Courbes B-splines : solutions des exercices

Exercice 1 *On pose $t_0 = t_1 = 0$, $t_2 = 1$, $t_3 = 2$, $t_4 = 3$, etc.. Calculer $B_{i,k}$ pour $k \leq 3$ et $0 \leq i \leq 3-k$.*

Solution de l'exercice 1. *Cas du vecteur de noeuds* $(0, 0, 1, 2, 3, 4, \ldots)$.

On remarque que les fonctions $B_{1,k}$ relatives au vecteur de noeuds $(0, 0, 1, 2, 3, 4, \ldots)$ coincident avec les fonctions $B_{0,k}$ relatives au vecteur de noeuds uniforme. Cela fournit la colonne de droite du tableau suivant.

	$i=0$	$i=1$
$B_{i,0}$	0	$\mathbf{1}_{[0,1[}$
$\omega_{i,1}$	0	t
$1-\omega_{i,1}$		$1-t$
$B_{i,1}$	$(1-t)\mathbf{1}_{[0,1[}$	$t\mathbf{1}_{[0,1[} + (2-t)\mathbf{1}_{[1,2[}$
$\omega_{i,2}$	t	$t/2$
$1-\omega_{i,2}$		$(2-t)/2$
$B_{i,2}$	$\frac{t(4-3t)}{2}\mathbf{1}_{[0,1[} + \frac{(2-t)^2}{2}\mathbf{1}_{[1,2[}$	$\frac{t^2}{2}\mathbf{1}_{[0,1[} + \frac{-2t^2+6t-3}{2}\mathbf{1}_{[1,2[} + \frac{(3-t)^2}{2}\mathbf{1}_{[2,3[}$
$\omega_{i,3}$	$t/2$	$t/3$
$1-\omega_{i,3}$		$(3-t)/3$

et enfin $B_{0,3} = \dfrac{t^2(-11t+18)}{12}\mathbf{1}_{[0,1[} + \dfrac{7t^3-36t^2+36t-18}{12}\mathbf{1}_{[1,2[} + \dfrac{(3-t)^3}{6}\mathbf{1}_{[2,3[}$.

Exercice 2 *On pose $t_0 = t_1 = t_2 = 0$, $t_3 = 1$, $t_4 = 2$, $t_5 = 3$, etc.. Calculer $B_{i,k}$ pour $k \leq 3$ et $0 \leq i \leq 3-k$.*

Solution de l'exercice 2. *Cas du vecteur de noeuds* $(0, 0, 0, 1, 2, 3, \ldots)$.

On remarque que les fonctions $B_{1,k}$ relatives au vecteur de noeuds $(0, 0, 0, 1, 2, 3, \ldots)$ coincident avec les fonctions $B_{0,k}$ relatives au vecteur de noeuds $(0, 0, 1, 2, 3, 4, \ldots)$ calculées dans l'exercice précédent. Cela fournit la colonne de droite du tableau suivant.

	$i=0$	$i=1$
$B_{i,0}$	0	0
$\omega_{i,1}$	0	0
$1-\omega_{i,1}$		1
$B_{i,1}$	0	$(1-t)\mathbf{1}_{[0,1[}$
$\omega_{i,2}$	0	t
$1-\omega_{i,2}$		$1-t$
$B_{i,2}$	$(1-t)^2\mathbf{1}_{[0,1[}$	$\frac{t(4-3t)}{2}\mathbf{1}_{[0,1[} + \frac{(2-t)^2}{2}\mathbf{1}_{[1,2[}$
$\omega_{i,3}$	t	$t/2$
$1-\omega_{i,3}$		$(2-t)/2$

d'où $B_{0,3} = \dfrac{t(7t^2-18t+12)}{4}\mathbf{1}_{[0,1[} + \dfrac{(2-t)^3}{4}\mathbf{1}_{[1,2[}$.

Exercice 3 *On pose $t_0 = t_1 = t_2 = t_3 = 0$, $t_4 = 1$, $t_5 = 2$, $t_6 = 3$, etc.. Calculer $B_{i,k}$ pour $k \leq 3$ et $0 \leq i \leq 3-k$.*

Solution de l'exercice 3. *Cas du vecteur de noeuds* $(0, 0, 0, 0, 1, 2, \ldots)$.

