces sur Π des plans passant par la caméra et tangents au cylindre. Sur la figure, on a représenté la vue en perspective de 3 sections horizontales du cylindre et du parallélépipède. Celle qui se trouve dans le plan horizontal contenant la droite de visée donne un segment contenant le point de fuite F de la famille des droites parallèles à la droite de visée. Toute section horizontale du parallélépipède est un carré dont deux côtés, parallèles au plan Π, se projettent en des segments parallèles reliant D_2 à D_3 (resp. D_1 à D_4) et les deux autres côtés, parallèles à la droite de visée, se projettent sur des segments portés par des droites passant par F. On peut donc tracer exactement les trapèzes correspondant à ces carrés. On constate que la hauteur du trapèze tend vers l'infini avec la hauteur de la section. Les sections du cylindre se projettent suivant des ellipses tangentes à C, C' ainsi qu'aux côtés du trapèze correspondant. Leur hauteur tend donc aussi vers l'infini.



b. Non. Chaque section de colonne est inscrite dans un carré dont deux cotés sont parallèles à la direction de visée. Sa vue en perspective $\mathcal{E}$ est inscrite dans un trapèze $\mathcal{T}$, projection du carré. Montrons que si deux ellipses $\mathcal{E}$ et $\mathcal{E}'$ de la famille sont homothétiques, alors les trapèzes correspondants sont homothétiques. Une homothétie préserve les rapports de distances. Elle envoie le centre de $\mathcal{E}$ sur le centre de $\mathcal{E}'$, car le centre est l'unique point intérieur à $\mathcal{E}$ où la distance au bord est maximale. La distance du centre à un point de $\mathcal{E}$ atteint son minimum aux extrémités du petit axe et son maximum aux extrémités du grand axe. L'homothétie envoie donc les extrémités du petit (resp. grand) axe de $\mathcal{E}$ sur les extrémités du petit (resp. grand) axe de $\mathcal{E}'$. Par conséquent, l'homothétie envoie les deux bases du trapèze $\mathcal{T}$ circonscrit à $\mathcal{E}$, tangentes aux extrémités du petit (resp. grand) axe de $\mathcal{E}$, sur les bases du trapèze $\mathcal{T}'$ circonscrit à $\mathcal{E}'$. Orientons $\mathcal{E}$. Une homothétie de rapport positif préserve cette orientation. Pour chaque vecteur unitaire v, $\mathcal{E}$ possède exactement une tangente orientée de vecteur directeur v. L'homothétie envoie toute droite sur une droite parallèle. Par conséquent, elle envoie chacune des droites D et D', tangentes à $\mathcal{E}$ et à $\mathcal{E}'$, sur elle-même. On conclut que les trapèzes $\mathcal{T}$ et $\mathcal{T}'$ sont homothétiques.

Si les trapèzes étaient homothétiques, les diagonales de ces trapèzes formeraient deux familles de droites parallèles. Or ces diagonales sont des projections de diagonales de carrés qui sont parallèles dans un plan horizontal. Les projections sont donc concourantes (elles ont le même point de fuite F'). Par conséquent, les projections de sections de colonnes alignées ne sont pas homothétiques.



c. Si les colonnes sont alignées le long d'une droite parallèle à mais distincte de la droite de visée, les projections des sections ne sont pas plus homothétiques, mais elles restent asymptotiquement homothétiques : l'excentricité converge. En effet, considérons des colonnes très éloignées. Leurs projections étant très petites, appliquons leur une homothétie pour grossir l'ensemble de la figure (cela revient à éloigner le plan de projection). Le point de fuite F' des diagonales des trapèzes s'éloigne vers la droite. Ces diagonales deviennent asymptotiquement parallèles. Le théorème de Thalès montre que les trapèzes sont asymptotiquement homothétiques, donc les ellipses inscrites dans ces trapèzes sont asymptotiquement homothétiques.

d. Une colonne dont l'axe est la droite de visée se projette sur un cercle. D'autres colonnes partagent cette propriété, car déplacer la colonne vers la droite en gardant son axe tourné vers la caméra allonge l'ellipse dans la direction Ox' (voir exercice 12) tandis que faire tourner l'axe autour d'un axe vertical allonge l'ellipse le long de Oy'.