NURBS : solutions des exercices

Pierre Pansu

May 18, 2004

Exercice 1 *Une* cônique *est une courbe plane définie par une équation du second degré (i.e. le lieu des zéros d'un polynôme en deux variables de degré total 2). Soit C une cônique non vide et non dégénérée (i.e. non réduite à une ou 2 droites) et P un point de C. En coupant C par les droites passant par P, montrer que C admet une paramétrisation rationnelle.*

Solution de l'exercice 1. *Les côniques sont rationnelles.*

Soit $f(x,y) = ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$ l'équation de C. Pour $t \in \mathbf{R}$, soit D_t la droite passant par P et de pente t, i.e. de vecteur directeur $(1,t)$. Comme $P \in C$, l'équation du second degré en λ $f(P + \lambda(1,t)) = 0$ possède la solution $\lambda = 0$, donc $f(P + \lambda(1,t)) = \lambda(Q(t)\lambda + R(t))$ où Q et R sont des polynômes. Comme C est non dégénérée, le polynôme Q n'est pas nul. Le point

$$X(t) = P + \frac{R(t)}{Q(t)}(1,t)$$

parcourt la cônique C. Inversement, si $P' \in C$ n'est pas sur la droite verticale passant par P, la droite PP' a une pente $t \in \mathbf{R}$, et $P' = X(t)$. Autrement dit, la courbe X passe par tous les points de C avec au plus 2 exceptions.

Exercice 2 *Soit a un réel. Trouver des poids w_0, w_1 et w_2 de sorte que la courbe de Bézier rationnelle de degré 2 associée au polygone de contrôle $P_0 = (1,1)$, $P_1 = (0,1)$, $P_2 = (-1,1)$ et à ces poids soit le quart de cercle paramétré par*

$$t \mapsto c(\frac{t}{at+1-a}).$$

Solution de l'exercice 2. *Reparamétrisation rationnelle d'un quart de cercle.*

On cherche des poids w_0, w_1 et w_2 de sorte que la courbe de Bézier de degré 2 associée au polygone de contrôle $R_0 = (w_0, w_0, 0)$, $R_1 = (w_1, w_1, w_1)$, $R_2 = (w_2, 0, w_2)$ soit la courbe paramétrée par

$$t \mapsto ((at+1-a)^2 + t^2, (at+1-a)^2 - t^2, 2t(at+1-a)).$$

En faisant $t = 0$, il vient $w_0 = (1-a)^2$, en faisant $t = 1$ il vient $w_2 = 2$. En dérivant en $t = 0$ il vient $w_1 = 1 - a$, et on vérifie que pour tout t

$$\begin{pmatrix} (at+1-a)^2 + t^2 \\ (at+1-a)^2 - t^2 \\ 2t(at+1-a) \end{pmatrix} = (1-t)^2 \begin{pmatrix} (1-a)^2 \\ (1-a)^2 \\ 0 \end{pmatrix} + 2t(1-t) \begin{pmatrix} 1-a \\ 1-a \\ 1-a \end{pmatrix} + t^2 \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Exercice 3 *Vérifier que la courbe B-spline rationnelle de degré 2 associée au polygone de contrôle $P_0 = (1,1)$, $P_1 = (0,1)$, $P_2 = (-1,1)$, $P_3 = (-1,0)$, $P_4 = (-1,-1)$, $P_5 = (0,-1)$, $P_6 = (1,-1)$, $P_7 = (1,0)$ et $P_{i+8} = P_i$, aux poids $w_{2j+1} = 1$, $w_{2j} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ et au vecteur de noeuds $t_{2j} = t_{2j+1} = j$ est une paramétrisation périodique de période 4 du cercle unité.*

Solution de l'exercice 3. *Le cercle unité entier comme courbe B-spline rationnelle quadratique périodique.*

On note $R_i = (w_i, w_iP_i)$. On note ρ la rotation de $+\pi/2$ autour de l'origine dans le plan et σ la rotation de $\mathbf{R}^3$ définie par

$$\sigma(x_0, P) = (x_0, \rho(P)).$$

On constate que $R_{i+2} = \sigma(R_i)$ et $t_{i+2} = t_i + 1$. Par conséquent, la courbe B-spline de degré 2 Y associée à $\mathbf{t}$ et $\mathbf{R}$ satisfait

$$Y(t + 1) = \sigma(Y(t)).$$

En effectuant une projection centrale, on trouve que la courbe B-spline rationnelle de degré 2 X associée à $\mathbf{t}$, $\mathbf{w}$ et $\mathbf{P}$ satisfait

$$X(t + 1) = \rho(X(t)).$$

Il suffit donc de calculer $X(t)$ pour $t \in [0, 1[$.