On remarque que les fonctions $B_{1,k}$ relatives au vecteur de noeuds $(0, 0, 0, 0, 1, 2, \ldots)$ coincident avec les fonctions $B_{0,k}$ relatives au vecteur de noeuds $(0, 0, 0, 1, 2, 3, \ldots)$ calculées dans l'exercice précédent. Cela fournit la colonne de droite du tableau suivant.

	$i=0$	$i=1$
$B_{i,0}$	0	0
$\omega_{i,1}$	0	0
$1-\omega_{i,1}$		1
$B_{i,1}$	0	0
$\omega_{i,2}$	0	0
$1-\omega_{i,2}$		1
$B_{i,2}$	0	$(1-t)^2\mathbf{1}_{[0,1[}$
$\omega_{i,3}$	0	t
$1-\omega_{i,3}$		$1-t$
$B_{i,3}$	$(1-t)^3\mathbf{1}_{[0,1[}$	$\dfrac{t(7t^2-18t+12)}{4}\mathbf{1}_{[0,1[}+\dfrac{(2-t)^3}{4}\mathbf{1}_{[1,2[}$

Exercice 4 *On pose $t_0=0$, $t_1=1$, $t_2=2$, $t_3=t_4=3$, $t_5=4$, $t_6=5$, $t_7=6$ et $t_8=7$. Calculer $B_{i,k}$ pour $k\leq 2$ et $0\leq i\leq 5$, ainsi que $B_{0,3}$ et $B_{1,3}$. Montrer que (sauf pour t entier si $k=0$ et $t=3$ si $k=1$) $B_{i,k}(6-t)=B_{6-k-i,k}(t)$.*

Solution de l'exercice 4. *Cas du vecteur de noeuds* $(0,1,2,3,3,4,5,6)$.

Par définition, $B_{3,0}\equiv 0$ et les autres B-splines de degré 0 sont les fonctions caractéristiques d'intervalles $[i,i+1[$.

On tabule $\omega_{i,1}$: $\omega_{0,1}(t)=t$, $\omega_{1,1}(t)=t-1$, $\omega_{2,1}(t)=t-2$, $\omega_{3,1}(t)=0$, $\omega_{4,1}(t)=t-3$, $\omega_{5,1}(t)=t-4$, $\omega_{6,1}(t)=t-5$.

Il vient $B_{0,1}=t\mathbf{1}_{[0,1[}+(2-t)\mathbf{1}_{[1,2[}$, $B_{1,1}=(t-1)\mathbf{1}_{[1,2[}+(3-t)\mathbf{1}_{[2,3[}$, $B_{2,1}=(t-2)\mathbf{1}_{[2,3[}$, $B_{3,1}=(4-t)\mathbf{1}_{[3,4[}$, $B_{4,1}=(t-3)\mathbf{1}_{[3,4[}+(5-t)\mathbf{1}_{[4,5[}$, $B_{5,1}=(t-4)\mathbf{1}_{[4,5[}+(6-t)\mathbf{1}_{[5,6[}$, $B_{6,1}=(t-5)\mathbf{1}_{[5,6[}+\cdots$.

On tabule $\omega_{i,2}$. $\omega_{0,2}=\frac{t}{2}$, $\omega_{1,2}=\frac{t-1}{2}$, $\omega_{2,2}=t-2$, $\omega_{3,2}=t-3$, $\omega_{4,2}=\frac{t-3}{2}$, $\omega_{5,2}=\frac{t-4}{2}$, $\omega_{6,2}=\frac{t-5}{2}$.

Il vient $B_{0,2}=\frac{t^2}{2}\mathbf{1}_{[0,1[}+\frac{-2t^2+6t-3}{2}\mathbf{1}_{[1,2[}+\frac{(3-t)^2}{2}\mathbf{1}_{[2,3[}$, $B_{1,2}=\frac{(t-1)^2}{2}\mathbf{1}_{[1,2[}+\frac{(3-t)(3t-5)}{2}\mathbf{1}_{[2,3[}$, $B_{2,2}=(t-2)^2\mathbf{1}_{[2,3[}+(4-t)^2\mathbf{1}_{[3,4[}$, $B_{3,2}=\frac{(t-3)(-3t+13)}{2}\mathbf{1}_{[3,4[}+\frac{(5-t)^2}{2}\mathbf{1}_{[4,5[}$, $B_{4,2}=\frac{(t-3)^2}{2}\mathbf{1}_{[3,4[}+\frac{-2t^2+18t-39}{2}\mathbf{1}_{[4,5[}+\frac{(6-t)^2}{2}\mathbf{1}_{[5,6[}$, $B_{5,2}=\frac{(t-4)^2}{2}\mathbf{1}_{[4,5[}+\frac{-2t^2+22t-59}{2}\mathbf{1}_{[5,6[}+\frac{(t-7)^2}{2}\mathbf{1}_{[6,7[}$.

