Aliassage : exercices

Pierre Pansu

February 13, 2004

Exercice 1 *Soit k la fonction périodique de période 2π qui vaut 1 sur $[0,\pi[$ et -1 sur $[-\pi,0[$. Calculer ses coefficients de Fourier.*

Solution de l'exercice 1. *Série de Fourier d'un créneau.*

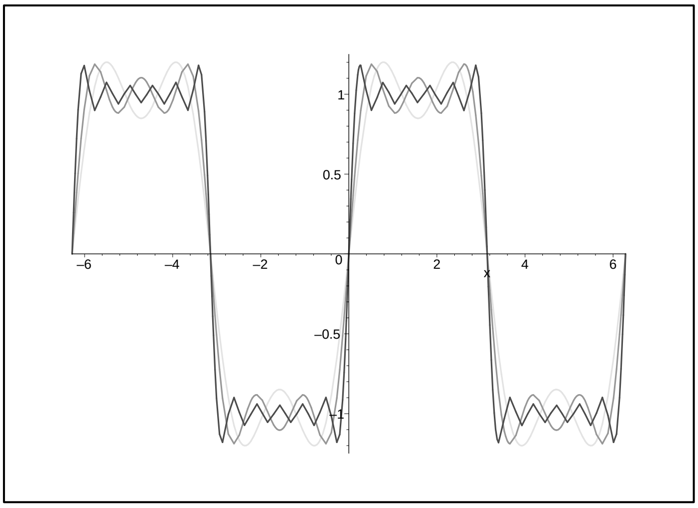
On calcule

$$\hat{k}_n = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} k(x)e^{-inx}\,dx = \frac{2}{\pi i n}$$

si n est impair, et est nul si n est pair. Il vient

$$k(x) = \sum_{n\in\mathbf{Z}} \frac{2}{\pi i(2n+1)} e^{i(2n+1)x} = \sum_{n\in\mathbf{N}} \frac{4}{\pi(2n+1)} \sin((2n+1)x).$$

La figure représente la somme des 2 (resp. 3, resp. 4) premiers termes de cette série. On constate que la convergence vers la fonction k est particulièrement lente au voisinage des multiples de π, i.e. des discontinuités de k.



Exercice 2 *Soit f une fonction périodique de période 2π. Soit $N \in \mathbf{N}$. On note*

$$g_N = \sum_{k\in\mathbf{Z}} f(\frac{2k\pi}{N})\delta_{\frac{2k\pi}{N}},$$

où δ_x désigne la masse de Dirac en x. Calculer les coefficients de Fourier de g_N. En utilisant la décomposition de f en série de Fourier

$$f(x) = \sum_{n\in\mathbf{Z}} \hat{f}_n e^{inx},$$

montrer que

$$(\hat{g_N})_n = \frac{N}{2\pi}\sum_{p\in\mathbf{Z}} \hat{f}_{n+pN}.$$

Solution de l'exercice 2. *Repliement du spectre.*

Notons, pour $y \in [0, 2\pi]$,

$$\gamma_y = \sum_{p\in\mathbf{Z}} \delta_{y+2\pi p}$$

la fonction périodique qui coïncide avec la masse de Dirac δ_y sur $[0, 2\pi]$. Par définition, les coefficients de Fourier de γ_y valent

$$(\hat{\gamma_y})_n = \frac{1}{2\pi}e^{-niy}.$$

Comme

$$g_N = \sum_{k=1}^{N} f(\frac{2k\pi}{N})\gamma_{\frac{2k\pi}{N}},$$

il vient

$$(\hat{g_N})_n = \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{2\pi} f(\frac{2k\pi}{N})e^{-ni\frac{2k\pi}{N}}.$$