Première méthode. En revenant à la définition, on calcule les $B_{i,2}$. Sur l'intervalle $[0, 1[$, on trouve que

$$B_{-1,2}(t) = (1 - t)^2, \quad B_{0,2}(t) = 2t(1 - t), \quad B_{1,2}(t) = t^2$$

et les autres $B_{i,2}$ sont nulles. Il vient

$$\sum_i w_iB_{i,2}(t) = (1 - t)^2 + \frac{1}{\sqrt{2}}2t(1 - t) + t^2 = 1 + (\sqrt{2} - 2)t + (2 - \sqrt{2})t^2$$

et

$$\begin{aligned}\sum_i w_iB_{i,2}(t)P_i &= (1 - t)^2P_{-1} + \frac{1}{\sqrt{2}}2t(1 - t)P_0 + t^2P_1\\ &= (1 + (\sqrt{2} - 2)t + (1 - \sqrt{2})t^2, \sqrt{2}t + (1 - \sqrt{2})t^2).\end{aligned}$$

d'où

$$X(t) = (\frac{1 + (\sqrt{2} - 2)t + (1 - \sqrt{2})t^2}{1 + (\sqrt{2} - 2)t + (2 - \sqrt{2})t^2}, \frac{\sqrt{2}t + (1 - \sqrt{2})t^2}{1 + (\sqrt{2} - 2)t + (2 - \sqrt{2})t^2}).$$

L'image $X([0, 1[)$ est exactement le quart du cercle unité situé entre les points P_{-1} et P_1.

Deuxième méethode. On utilise l'algorithme de de Casteljau. Pour $t \in [0, 1[= [t_1, t_2[$, on part de

$$R_{-1} = (1, 1, 0), \quad R_0 = (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}) \quad \text{et} \quad R_1 = (1, 0, 1).$$

Comme pour $j = 0$, 1, $\omega_{j,2} = t - t_j = t$,

$$R_0^1 = (1 - t)R_{-1} + tR_0 = (1 + (\frac{1}{\sqrt{2}} - 1)t, 1 + (\frac{1}{\sqrt{2}} - 1)t, \frac{1}{\sqrt{2}}t)$$

et

$$R_1^1 = (1 - t)R_0 + tR_1 = (\frac{1}{\sqrt{2}} + (1 - \frac{1}{\sqrt{2}})t, \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}t, \frac{1}{\sqrt{2}} + (1 - \frac{1}{\sqrt{2}})t).$$

Comme $\omega_{1,1}(t) = t$,

$$Y(t) = R_1^2 = (1-t)R_0^1+tR_1^1 = (1+(\sqrt{2}-2)t+(2-\sqrt{2})t^2, 1+(\sqrt{2}-2)t+(1-\sqrt{2})t^2, \sqrt{2}t+(1-\sqrt{2})t^2)$$

ce qui donne le même résultat.

Exercice 4 *On fixe $s \in \mathbf{R}$. Déterminer le point P_1 et les poids w_0, w_1, et w_2 de sorte que la courbe de Bézier rationnelle de degré 2 associée au polygone de contrôle $P_0 = (1, 1)$, $w_0 =?$, $P_1 =?$, $w_1 =?$, $P_2 = (\frac{1 - s^2}{1 + s^2}, \frac{2s}{1 + s^2})$, $w_2 =?$, soit le secteur circulaire paramétré par*

$$t \mapsto (\frac{1 - s^2t^2}{1 + s^2t^2}, \frac{2st}{1 + s^2t^2}).$$

Même question pour la paramétrisation du secteur opposé,

$$t \mapsto \left(\frac{(2t-1)^2 - s^2t^2}{(2t-1)^2 + s^2t^2}, \frac{2st(2t-1)}{(2t-1)^2 + s^2t^2}\right).$$

Solution de l'exercice 4. *Tout arc de cercle, petit ou grand, est une NURBS quadratique.*

Pour respecter les tangentes aux extrémités, le point P_1 doit se trouver à l'intersection des tangentes au cercle en P_0 et P_2. Par symétrie, la droite $0P_1$ est orthogonale à la droite P_0P_2, laquelle est orthogonale à la droite AP_2 (où $A = (-1, 0)$), laquelle a pour pente s. Par conséquent $P_1 = (1, s)$.