On tabule $\omega_{i,3}$. $\omega_{0,3}=\frac{t}{3}$, $\omega_{1,3}=\frac{t-1}{2}$, $\omega_{2,3}=\frac{t-2}{2}$.

Il vient $B_{0,3}=\frac{t^3}{6}\mathbf{1}_{[0,1[}+\frac{-7t^3+27t^2-27t+9}{12}\mathbf{1}_{[1,2[}+\frac{(3-t)^2(11t-15)}{12}\mathbf{1}_{[2,3[}$,

$B_{1,3}=\frac{(t-1)^3}{4}\mathbf{1}_{[1,2[}+\frac{-5t^3+33t^2-69t+47}{4}\mathbf{1}_{[2,3[}+\frac{(4-t)^3}{2}\mathbf{1}_{[3,4[}$.

La symétrie s'obtient en appliquant le résultat du cours à $a=3$ et $I=7$. Si $k\geq 1$, les fonctions $B_{i,k}$ sont continues, donc la formule s'étend aux valeurs entières de t, à l'exception de $B_{2,1}(3)\neq B_{3,1}(3)$.

Exercice 5 *Soit $B_{i,k}$ une fonction B-spline uniforme, i.e. relative au vecteur de noeuds uniforme $t_i=i$. En utilisant la formule pour la dérivée, vérifier que pour tout t,*

$$B_{i,k}=\int_{t-1}^{t}B_{i,k-1}(s)\,ds.$$

Solution de l'exercice 5. *Les fonctions B-splines uniformes comme moyennes mobiles.*

Comme $t_{i+k}-t_i=k$,

$$\begin{aligned} B'_{i,k}(t) &= B_{i,k-1}(t)-B_{i+1,k-1}(t)\\ &= B_{i,k-1}(t)-B_{i,k-1}(t-1), \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned} B_{i,k}(t) &= \int_i^t B'_{i,k}(s)\,ds \\ &= \int_i^t B_{i,k-1}(s)\,ds - \int_{i-1}^{t-1} B_{i,k-1}(s)\,ds \\ &= \int_{t-1}^t B_{i,k-1}(s)\,ds. \end{aligned}$$

Exercice 6 *Construire un vecteur de noeuds et des points de contrôle (le moins possible) dans le plan de sorte que la B-spline de degré 3 associée passe par les points $M = (1,0)$ et $N = (3,0)$ avec en ces deux points une tangente dirigée par $(1,1)$.*

Solution de l'exercice 6. *Cubique passant par deux points donnés avec des tangentes orientées données.*

Les directions des tangentes aux extrémités sont données par les vecteurs P_0P_1 et $P_{m-k-1}P_{m-k}$. Comme les tangentes prescrites sont distinctes et parallèles, les points P_1 et P_{m-k-1} sont forcément distincts, cela donne au moins 4 points de contrôle. Le minimum est atteint par les courbes de Bézier, pour lesquelles il n'y a aucun noeud en dehors des extrémités. Le vecteur de noeud est $(0,0,0,0,1,1,1,1)$. On peut choisir comme points de contrôle $P_0 = M$, $P_1 = (2,1)$, $P_2 = (2,-1)$ et $P_3 = N$.

Exercice 7 *Construire une courbe B-spline périodique de classe C^2 tangente aux côtés du carré de sommets $O = (0,0)$, $P = (2,0)$, $Q = (2,2)$ et $R = (0,2)$. Est-ce un cercle ?*

Solution de l'exercice 7. *Construction d'une courbe tangente à son polygone de contrôle.*

On choisit un vecteur de noeuds uniforme. D'après la proposition du cours, si on place trois points de contrôle sur chaque côté, on aura les tangences voulues. On pose donc $P_0 = O$, $P_1 = (1,0)$, $P_2 = P$, $P_3 = (2,1)$, $P_4 = Q$, $P_5 = (1,2)$, $P_6 = R$, $P_7 = (0,1)$, $P_8 = O$. On complète par périodicité de période 8.