Or

$$f(\frac{2k\pi}{N}) = \sum_{p\in\mathbf{Z}} \hat{f}_p e^{ip\frac{2k\pi}{N}}.$$

d'où

$$\begin{aligned}
(\hat{g_N})_n &= \sum_{k=1\dots,N,\, p\in\mathbf{Z}} \frac{1}{2\pi}\hat{f}_p e^{i(p-n)\frac{2k\pi}{N}} \\
&= \sum_{p\in\mathbf{Z}} \frac{1}{2\pi}\hat{f}_p \sum_{k=1}^{N} e^{i(p-n)\frac{2k\pi}{N}} \\
&= \sum_{p\equiv n \, mod \, N} \frac{N}{2\pi}\hat{f}_p
\end{aligned}$$

et enfin

$$(\hat{g_N})_n = \frac{N}{2\pi}\sum_{p\in\mathbf{Z}} (\hat{f})_{n+pN}.$$

Exercice 3 *Soient f et g deux fonctions périodiques de période 2π. On note $h = f * g$ leur produit de convolution, défini par*

$$h(x) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x-t)g(t)\,dt.$$

Vérifier que les coefficients de Fourier de h sont donnés par

$$\hat{h}_n = \hat{f}_n \hat{g}_n.$$

Solution de l'exercice 3. *Produit de convolution.*

$$\begin{aligned}
\hat{h}_n &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x-t)g(t)e^{-inx}\,dt)\,dx \\
&= \frac{1}{4\pi^2}\int_0^{2\pi} g(t)(\int_0^{2\pi} f(x-t)e^{-inx}\,dx)\,dt \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} g(t)(\frac{1}{2\pi}\int_{-t}^{2\pi-t} f(u)e^{-inu}e^{-int}\,du)\,dt \\
&= \hat{f}_n\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} g(t)e^{-int}\,dt \\
&= \hat{f}_n\hat{g}_n.
\end{aligned}$$

Exercice 4 *Soit $N \in \mathbf{N}$. Quelle est la fonction χ_N périodique de période 2π dont les coefficients de Fourier valent*

$$\hat{(\chi_N)}_n = 1 \textit{ si } |n| < N/2, \quad \hat{(\chi_N)}_n = 0 \textit{ sinon ?}$$

Tracer sommairement sa courbe représentative (on commencera par tracer la courbe représentative de $x \mapsto \frac{1}{\sin(x/2)}$).

Solution de l'exercice 4. *Noyau du filtre passe-bas.*

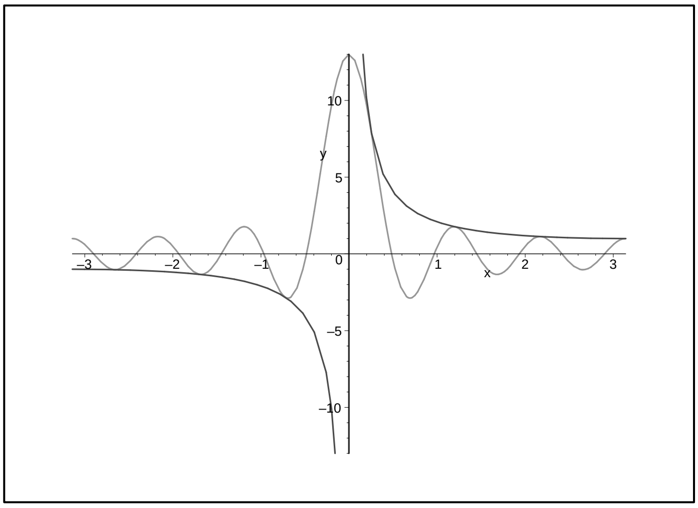
Supposons N impair. Par définition

$$\begin{aligned}
\chi_N(x) &= \sum_{n=(1-N)/2}^{(N-1)/2} e^{inx} \\
&= e^{(1-N)ix/2}\sum_{n=0}^{N-1} e^{inx} \\
&= e^{(1-N)ix/2}\frac{e^{iNx}-1}{e^{ix}-1} \\
&= \frac{e^{iNx/2}-e^{-iNx/2}}{e^{ix/2}-e^{-ix/2}} \\
&= \frac{\sin(Nx/2)}{\sin(x/2)}.
\end{aligned}$$

Lorsque N est pair,

$$\chi_N(x) = \chi_{N-1}(x) = \frac{\sin((N-1)x/2)}{\sin(x/2)}.$$

Voici la courbe représentative de $x \mapsto \dfrac{1}{\sin(x/2)}$. Pour N grand, χ_N est une sinusoïde de haute fréquence modulée par $\dfrac{1}{\sin(x/2)}$. Aux multiples de 2π, χ_N tend vers N (resp. $N-1$). On en déduit la courbe représentative de χ_N.


y
10
5
0
–5
–10
x
–3
–2
–1
1
2
3