Exercices sur les courbes B-splines

Exercice 1 *On pose* $t_0 = t_1 = 0$, $t_2 = 1$, $t_3 = 2$, $t_4 = 3$, *etc.. Calculer* $B_{i,k}$ *pour* $k \leq 3$ *et* $0 \leq i \leq 3-k$.

Exercice 2 *On pose* $t_0 = t_1 = t_2 = 0$, $t_3 = 1$, $t_4 = 2$, $t_5 = 3$, *etc.. Calculer* $B_{i,k}$ *pour* $k \leq 3$ *et* $0 \leq i \leq 3-k$.

Exercice 3 *On pose* $t_0 = t_1 = t_2 = t_3 = 0$, $t_4 = 1$, $t_5 = 2$, $t_6 = 3$, *etc.. Calculer* $B_{i,k}$ *pour* $k \leq 3$ *et* $0 \leq i \leq 3-k$.

Exercice 4 *On pose* $t_0 = 0$, $t_1 = 1$, $t_2 = 2$, $t_3 = t_4 = 3$, $t_5 = 4$, $t_6 = 5$, $t_7 = 6$ *et* $t_8 = 7$. *Calculer* $B_{i,k}$ *pour* $k \leq 2$ *et* $0 \leq i \leq 5$, *ainsi que* $B_{0,3}$ *et* $B_{1,3}$. *Montrer que (sauf pour* t *entier si* $k = 0$ *et* $t = 3$ *si* $k = 1$*)* $B_{i,k}(6-t) = B_{6-k-i,k}(t)$.

Exercice 5 *Soit* $B_{i,k}$ *une fonction B-spline uniforme, i.e. relative au vecteur de noeuds uniforme* $t_i = i$. *En utilisant la formule pour la dérivée, vérifier que pour tout* t,

$$B_{i,k} = \int_{t-1}^{t} B_{i,k-1}(s)\, ds.$$

Exercice 6 *Construire un vecteur de noeuds et des points de contrôle (le moins possible) dans le plan de sorte que la B-spline de degré 3 associée passe par les points* $M = (1,0)$ *et* $N = (3,0)$ *avec en ces deux points une tangente dirigée par* $(1,1)$.

Exercice 7 *Construire une courbe B-spline périodique de classe* C^2 *tangente aux côtés du carré de sommets* $O = (0,0)$, $P = (2,0)$, $Q = (2,2)$ *et* $R = (0,2)$. *Est-ce un cercle ?*

Exercice 8 *Soit* X_3 *la courbe B-spline uniforme périodique de degré 3 ayant le carré unité pour polygone de contrôle. Montrer qu'elle est invariante par les rotations d'ordre 4 autour du point* $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$. *En déduire que l'une de ses homothétiques est tangente aux 4 côtés du carré. Est-ce un cercle ?*

Exercice 9 *On reprend la courbe de l'exercice 8. Montrer qu'elle est symétrique par rapport aux diagonales et aux médianes du carré. En déduire la position des points* $X_3(i)$, $i \in \mathbf{Z}$.

Exercice 10 *On reprend la courbe de l'exercice 6. Montrer qu'elle admet une symétrie centrale.*

Exercice 11 *Soit* $t_0 = t_1 = t_2 = t_3 = 0$, $t_4 = t_5 = t_6 = t_7 = 1$, $P_0 = (1,0)$, $P_1 = (2,1)$, $P_2 = (2,-1)$, $P_3 = (3,0)$. *Au moyen de l'algorithme de de Casteljau, calculer* $X_3(t)$ *pour* $t \in [0,1[$. *Faire la construction géométrique pour* $t = 1/2$ *et* $t = 1/4$.

Exercice 12 *Construire une courbe de classe* C^2 *reliant* $P = (-2,0)$ *à* $Q = (2,0)$ *avec tangente horizontale aux extrémités, en forme de bosse (resp. de boucle).*

Exercice 13 *Soit* $t_0 = t_1 = t_2 = t_3 = 0$, $t_4 = t_5 = t_6 = t_7 = 1$, $P_0 = (1,0)$, $P_1 = (2,1)$, $P_2 = (2,-1)$, $P_3 = (3,0)$. *Au moyen de l'algorithme de de Casteljau, calculer la dérivée* $X_3'(t)$ *pour* $t \in [0,1[$.

Exercice 14 *Montrer qu'aucune courbe convexe ne satisfait les conditions aux limites de l'exercice 6. Construire une solution de l'exercice 6 qui coupe toute droite en au plus 3 points.*

Exercice 15 *Calculer la courbure au point* M *de la courbe de Bézier construite dans l'exercice 6.*