La courbe obtenue n'est certainement pas un cercle. En effet, l'expression $\| X_3(t) - (1,1) \|^2$ est sur l'intervalle $[0,1[$ un polynôme de degré 6 dont le coefficient directeur ne s'annule pas, car c'est la somme de deux carrés.

Exercice 8 *Soit X_3 la courbe B-spline uniforme périodique de degré 3 ayant le carré unité pour polygone de contrôle. Montrer qu'elle est invariante par les rotations d'ordre 4 autour du point $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$. En déduire que l'une de ses homothétiques est tangente aux 4 côtés du carré. Est-ce un cercle ?*

Solution de l'exercice 8. *Périodicité de la courbe B-spline dont le polygone de contrôle est un carré.*

Soit ρ la rotation de $\pi/2$ autour du point $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$. Alors $\rho(P_i) = P_{i+1}$. Comme le vecteurs de noeuds satisfait $t_{i+1} = t_i + 1$, le cours donne que $\rho(X_3(t)) = X_3(t+1)$.

Soit m le maximum de la fonction continue périodique x_3, atteint en un point $\tau \in \mathbf{R}$. Alors la tangente à la courbe en $X_3(\tau)$ est la droite d'équation $\{x = m\}$. Notons Y l'image de la courbe X_3 par l'homothétie de centre $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ et de rapport $\frac{1}{2m-1}$. Alors Y est tangent au côté $\{x = 1\}$ du carré en $Y(\tau)$. Par conséquent, aux points $Y(\tau+1)$, $Y(\tau+2)$ et $Y(\tau+3)$, Y est tangente aux autres côtés du carré.

Ce n'est pas un cercle, pour la raison invoquée lors de l'exercice 7.

Exercice 9 *On reprend la courbe de l'exercice 8. Montrer qu'elle est symétrique par rapport aux diagonales et aux médianes du carré. En déduire la position des points $X_3(i)$, $i \in \mathbf{Z}$.*

Solution de l'exercice 9. *Symétries de la courbe B-spline dont le polygone de contrôle est un carré.*

Soit $\sigma(x, y) = (y, x)$ la symétrie par rapport à l'une des diagonales du carré de sommets $P_0 = (0, 0)$, $P_1 = (1, 0)$, $P_2 = (1, 1)$, $P_3 = (0, 1)$. Alors $\sigma(P_i) = P_{4-i}$. Comme le vecteur de noeuds satisfait $t_{8-i} = 8 - t_i$, le cours donne que $\sigma(X_3(t)) = X_3(8 - t)$, i.e., la courbe est symétrique.

Soit $\sigma'(x, y) = (1 - x, y)$ la symétrie par rapport à l'une des médianes du carré. Alors $\sigma(P_i) = P_{5-i}$. Comme le vecteur de noeuds satisfait $t_{9-i} = 9 - t_i$, le cours donne que $\sigma(X_3(t)) = X_3(9 - t)$, i.e., la courbe est symétrique.

Les symétries par rapport aux autres diagonales et médianes s'obtiennent en composant σ et σ'.

Soit $t = 4$. Alors $8 - t = t$, donc $X_3(4)$ est fixé par σ, il est sur une diagonale du carré. Par périodicité, tous les points de la courbe correspondant aux valeurs entières du paramètre sont sur l'une des deux diagonales.

Exercice 10 *On reprend la courbe de l'exercice 6. Montrer qu'elle admet une symétrie centrale.*

Solution de l'exercice 10. *Symétrie centrale.*

Soit ρ la symétrie centrale par rapport au point $(2, 0)$. Alors $\rho(P_i) = P_{4-i}$. Le vecteur de noeuds de Bézier satisfait $t_{8-i} = 1 - t_i$, donc le cours donne que $\rho(X_3(t)) = X_3(1 - t)$, i.e., la courbe possède une symétrie centrale.

