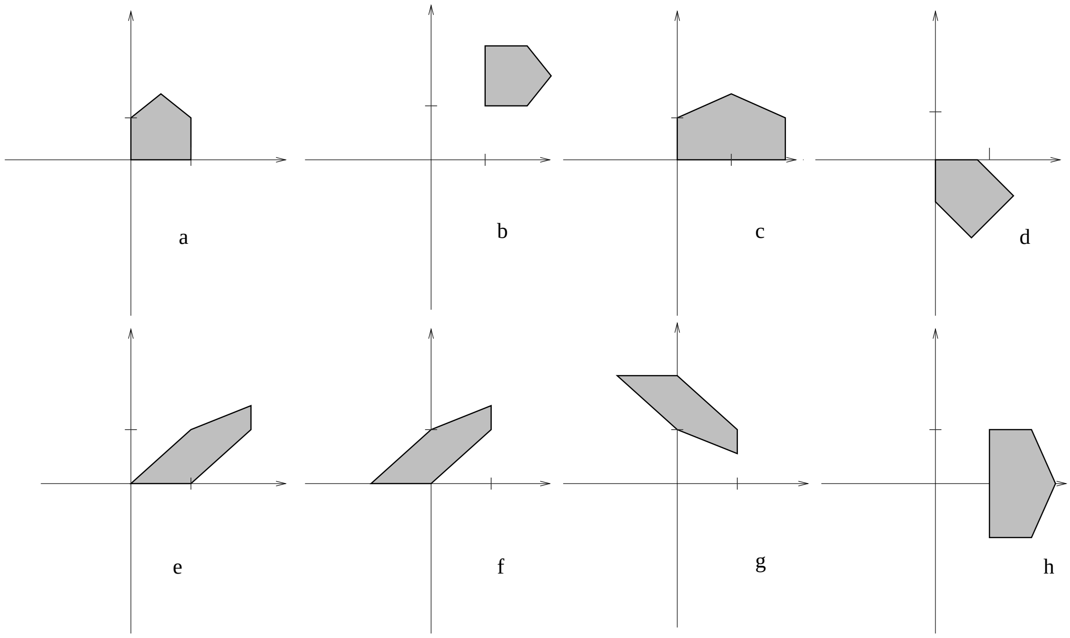
Exercices de géométrie, perspective et aliassage

Exercice 1 *La figure ci-dessous représente une maison et 7 déformations. Pour chacune des 7 déformations du dessin original, écrire la matrice d'une transformation affine qui la réalise. Cette transformation est-elle unique ?*



Exercice 2 *Quelle est la distance d'un point* $M = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ *à la droite* D *d'équation* $y = ax + b$ *dans le plan ?*

Exercice 3 *Ecrire la matrice* 3×3 *de la symétrie par rapport à la droite* D *d'équation* $y = ax + b$ *dans le plan.*

Exercice 4 *Ecrire la matrice* 4×4 *de la symétrie par rapport au plan passant par* $p_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}$ *et orthogonal au vecteur unitaire* $\vec{v} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$.

Exercice 5 *Ecrire la matrice* 4×4 *de la rotation d'angle* θ *et d'axe la droite* D *passant par* $p_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}$ *et de vecteur directeur unitaire* $\vec{v} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$.

Exercice 6 *Soit* $f : \mathbf{R}^p \to \mathbf{R}^n$ *une application linéaire injective, de matrice* L. *Soit* $g : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^p$ *une application linéaire surjective, de matrice* E. *Vérifier que la matrice du projecteur orthogonal sur l'image de* f *est* $P = L(L^\top L)^{-1}L^\top$ *et que la matrice du projecteur orthogonal sur le noyau de* g *est* $Q = I - E^\top(EE^\top)^{-1}E$.

Exercice 7 *On prend une photo depuis le point* $C = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}$, *dans la direction* $\vec{v} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$, *sur un écran situé à distance* d. *On choisit* $\nu = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ *comme vecteur de référence. Calculer les* *coordonnées* $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ *de l'image* p' *sur l'écran d'un point* $p = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ *de l'espace.*

Exercice 8 *Soit* Π_1 *le plan passant par* $O'_1 = O$ *et de vecteurs directeurs* $\vec{u_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ *et* $\vec{v_1} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. *Soit* Π_2 *le plan passant par* $O'_2 = O$ *et de vecteurs directeurs* $\vec{u_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ *et* $\vec{v_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. *Soit* $C = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$. *Calculer la matrice* 3×3 *qui représente la vue en perspective de* Π_1 *sur* Π_2 *depuis* C. *Vérifier qu'elle est inversible.*

Exercice 9 *Soit* r *un réel. On considère le cône quadratique* C *d'équation* $\{r^2x^2+(1+r^2)y^2-z^2 = 0\,;\, z < 0\}$. *Il est colorié en noir et blanc par la fonction* $\kappa(-z)$, *où* $\kappa(t) = 1$ *si la partie entière* $[t]$ *est impaire,* $\kappa(t) = 0$ *sinon. On en prend une vue à distance infinie. Quelle axe de visée, quel repère orthonormé du plan orthogonal choisir pour que l'image obtenue soit la figure 1 du chapitre sur l'aliassage ?*

Exercice 10 *Vérifier que, vue en perspective, une droite reste en général une droite. Quelles sont les exceptions ? Montrer que, vues en perspectives, les droites parallèles à une droite* D *sont en général concourantes en un point appelé* point de fuite *de* D. *Quelles sont les exceptions ? Où se trouvent les points de fuites des droites contenues dans un même plan ?*

Exercice 11 *Soit* D_+ *une demi-droite,* S *un segment de droite. Qu'est ce qu'ils donnent, vus en perspective ? Attention, il y a de multiples cas de figure.*

Exercice 12 *A quoi ressemble une sphère vue en perspective ?*

Exercice 13 *On photographie (caméra à distance finie, direction de visée horizontale) un paysage comportant les ruines d'un temple grec. La scène est jonchée de tronçons de colonnes, certaines debout, d'autres couchées. Chaque colonne est, en première approximation, un cylindre à base circulaire coupé par des plans orthogonaux à son axe.*

a. *Vue en perspective, une section de colonne verticale est représentée par une ellipse. Il y a t'il des cas où on peut aisément déterminer la direction de son grand axe ? L'excentricité de cette ellipse dépend-elle de la hauteur de la colonne ?*

b. *On considère une rangée de colonnes de même hauteur, alignées le long de la droite de visée. Les sections des colonnes, vues en perspective, sont-elles homothétiques ?*

c. *Qu'en est-il si les colonnes sont alignées le long d'une droite parallèle à mais distincte de la droite de visée ? Les ellipses sont elles asymptotiquement homothétiques ?*

d. *Est-il possible qu'une colonne couchée soit représentée par un cercle ?*