On cherche des poids de sorte que

$$Y_2(t) = (1 + s^2t^2, 1 - s^2t^2, 2st).$$

En faisant $t = 0$ et $t = 1$, on trouve que $w_0 = 1$ et $w_2 = 1 + s^2$, puis que $w_1 = 1$ convient.

Ensuite on cherche des poids de sorte que

$$Y_2(t) = ((2t-1)^2 + s^2t^2, (2t-1)^2 - s^2t^2, 2st(2t-1)).$$

En faisant $t = 0$ et $t = 1$, on trouve que $w_0 = 1$ et $w_2 = 1 + s^2$, puis que $w_1 = -1$ convient.

Exercice 5 *Montrer que toute courbe de Bézier rationnelle de degré 2 est contenue dans une cônique.*

Solution de l'exercice 5. *Une courbe de Bezier rationnelle quadratique est contenue dans une cônique.*

Une telle courbe paramétrée est déterminée par trois points de contrôle P_0, P_1 et P_2. Si ces points sont alignés, la courbe est contenue dans une droite, qui est une cônique particulière. Sinon, on peut sans perte de généralité supposer que $P_1 = (0, 0)$, $P_0 = (1, 0)$ et $P_2 = (0, 1)$. En effet, tout triangle est l'image du triangle de référence par une transformation affine, et les transformations affines préservent les côniques. Notons $D(t) = (1-t)^2w_0 + 2t(1-t)w_1 + t^2w_2$. Les coordonnées de $X(t) = (x(t), y(t))$ sont

$$x(t) = \frac{(1-t)^2w_0}{D(t)} \quad \text{et} \quad y(t) = \frac{t^2w_2}{D(t)}.$$

On calcule

$$x(t)y(t) = \frac{1}{4}\left(\frac{2t(1-t)}{D(t)}\right)^2 w_0w_2 \quad \text{et} \quad x(t) + y(t) = 1 - w_1\frac{2t(1-t)}{D(t)}$$

d'où

$$xy = \frac{1}{4}\frac{w_0w_2}{w_1^2}(1 - x - y)^2$$

ce qui est l'équation d'une cônique.

Attention, seul un arc de la cônique est parcouru (cf. l'exercice 4).

On voit qu'en variant les poids, on obtient une famille à deux paramètres de coniques paramétrées passant par deux points avec des tangentes prescrites. Or une cônique dépend de 5 paramètres. En effet, c'est l'ensemble des solutions d'une équation de la forme

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0,$$

et deux équations définissent la même cônique si et seulement si elles sont proportionnelles. La condition de passer par un point donné se traduit par une équation linéaire sur les coefficients. De même, prescrire la tangente en ce point représente encore une équation linéaire. Il ne reste donc qu'un degré de liberté pour une cônique passant par deux points fixés avec des tangentes prescrites. On conclut qu'en jouant sur les poids, on peut obtenir plusieurs paramétrisations de la même cônique. C'est effectivement le cas, comme on l'a vu dans l'exercice 2.

Exercice 6 *Sans changer de polygone de contrôle, peut on déformer la courbe de Bézier cubique de l'exercice 5 sur les B-splines en une courbe de Bezier cubique rationnelle γ telle qu'en raccordant γ à sa translatée de vecteur $(2,0)$, on obtienne une courbe de classe G^2 ?*

Solution de l'exercice 6. *Raccord G^2 obtenu en ajustant des poids.*

La courbure au point $M=(1,0)$ de la courbe de Bezier $\bar{\gamma}$ vaut $-\frac{\sqrt{2}}{3}$ (exercice 14 sur les B-splines). Or celle-ci est symétrique par rapport au point $(2,0)$. Par conséquent, sa courbure au point $N=(3,0)$ vaut $\frac{\sqrt{2}}{3}$. Si on introduit des poids, la courbure en M devient

$$-\frac{\sqrt{2}}{3}\frac{w_1 w_2}{w_0^2}$$

et la courbure en N devient

$$\frac{\sqrt{2}}{3}\frac{w_1 w_2}{w_3^2}.$$

Pour qu'elles soient égales (condition nécéssaire de raccord G^2 avec la translatée), il faut que $w_1=0$, $w_2=0$ ou que $w_0^2=-w_3^2$. On sort donc du cadre de validité de la formule **??**. Néanmoins, le choix $w_1=w_2=0$ donne un segment de droite horizontal, qui est une solution au problème posé.