Exercice 11 *Soit $t_0 = t_1 = t_2 = t_3 = 0$, $t_4 = t_5 = t_6 = t_7 = 1$, $P_0 = (1, 0)$, $P_1 = (2, 1)$, $P_2 = (2, -1)$, $P_3 = (3, 0)$. Au moyen de l'algorithme de de Casteljau, calculer $X_3(t)$ pour $t \in [0, 1[$. Faire la construction géométrique pour $t = 1/2$ et $t = 1/4$.*

Solution de l'exercice 11. *Courbe de Bézier avec deux points et deux tangentes prescrites.*

Comme tous les $\omega_{j,3-r}$ valent t, il vient

$$\begin{array}{ccccccc}
P_0 & & P_1 & & P_2 & & P_3 \\
& (1-t)P_0 + tP_1 & & (1-t)P_1 + tP_2 & & (1-t)P_2 + tP_3 & \\
& & (1-t)^2 P_0 + 2t(1-t)P_1 + t^2 P_2 & & (1-t)^2 P_1 + 2t(1-t)P_2 + t^2 P_3 & & \\
& & & (1-t)^3 P_0 + 3t(1-t)^2 P_1 + 3t^2(1-t)P_2 + t^3 P_3 & & &
\end{array}$$

d'où

$$X_3(t) = ((1-t)^3 + 6t(1-t)^2 + 6t^2(1-t) + 3t^3, 3t(1-t)^2 - 3t^2(1-t)) = (1 + 3t - 3t^2 + 2t^3, 3t - 9t^2 + 6t^3).$$

Construction géométrique : elle donne pour $X_3(1/2)$ le centre du carré et pour tangente une médiane du carré.

Exercice 12 *Construire une courbe de classe C^2 reliant $P = (-2, 0)$ à $Q = (2, 0)$ avec tangente horizontale aux extrémités, en forme de bosse (resp. de boucle).*

Solution de l'exercice 12. *Courbe en bosse ou en boucle.*

On utilise des B-splines de degré 3. Il faut au moins 5 points de contrôle. En effet, si on ne prend que 4 points, ils devront être alignés pour que la condition sur les tangentes soit satisfaite. La courbe B-spline correspondante serait contenue dans une droite. On pose donc $t_0 = t_1 = t_2 = t_3 = 0$, $t_4 = 1$, $t_5 = t_6 = t_7 = t_8 = 2$. Les points $P_0 = P$, P_1, P_3 et $P_4 = Q$ sont nécessairement alignés. Pour simplifier, on choisit un polygone de contrôle symétrique par rapport à la médiatrice du segment PQ, soit $P_1 = (-a, 0)$, $P_2 = (0, b)$ et $P_3 = (a, 0)$. Lorsque b varie, le polygone de contrôle se déforme suivant une famille d'*affinités* (transformations affines fixant la droite PQ et dilatant la médiatrice). Il en est donc de même de la courbe B-spline associée. On peut donc fixer $b = 2$ sans perdre de généralité. En revanche, le paramètre a joue un rôle intéressant, alors on le garde. On calcule les poids $\omega_{1,3}(t) = \omega_{2,2}(t) = \omega_{3,1}(t) = t$, $\omega_{2,3}(t) = \omega_{3,3}(t) = \omega_{3,2}(t) = t/2$. Pour $t \in [0,1[= [t_3, t_4[$, il vient

$$P_1^1 = (1-t)P_0 + tP_1 = (-2+2t+2at, 0), \quad P_2^1 = (1-t2)P_1 + t2P_2 = (a(2-t), t),$$

$$P_3^1 = (1-t2)P_2 + t2P_3 = (-at, 2-t),$$

puis

$$P_2^2 = (1-t)P_1^1 + tP_2^1 = (-2(1-t)^2 + a(4t-3t^2), 0), \quad P_3^2 = (1-t2)P_2^1 + t2P_3^1 = (2a(1-t), 2t-t^2),$$

et enfin

$$X_3(t) = P_3^3 = (1-t)P_2^2 + tP_3^2 = (-2(1-t)^3 + 3at(2-3t+t^2), 3t^2 - 2t^3).$$

Si on pose $u = t-1$, alors

$$X_3(t) = (-2u^3 + 3au(1-u^2), 1-3u^2-2u^3).$$

La partie de la courbe paramétrée par $[1,2]$ s'obtient par symétrie. Comme la coordonnée $y(t)$ n'est pas une fonction paire de u, la dérivée troisième est discontinue en $t = 1$, comme on s'y attend pour une B-spline de degré 3 en un noeud simple.

On constate que si $a \neq 0$, la vitesse en $t = 1$ est horizontale. Si $a > 0$, elle est orientée vers la droite, ce qui suggère une forme en bosse. En fait, lorsque $a \geq 0$, les deux coordonnées sont fonctions strictement croissantes de t.

Lorsque $a < 0$, la coordonnée x atteint un maximum strictement positif avant de revenir sur la médiatrice, d'où une forme en boucle.

Lorsque $a = 0$, la courbe a un point de rebroussement en $t = 1$, avec la médiatrice comme tangente. On verra ci-dessous qu'il s'agit d'un phénomène général : si 3 points de contrôôle consécutifs sont alignés, la B-spline de degré 3 est tangente au côté correspondant du polygone de contrôle.

Exercice 13 *Soit* $t_0 = t_1 = t_2 = t_3 = 0$, $t_4 = t_5 = t_6 = t_7 = 1$, $P_0 = (1,0)$, $P_1 = (2,1)$, $P_2 = (2,-1)$, $P_3 = (3,0)$. *Au moyen de l'algorithme de de Casteljau, calculer la dérivée* $X_3'(t)$ *pour* $t \in [0,1[$.

Solution de l'exercice 13. *Dérivée de la courbe de Bézier avec deux points et deux tangentes prescrites.*

Il vient $Q_j^1 = 3(P_j - P_{j-1})$ Comme tous les $\omega_{j,3-r}$ valent t, il vient

$$\begin{array}{ccc} 3(P_1 - P_0) & 3(P_2 - P_1) & 3(P_3 - P_2) \\ -3(1-t)P_0 + 3(1-2t)P_1 + 3tP_2 & & -3(1-t)P_1 + 3(1-2t)P_2 + 3tP_3 \\ & -3(1-t)^2P_0 + 3(1-4t+3t^2)P_1 + 3(2t-3t^2)P_2 + 3t^2P_3 & \end{array}$$

Soit

$$\begin{aligned} X_3'(t) &= -3(1-t)^2(1,0) + 3(1-4t+3t^2)(2,1) + 3(2t-3t^2)(2,-1) + 3t^2(3,0) \\ &= (3-6t+6t^2, 3-18t+18t^2). \end{aligned}$$

Exercice 14 *Montrer qu'aucune courbe convexe ne satisfait les conditions aux limites de l'exercice 6. Construire une solution de l'exercice 6 qui coupe toute droite en au plus* 3 *points.*

Solution de l'exercice 14. *Courbe de variation minimale.*

Soit $t \mapsto (x(t), y(t))$, $t \in [0,1]$, une courbe passant pas M et N, dont le vecteur vitesse en M et en N est positivement proportionnel à $(1,1)$. La droite MN coupe nécessairement γ en 3 points. En effet, la fonction y (seconde coordonnée) est continue sur $[0,1]$, s'annule en 0 et en 1. Comme

$y'(0) > 0$, y prend des valeurs strictement positives au voisinage à droite de 0. Comme $y'(1) > 0$, y prend des valeurs strictement positives au voisinage à gauche de 1. D'après le théorème des valeurs intermédiaires, la fonction y prend la valeur 0 en au moins un point de $]0, 1[$, d'où les 3 points d'intersection avec la droite MN.

La courbe de Bézier décrite dans la solution de l'exercice 6 convient. En effet, le polygone de contrôle n'a que 3 segments donc ne peut couper transversalement une droite qu'en au plus 3 points.

Exercice 15 *Calculer la courbure au point M de la courbe de Bézier construite dans l'exercice 6.*

Solution de l'exercice 15. *Courbure à l'origine d'une courbe de Bézier.*

Comme $P_0 = M = (1, 0)$, $P_1 = (2, 1)$ et $P_2 = (2, -1)$, l'aire algébrique du triangle $P_0P_1P_2$ vaut -1 et la longueur du côté P_0P_1 vaut $\sqrt{2}$ donc la courbure en M de la courbe de Bézier vaut $-\dfrac{\sqrt{2}}{3}$.